2020

LehrplanPLUS

FOS · BOS 12

Fachabitur-Pr

mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Bayern

Mathematik Te

+ Aufgaben im Stil de

+ CAS-Abitur

ActiveBook
Interaktives Training

STARK

Inhaltsverzeichnis

Übungsaufgaben zur Geometrie

Übungsaufgaben zur Analysis mit CAS

Übungsaufgaben zur Geometrie mit CAS

Musterprüfungen zum Fachabitur ab 2019

Original-Fachabituraufgaben

Digitales Übungsmaterial zu diesem Buch

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Fachabiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein **kostenloses Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen im Fachabitur 2020 vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Autoren

Musterprüfungen:
OStR Winfried Stark

Lösungen zu den Original-Fachabituraufgaben (Technik):
OStR Wolfgang Hager (ohne CAS: von 2016 bis 2018, mit CAS: ab 2015)
OStR Winfried Stark (ohne CAS: ab 2019)

Lösungen zu den Original-Fachabituraufgaben (Nichttechnik):
StD Eberhard Lehmann und StD Friedrich Schmidt (bis 2013)
StD Georg Ott und StD Friedrich Schmidt (ab 2014)

Lösungen zu den Original-Abituraufgaben (Nichttechnik):
StD Dieter Pratsch

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie haben zwei lehrreiche Jahre an der FOS bzw. ein Jahr an der BOS absolviert und werden eine schriftliche Prüfung im Fach Mathematik ablegen. Bei der Vorbereitung auf die Abschlussprüfungen wird Ihnen dieses Buch eine gute Hilfe sein.

Mit dem Fachabitur 2019 haben sich die Struktur und die Inhalte der Prüfung geändert. Die Fachabiturprüfungen der Ausbildungsrichtung Technik bis 2018 eignen sich daher nur noch bedingt zur Vorbereitung.

Zur Einübung der Prüfungsinhalte enthält dieses Buch daher neben den offiziellen **Fachabituraufgaben 2019** (Technik) einen Übungsteil, der sich aus weiteren relevanten **offiziellen schriftlichen Prüfungsaufgaben** der Vorjahre zusammensetzt. Neben den Fachabiturprüfungen für die Ausbildungsrichtung Technik wurden bei der Zusammenstellung auch die Fachabitur- und Abiturprüfungen für die nichttechnischen Ausbildungsrichtungen berücksichtigt. Außerdem enthält das Buch Aufgaben aus offiziellen Prüfungen, die mit einem Computer-Algebra-System (CAS) zu bearbeiten sind.

Um Ihnen einen besseren Eindruck von der Struktur und dem Umfang der Prüfung zu geben, enthält das Buch zudem zwei **Musterprüfungen** im Stil der neuen Fachabiturprüfung.

Zu jeder Aufgabe folgen **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie zusätzliche **Lösungshinweise**, die Ihnen das eigenständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Die angeführten Lösungen sind dabei als **möglicher, aber keineswegs einziger Weg** zum Erreichen des Ergebnisses zu sehen.

Das Ziel der Arbeit mit dem Buch besteht darin, dass Sie die Problemstellungen weitgehend selbstständig bearbeiten können und die beschriebenen Lösungswege nur noch zur Kontrolle Ihrer eigenen Ergebnisse nutzen. Wenn Sie dieses Ziel erreicht haben, sind Sie gut auf die bevorstehende Prüfung vorbereitet.

Darüber hinaus können Sie dieses Buch **unterrichtsbegleitend** bei der systematischen Vorbereitung auf Schulaufgaben einsetzen, da Ihr Fachlehrer oder Ihre Fachlehrerin hier auch immer die Fachabiturprüfung im Blick haben wird.

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen für Ihre Prüfungen viel Erfolg!

3 Die schriftliche Fachabiturprüfung in Mathematik

3.1 Aufbau und Auswahl der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben werden einheitlich vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus gestellt. Die Prüfung ist in zwei Teile gegliedert:

- Teil 1 wird ohne Hilfsmittel bearbeitet, d. h. ohne Merkhilfe und ohne Taschenrechner. Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Teil 2 wird mit Hilfsmittel bearbeitet (siehe Abschnitte 3.3 und 3.4).
  Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Jeder Teil setzt sich aus den beiden Aufgabengruppen A (Analysis) und G (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) zusammen.

In Teil 2 gibt es für jede Aufgabengruppe zwei Varianten (AI und AII bzw. GI und GII). Die Auswahl jeweils einer Variante trifft die Schule; die Schülerinnen und Schüler haben keine Wahlmöglichkeit.

In Teil 1 wird zentral nur eine Variante gestellt.[1]

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit mit abzugeben.

Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen dürfen nur auf Papier, das den Stempel der Schule trägt, angefertigt werden.

3.2 Bewertung der Prüfungsaufgaben

Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten (BE) angegeben.
Es sind maximal 100 BE zu erreichen. Diese werden wie folgt verteilt:

	Aufgaben-gruppe	Bewertungs-einheiten
Teil 1	A	22 BE
	G	12 BE
Teil 2	A	43 BE
	G	23 BE

1 Der Musterprüfungssatz in diesem Buch besteht in Teil 1 dennoch aus zwei Varianten pro Aufgabengruppe, um Ihnen zwei vollständige Prüfungen zum Üben zur Verfügung zu stellen.

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungs-einheiten	100 ⋮ 96	95 ⋮ 91	90 ⋮ 86	85 ⋮ 81	80 ⋮ 76	75 ⋮ 71	70 ⋮ 66	65 ⋮ 61	60 ⋮ 56	55 ⋮ 51	50 ⋮ 46	45 ⋮ 41	40 ⋮ 34	33 ⋮ 27	26 ⋮ 20	19 ⋮ 0

3.3 Zugelassene Hilfsmittel (Prüfung ohne CAS)

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Technik für Berufliche Oberschulen bzw. eine diese enthaltende zugelassene Formelsammlung. Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.

Die Merkhilfe Mathematik/Technik wurde von den Fachmitarbeitern der Dienststellen der Ministerialbeauftragten für die Beruflichen Oberschulen des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus erarbeitet. Sie ist auf der Website des Staatinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (www.isb.bayern.de) zu finden.

3.4 Zugelassene Hilfsmittel (Prüfung mit CAS)

Zusätzlich zu den Hilfsmitteln für die Prüfung ohne CAS sind folgende Computer-Algebra-Systeme zugelassen:

- ClassPad 330 und ClassPad II von Casio
- TI-Nspire CAS und TI-Nspire CX CAS von Texas Instruments
- Voyage 200 von Texas Instruments
- MathCAD
- GeoGebra

Vor der Verwendung bei der Abschlussprüfung sind die CAS-Rechner jeweils einheitlich in einen Ausgangszustand zu versetzen, der den Prüfungsanforderungen gerecht wird. In diesem Ausgangszustand muss ein Zugriff auf möglicherweise gespeicherte Dateien, Programme oder Ergänzungspakete mit zusätzlichen Funktionen unterbunden sein.

4 Arbeit mit diesem Buch

Da sich die Form der Prüfung und die Prüfungsinhalte seit 2019 von denen in den Vorjahren wesentlich unterscheiden, sind die Fachabiturprüfungen (Technik) vor 2019 nicht mehr vollständig relevant. Das Buch enthält daher die **Fachabiturprüfung 2019** (Technik) sowie in einem separaten **Übungsteil** relevante Aufgaben aus den Original-Prüfungen vor 2019. Neben den Fachabiturprüfungen für die Ausbildungsrichtung Technik wurden im Übungsteil auch die Fachabiturprüfungen und Abiturprüfungen für die nichttechnischen Ausbildungsrichtungen berücksichtigt. Mit diesen Aufgaben können Sie sich inhaltlich sehr gut auf die Prüfung vorbereiten.

Folgende Aufgaben aus dem Übungsteil eignen sich auch zum Üben für den Teil 1 **ohne Hilfsmittel**.

Analysis (ohne CAS)
- Aufgabe 1
- Aufgaben 2.1 bis 2.3
- Aufgaben 3.1 und 3.2.1
- Aufgaben 4.2 bis 4.4
- Aufgabe 6
- Aufgabe 7
- Aufgaben 8.1, 8.3, 8.5.1 und 8.5.2
- Aufgabe 10.4.2

Lineare Algebra/Analytische Geometrie (ohne CAS)
- Aufgabe 3
- Aufgaben 4.1, 4.2.2
- Aufgabe 5
- Aufgabe 6 (ohne 6.4)
- Aufgabe 7
- Aufgaben 8.1 und 8.2
- Aufgaben 9.1 bis 9.3

Eine zusätzliche Übungsmöglichkeit für den hilfsmittelfreien Teil bietet Ihnen das **interaktive Training**, das Sie online mit dem im Ausklapper des Buchs abgedruckten Code aufrufen können.

Zur weiteren Einübung der Prüfungsinhalte und insbesondere zur Simulation der Prüfungssituation dienen die **Musterprüfungen**, die der Form der Fachabiturprüfung (ohne CAS) ab 2019 entsprechen. Der Aufgabensatz mit den Varianten AI und GI bzw. AII und GII stellt dabei jeweils eine vollständige Prüfung dar. Die Musterprüfungen decken ein möglichst breites Spektrum an unterschiedlichen Aufgabenstellungen ab, erheben aber nicht den Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller möglichen Aufgabentypen und -varianten.

Empfehlung zur Musterprüfung für die Prüfung mit CAS

Die Aufgaben im Teil 2 der Musterprüfung können auch mithilfe eines CAS bearbeitet werden. Die in der Musterprüfung angegebenen Bewertungseinheiten und Lösungshinweise beziehen sich aber immer auf eine Bearbeitung ohne Verwendung eines CAS. Dies bedeutet, dass bei der identischen Aufgabenstellung, jedoch mit Verwendung eines CAS, eventuell weniger Bewertungseinheiten erreicht werden können, da der Aufwand zum Lösen der Aufgabe geringer ist.

Die Lösung wird deshalb meist von der vorgeschlagenen Lösung abweichen und kürzer sein, da algebraische Umformung mit dem CAS durchgeführt werden können. Die Lösungsansätze können dabei aber durchaus identisch sein. Beispielsweise wird man für die Bestimmung der Monotonieintervalle immer die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen müssen. Während man bei der Aufgabenstellung ohne CAS im Anschluss noch eine Vorzeichentabelle erstellen muss, kann man bei der Aufgabenstellung mit CAS für diese Berechnung direkt das CAS benutzen. Z. B. kann man direkt berechnen, für welche Werte von x die Funktion f größer bzw. kleiner Null ist.

Schülerinnen und Schülern, welche sich auf das CAS-Fachabitur vorbereiten, empfehlen wir daher, die komplette Musterprüfung zuerst ohne CAS zu bearbeiten und mit etwas zeitlichem Abstand dieselbe Prüfung nochmals mit CAS durchzurechnen. Dies empfiehlt sich auch deshalb, weil nach aktuellem Wissensstand im Teil 2 einzelne Teilaufgaben wie bisher ohne CAS gelöst werden müssen.

Speziell bei Aufgaben mit Parametern gestalten sich Fallunterscheidungen mit dem CAS teilweise kompliziert. Solche Aufgaben werden in der Regel ohne CAS zu bearbeiten sein. Das gilt für die Aufgaben AII 1.2 und AII 1.4 im Teil 2 der Musterprüfung.

Die Aufgaben im Teil 1 der Musterprüfung dürfen ohnehin nur ohne Hilfsmittel gelöst werden und sind daher in der Nicht-CAS- und der CAS-Prüfung identisch.

Aufgabe 1: Punkte- und Geradenscharen

FOS/BOS 12 Technik, 2016, BI, 1

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(8|5|6)$, $B(4|1|-1)$, $P_a(2|a|-1)$ und $Q_b(-2b|b|b+1)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sowie die Geraden h_1 und h_2 gegeben:

$$h_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R};\quad h_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Geraden h_1 und h_2 spannen die Ebene E auf.

1.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

1.2 Die Ebene $E\colon 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 13 = 0$ schneidet die x_1-x_3-Ebene in der Geraden s. Ermitteln Sie eine Gleichung von s.

1.3 Die Gerade g geht durch den Punkt A und schneidet die Ebene E im Punkt P_a. Ermitteln Sie eine Gleichung von g.

1.4 Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E sowie die Koordinaten des Spiegelpunktes A', der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene E entsteht.

1.5 Prüfen Sie, ob es einen Wert für den Parameter b gibt, sodass die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BQ_b}$ orthogonal sind.

1.6 Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABQ_2P_3.

1.7 Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar f_c:

$$f_c\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c-1{,}5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{mit}\ \kappa, c \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von c sich die Gerade

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \ \text{mit}\ \upsilon \in \mathbb{R}$$

mit einer Geraden aus der Geradenschar f_c schneidet.

TIPP **Lösungshinweise**

Teilaufgabe 1.1

Zwei Geraden legen eine Ebene E fest, falls sie zueinander echt parallel sind oder einen Schnittpunkt haben.

Prüfen Sie die beiden Geraden auf Parallelität, indem Sie die beiden Richtungsvektoren auf Kollinearität untersuchen, d. h., prüfen Sie, ob der eine Richtungsvektor ein Vielfaches des anderen Richtungsvektors ist.

Bestimmen Sie zur Berechnung des Normalenvektors der Ebene E geeignete Richtungsvektoren und verwenden Sie das Vektorprodukt.

Teilaufgabe 1.2

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die x_1-x_3-Ebene.

Setzen Sie die Koordinatengleichung für die x_1-x_3-Ebene in die Gleichung von E ein.

Teilaufgabe 1.3

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und E, indem Sie den Punkt P_a in die Ebene einsetzen.

Stellen Sie mithilfe des berechneten Schnittpunktes und des Punktes A eine Geradengleichung für g auf.

Teilaufgabe 1.4

Der Abstand eines Punktes zu einer Ebene entspricht dem Abstand dieses Punktes zum Lotfußpunkt des Punktes auf der Ebene.

Den Spiegelpunkt eines Punktes bei Spiegelung an einer Ebene berechnet man ebenfalls mit der Lotfußpunktmethode.

Bestimmen Sie die Gleichung der Hilfsgeraden, welche senkrecht zur Ebene E ist und als Aufpunkt den zu spiegelnden Punkt A enthält.

Berechnen Sie den Lotfußpunkt, indem Sie den Schnittpunkt der Hilfsgeraden mit der Ebene E bestimmen.

Der Abstand zweier Punkte entspricht dem Betrag des Verbindungsvektors.

Der gesuchte Spiegelpunkt ergibt sich, indem Sie vom zu spiegelnden Punkt zweimal den Verbindungsvektor von ebendiesem Punkt zum Lotfußpunkt addieren.

Teilaufgabe 1.5

Zwei Vektoren sind genau dann zueinander orthogonal (senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.

Teilaufgabe 1.6

Entnehmen Sie die Formel für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide der Merkhilfe.

Teilaufgabe 1.7

Bestimmen Sie die Schnittmenge der beiden Geraden durch Gleichsetzen und prüfen Sie, für welche Werte von c sich eine eindeutige Lösung ergibt.

Lösungsvorschlag

1.1 Wenn zwei Geraden eine Ebene aufspannen, sind diese entweder echt parallel oder schneiden sich in einem Schnittpunkt.
Prüfen, ob parallel: Ist der Richtungsvektor von h_1 ein Vielfaches von h_2?

$$\overrightarrow{RV(h_1)} = k \cdot \overrightarrow{RV(h_2)} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; k = -1$$

$$\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; h_1 \parallel h_2$$

Der Normalenvektor der Ebene E kann also mit dem Vektorprodukt aus dem Verbindungsvektor der Aufpunkte von h_1 und h_2 mit einem der beiden Richtungsvektoren gebildet werden:

$$\vec{n}_E = (\overrightarrow{AP(h_1)} - \overrightarrow{AP(h_2)}) \times \overrightarrow{RV(h_2)}$$

$$\vec{n}_E = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; E\colon \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

1.2 Die x_1-x_3-Ebene kann beispielsweise durch die Gleichung $x_2 = 0$ dargestellt werden. Ein möglicher Normalenvektor dieser Ebene ist: $\vec{n}_{x_1\text{-}x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden s ist sowohl zur Ebene E als auch zur x_1-x_3-Ebene parallel, also senkrecht zu den beiden Normalenvektoren dieser Ebenen. Er kann mit dem Vektorprodukt ermittelt werden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung

BE

1 Entscheiden Sie, welche Funktionsterme einen Graphen besitzen, der punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft. Geben Sie für Ihre Entscheidung auch ein kurze Begründung an.
Für alle Funktionen gilt $D_f = \mathbb{R}$. 5

Punktsymmetrie			
ja	**nein**	**Funktionsterm f(x)**	**Begründung**
☐	☐	$x \cdot (x-4) \cdot (x+2)$	
☐	☐	$x \cdot (x-4)^2 \cdot (x+4)$	
☐	☐	$2 - x \cdot (x^2 - 1)$	
☐	☐	$x \cdot e^{1-x^2}$	

TIPP Lösungshinweise – Teil 1, Analysis I

Teilaufgabe 1

Achten Sie auf die Nullstellen und deren Vielfachheiten.

Achten Sie auf die Exponenten.

Verwenden Sie unter Umständen das (Punkt-)Symmetriekriterium:
$f(-x) = -f(x)$

Teilaufgabe 2.1

Bestimmen Sie die Steigung des Graphen der Funktion g in seinem linken Wendepunkt.

Nutzen Sie diese Steigung, um die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen $G_{g'}$ anzugeben.

Untersuchen Sie das Steigungsverhalten des Graphen der Funktion g für $x \to -\infty$.

Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften des Graphen G_g.

Entscheiden Sie, an welcher Stelle der Graph $G_{g'}$ die x-Achse schneidet.

Zeichnen Sie den Graphen $G_{g'}$ ein.

Teilaufgabe 2.2

Schätzen Sie die eingeschlossene Fläche durch „Kästchen-Zählen" ab.

Teilaufgabe 2.3

Berechnen Sie die Koordinaten des relativen Hochpunktes.

Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion g für $x \to \pm\infty$.

Treffen Sie eine Aussage für die Wertemenge W und achten Sie dabei auf die richtigen Intervallgrenzen.

Teilaufgabe 3.1

Geben Sie die Nullstellen der Funktion h_a an.

Führen Sie eine Fallunterscheidung durch und argumentieren Sie dabei mit der geometrischen Deutung der Vielfachheit der Nullstellen.

Beachten Sie, dass sich zwischen zwei Nullstellen stets ein relativer Extrempunkt befindet.

Teilaufgabe 3.2

Lösen Sie die entsprechende Ungleichung mithilfe einer Vorzeichentabelle und beachten Sie, dass $a > 0$ gilt.

1

Punktsymmetrie			
ja	**nein**	**Funktionsterm f(x)**	**Begründung**
☐	☒	$x \cdot (x-4) \cdot (x+2)$	Die Nullstellen sind nicht symmetrisch zu $x = 0$.
☐	☒	$x \cdot (x-4)^2 \cdot (x+4)$	Die Nullstellen sind zwar symmetrisch zu $x = 0$, aber sie haben unterschiedliche Vielfachheiten.
☐	☒	$2 - x \cdot (x^2 - 1)$	Der Term enthält einen Summanden mit **geradzahligem** Exponenten: $f(x) = 2 - x(x^2 - 1) = 2 - x^3 + x$ $= -x^3 + x \mathbf{- 2}$
☒	☐	$x \cdot e^{1-x^2}$	Das Produkt einer zum Koordinatenursprung symmetrischen Funktion ($f(x) = x$) und einer zur y-Achse symmetrischen Funktion ($g(x) = e^{1-x^2}$) ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. *Alternativ:* $f(-x) = -x \cdot e^{1-(-x)^2}$ $= -x \cdot e^{1-x^2} = -f(x)$ Da zudem $D_f = \mathbb{R}$ symmetrisch zu $x = 0$ ist, ist der Graph der Funktion f symmetrisch zum Koordinatenursprung.

2.1 Im Punkt W (linker Wendepunkt des Graphen) hat der Graph der Funktion g seine maximale Steigung. Der Wendepunkt liegt ungefähr bei W(–0,7 | 0,25). Zeichnet man im Punkt W die Tangente an den Graphen G_g und entnimmt dieser den Wert der Steigung mithilfe eines Steigungsdreiecks, so erhält man:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}8}{1} = 0{,}8$$

Weil $g'(-0{,}7) = m = 0{,}8$ ist, gilt für den Hochpunkt des Graphen der Ableitungsfunktion g':

H(–0,7 | 0,8)

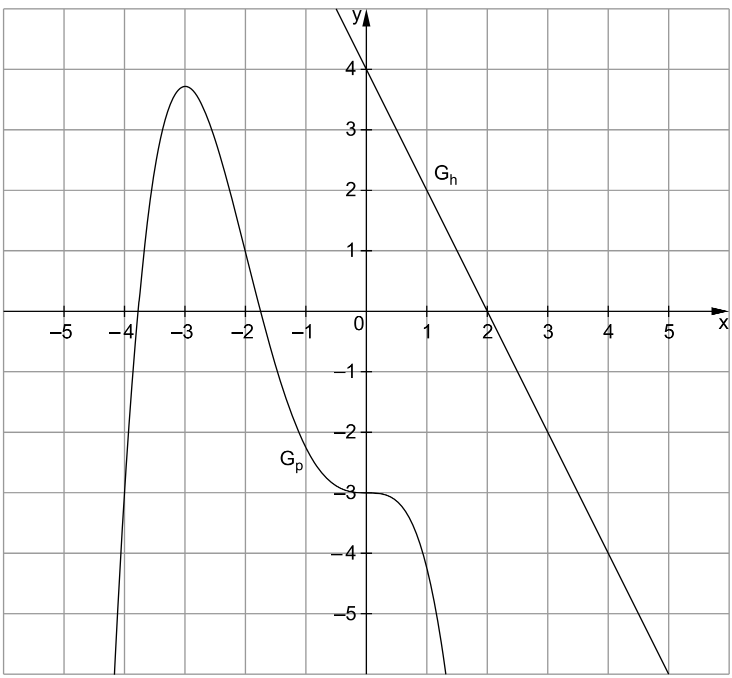
Für $x \to -\infty$ folgt: $g(x) = -\frac{1}{e} + e^{1-x^2} \to -\frac{1}{e}$

Aufgabenstellung

BE

1 Die Funktion $f'_a: x \mapsto (x-a)^2 \cdot (x+3)$ mit der Definitionsmenge $D_{f'_a} = \mathbb{R}$ ist die erste Ableitungsfunktion der Funktion f_a mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie sämtliche Werte für a, sodass der Graph der zugehörigen Funktion f_a mehr als einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.
Begründen Sie, von welcher Art diese Punkte dann jeweils sind. 5

2.0 Die ganzrationale Funktion 4. Grades p und die lineare Funktion h sind auf $D_p = D_h = \mathbb{R}$ definiert.
In der nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen von p und h dargestellt.
Hinweis: Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



TIPP **Lösungshinweise – Teil 1, Analysis**

Teilaufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $f_a'(x) = 0$ und entscheiden Sie, für welche Werte von a man zwei unterschiedliche Lösungen erhält.

Untersuchen Sie das Vorzeichenverhalten der Funktionswerte von f_a' in der Umgebung der Nullstellen (z. B. mit einer Vorzeichentabelle) und schließen Sie daraus auf die Art der Punkte mit waagrechter Tangente.

Teilaufgabe 2.1

Entnehmen Sie der Grafik den ganzzahligen Funktionswert h(3).

Teilaufgabe 2.2

Entnehmen Sie der Grafik die Nullstelle x_0 der Funktion h.

Entscheiden Sie anhand der Grafik, wie viele Lösungen die Gleichung $p(x) = x_0$ besitzt.

Teilaufgabe 3

Der Funktionsterm besteht aus zwei Summanden: einer Konstanten und einem von t abhängigen Term.

Der von t abhängige Term beschreibt die Temperaturdifferenz zum Zeitpunkt t und strebt mit zunehmender Zeit gegen null.

Teilaufgabe 4.1

(a) Die erste Ableitung liefert eine Aussage über das Steigungsverhalten des Graphen.
(b) Die zweite Ableitung liefert eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen.
(c) Das bestimmte Integral liefert den Wert einer eingeschlossenen Fläche (bzw. Flächenbilanz). Treffen Sie davon ausgehend eine Entscheidung darüber, wo der überwiegende Teil der Fläche bezüglich der x-Achse liegt.

Teilaufgabe 4.2

Nutzen Sie die Bedeutung der in 4.1 festgelegten Aussagen.

Teilaufgabe 5.1

Untersuchen Sie für jeden Funktionsterm das Verhalten der Funktionswerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

Bringen Sie den Funktionsterm t(x) in Produktform.

Teilaufgabe 5.2

Lösen Sie die Gleichung $s(x) = u(x)$.

Lösungsvorschlag – Teil 1, Analysis

1 Stellen mit waagrechter Tangente:

$$f_a'(x) = 0$$
$$(x-a)^2(x+3) = 0$$
$$x_1 = -3; \quad x_2 = a$$

TIPP Falls $a = -3$ ist, besitzt f_a' eine einzige Nullstelle (und zwar die dreifache Nullstelle $x_1 = -3$).

Zwei unterschiedliche Nullstellen der Ableitungsfunktion f_a' und somit zwei unterschiedliche Stellen mit waagrechter Tangente an den Graphen der Funktion f_a hat man für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

1. Fall: $a > -3$

VZT		-3		a	
$(x-a)^2$	+		+	0	+
$(x+3)$	–	0	+		+
$f_a'(x)$	–	0	+	0	+
G_{f_a}	↘	→ TP	↗	→ TeP	↗

2. Fall: $a < -3$

VZT		a		-3	
$(x-a)^2$	+	0	+		+
$(x+3)$	–		–	0	+
$f_a'(x)$	–	0	–	0	+
G_{f_a}	↘	→ TeP	↘	→ TP	↗

In beiden Fällen hat der Graph der Funktion f_a einen relativen Tiefpunkt an der Stelle $x_1 = -3$ und einen Terrassenpunkt an der Stelle $x_2 = a$.

Alternative Begründung:
$x_1 = -3$ ist eine einfache Nullstelle der Ableitungsfunktion f_a', d. h., f_a' hat an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel von – nach +.

⇒ Der Graph der Funktion f_a' hat an der Stelle $x_1 = -3$ einen relativen Tiefpunkt.

$x_2 = a$ ist eine doppelte Nullstelle der Ableitungsfunktion f_a', d. h., f_a' hat an dieser Stelle keinen Vorzeichenwechsel.

⇒ Der Graph der Funktion f_a' hat an der Stelle $x_2 = a$ einen Terrassenpunkt.

2.1 Der Grafik kann entnommen werden, dass gilt:
$h(3) = -2$ und $p(-2) = 1$

Somit folgt:
$p(h(3)) = p(-2) = 1$

Aufgabenstellung

		BE
1.0	Der Graph G_f einer auf $D_f = \mathbb{R}$ definierten Funktion $f\colon x \mapsto ax^4 + bx^3 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ besitzt die beiden Wendepunkte $W_1(0 \mid 1)$ und $W_2(2 \mid -3)$.	
1.1	Ermitteln Sie den Funktionsterm von f. [Teilergebnis: $a = \frac{1}{4}$; $b = -1$; $c = 1$]	3
1.2	Bestimmen Sie die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_f.	3
1.3	Zeichnen Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 4{,}25$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Maßstab: x-Achse: 1 LE = 2 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm	3
1.4	Gegeben ist weiterhin die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 2x - 7$ auf $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph G_g dieser Funktion schließt mit dem Graphen G_f ein endliches Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 ein, kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.	4
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $h_k\colon x \mapsto 2x^3 + 4kx^2 + 8x$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$.	
2.1	Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist. „Der Graph der Funktion h_k ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.“	2
2.2	Ermitteln Sie, für welche Werte für k die Funktion h_k genau eine Nullstelle besitzt.	5
2.3	Bestimmen Sie den Wert für k, für den die Funktion h_k an der Stelle $x = 2$ einen relativen Tiefpunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.	4

TIPP **Lösungshinweise – Teil 2, Analysis I**

Teilaufgabe 1.1

Stellen Sie mithilfe der Informationen aus der Aufgabenstellung ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses mit dem CAS.

Die Wendepunkte liegen auf G_f und erfüllen die Funktionsgleichung.

An den Wendestellen ist der Wert der 2. Ableitung der Funktion f gleich null.

Teilaufgabe 1.2

Besitzt die Funktion f' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach –, dann hat die Funktion f dort ein lokales Maximum. Bei einem Vorzeichenwechsel von – nach + liegt dagegen ein lokales Minimum vor.

Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle des Extremums.

Teilaufgabe 1.3

Erstellen Sie mit dem CAS eine Wertetabelle.

Beachten Sie den Maßstab.

Teilaufgabe 1.4

Bestimmen Sie mit dem CAS die beiden Schnittstellen x_1 und x_2 der Graphen von f und g und damit die Integralgrenzen.

Verwenden Sie für die Flächenberechnung das Integral von „oberer Graph minus unterer Graph".

Teilaufgabe 2.1

Untersuchen Sie mit dem CAS, ob $h_k(-x) = h_k(x)$ (Achsensymmetrie zur y-Achse) oder $h_k(-x) = -h_k(x)$ (Punktsymmetrie zum Ursprung).

Teilaufgabe 2.2

Bestimmen Sie mit dem CAS alle möglichen Nullstellen in Abhängigkeit von k.

Untersuchen Sie, ob es Parameterwerte für k gibt, für die genau eine Nullstelle vorliegt.

Teilaufgabe 2.3

Einen relativen Tiefpunkt bei $x = 2$ kann es nur geben, wenn die 1. Ableitung von h_k an dieser Stelle null ist.

Setzen Sie in die 1. Ableitung den Wert $x = 2$ ein und bestimmen Sie mit dem CAS, für welche Parameterwerte für k die 1. Ableitung null ist.

Prüfen Sie mit der 2. Ableitung von h_k, ob bei $x = 2$ tatsächlich ein Tiefpunkt vorliegt.

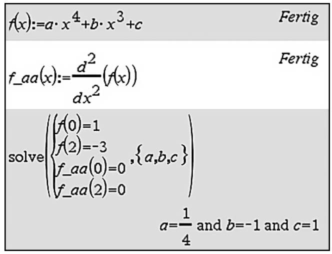
Lösungsvorschlag – Teil 2, Analysis I

1.1 Die Funktion f hat laut Angabe folgende Form: $f(x) = ax^4 + bx^3 + c$

> **TIPP** Es empfiehlt sich, im ersten Schritt die Funktion f in Abhängigkeit der Parameter zu definieren und dann die 2. Ableitungsfunktion zu berechnen.

Mit den Informationen aus der Aufgabenstellung erhält man ein Gleichungssystem, das man mit dem CAS löst:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(2)=-3 \\ f''(0)=0 \\ f''(2)=0 \end{array}\right\} \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} \quad a=\frac{1}{4};\ b=-1;\ c=1$$



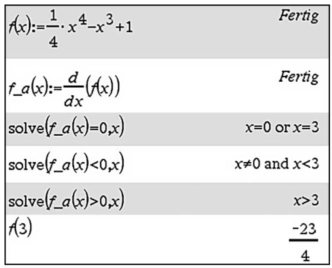
1.2 Stellen mit waagrechter Tangente:

$$f'(x)=0 \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x=0 \lor x=3$$

Vorzeichenverhalten von $f'(x)$:

$$f'(x)<0 \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x<3 \land x\neq 0$$

$$f'(x)>0 \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x>3$$



Da $f'(x)$ an der Stelle $x=3$ einen Vorzeichenwechsel von – nach + besitzt, besitzt f dort ein relatives Minimum.

$$f(3) \overset{\text{CAS}}{=} -\frac{23}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Relativer Tiefpunkt } T\left(3 \,\middle|\, -\frac{23}{4}\right)$$

1.3 Vgl. Teilaufgabe 1.3 der Prüfung ohne CAS.
Eine Kontrolle mit dem CAS ist möglich.

1.4 Einzeichnen des Graphen von g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 und Kennzeichnen des beschriebenen Flächenstücks.

Bestimmung der Schnittstellen der beiden Graphen (Integralgrenzen):

$$f(x)=g(x) \overset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x=2 \lor x=4$$

Bestimmung der Flächenmaßzahl:

$$A=\int_2^4 (g(x)-f(x))\,dx \overset{\text{CAS}}{=} \frac{32}{5}$$