GYMNASIUM

TRAINING

MATHEMATIK

MEHR ERFAHREN

Grundwissen

Bayern

Geometrie 7. Klasse

STARK

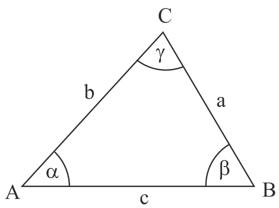
Inhalt

Autorin: Monika Muthsam

3 Winkelsumme im Dreieck und Viereck

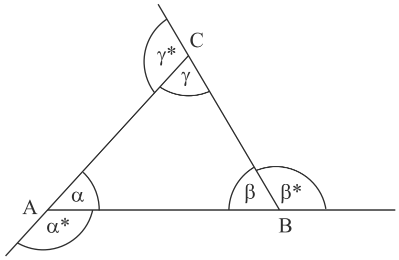
Wie groß ist die Winkelsumme in einem Dreieck? Dies kannst du herausfinden, indem du ein Dreieck zeichnest und es anschließend ausschneidest. Schneide nun die Ecken des Dreiecks ab und lege die Ecken aneinander. Was fällt dir dabei auf?

Drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte bilden ein Dreieck, dessen Eckpunkte entgegen dem Uhrzeigersinn in alphabetischer Folge mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden. Die Seitenbezeichnungen orientieren sich am jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt und werden mit kleinen lateinischen Buchstaben benannt. Die Winkel werden nach den Punkten benannt, die den Scheitel bilden, und werden mit kleinen griechischen Buchstaben benannt.



Verlängert man eine Dreiecksseite, so wird der entstehende Winkel als Außenwinkel bezeichnet und dem Nebenwinkel entsprechend mit einem Stern gekennzeichnet.

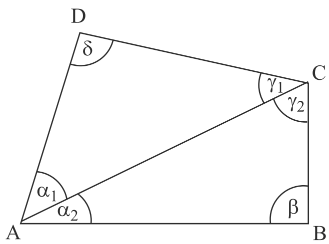
Es gilt: $\alpha + \alpha^* = 180°$ (Nebenwinkel)



Für die Winkel in einem Dreieck gilt:

Satz:
In einem Dreieck beträgt die Winkelsumme 180°.

Mit der Kenntnis über die Winkelsumme im Dreieck lässt sich auch die Winkelsumme im Viereck berechnen, da jedes Viereck mithilfe einer Diagonalen in zwei Dreiecke zerteilt werden kann.



Für die Winkel in einem Viereck gilt:

Satz:
In einem Viereck beträgt die Winkelsumme 360°.

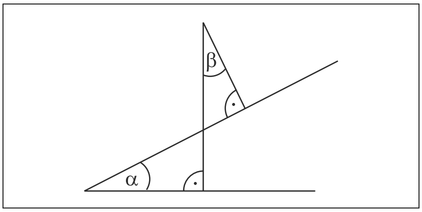
Beispiele

1. Berechne die Innenwinkel eines Dreiecks, wenn gilt:
   a) $\alpha = 24°\ 25'$, $\gamma = 136°\ 58'$
   b) α und β sind gleich groß, $\gamma = 64°$

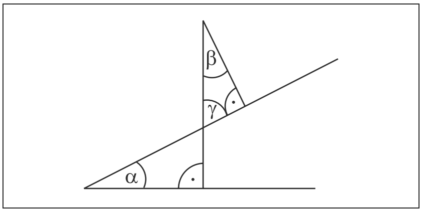
   Lösung:
   a) $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (24°\ 25' + 136°\ 58') = 180° - 161°\ 23'$
   $= 18°\ 37'$

   b) $\alpha + \beta = 180° - \gamma$
   $\alpha = \beta = (180° - \gamma) : 2 = (180° - 64°) : 2 = 116° : 2 = 58°$

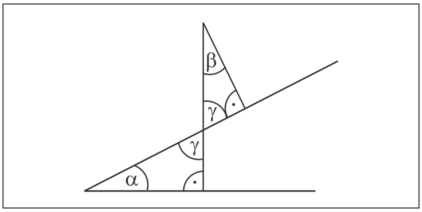
2. Berechne β, wenn $\alpha = 36°$ gilt. Was fällt dir auf? Handelt es sich hier um eine Besonderheit für $\alpha = 36°$?



Lösung:
β kann anhand der Winkelsumme im Dreieck bestimmt werden.
Hierzu wird der Winkel γ benötigt.



γ wiederum kann mithilfe des Scheitelwinkels und der Winkelsumme im unteren Dreieck berechnet werden.



$\gamma = 180° - 90° - \alpha = 180° - 90° - 36° = 54°$
$\beta = 180° - 90° - \gamma = 180° - 90° - 54° = 36°$
β ist also genauso groß wie α.
Dies gilt für jedes α, denn für die Winkelsumme der zwei Dreiecke gilt:
$180° = \alpha + \gamma + 90° \;\Rightarrow\; \alpha = 180° - 90° - \gamma$
$180° = \beta + \gamma + 90° \;\Rightarrow\; \beta = 180° - 90° - \gamma$
$\Rightarrow\; \alpha = \beta$

Aufgaben

47. Berechne die fehlenden Innenwinkel eines Dreiecks, wenn gilt:

a) $\alpha = 34°$, $\beta = 117°$

b) $\alpha = 67°\ 43'$, $\gamma = 89°\ 35'$

c) α und γ sind gleich groß, $\beta = 78°$.

d) α ist doppelt so groß wie β, $\gamma = 60°$.

e) α ist um 20 % größer als β, $\gamma = 70°$.

f) Alle Winkel sind gleich groß.

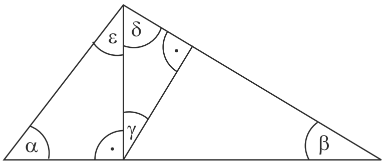
g) $\alpha = 27°$, $\beta^* = 134°$

48. a) Zeige: Im Dreieck ist der Außenwinkel gleich der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel. (Außenwinkelsatz)

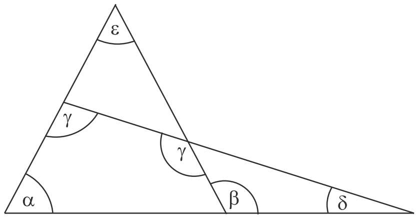
b) Bestimme die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks.

49. Berechne alle benannten Winkel. (Die Skizzen sind nicht maßstabsgetreu!)

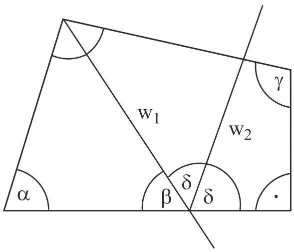
a) $\alpha = 67°$, $\beta = 32°$



b) $\alpha = 56°$, $\beta = 114°$



c) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, wobei w_1 und w_2 die Winkelhalbierenden der jeweiligen Winkel sind.



50. Begründe jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

a) Es gibt Dreiecke mit drei spitzen Winkeln.

b) Es gibt Dreiecke mit zwei stumpfen und einem spitzen Winkel.

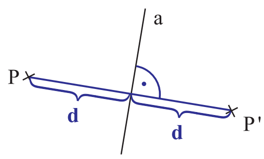
c) Es gibt Dreiecke mit einem überstumpfen Winkel.

1 Achsensymmetrie

Wir sind überall von Symmetrie umgeben. Viele Gegenstände des alltäglichen Lebens wären ohne ihre symmetrischen Eigenschaften unzweckmäßig: Eine Leiter mit schrägen Sprossen ist ebenso unpraktisch wie ein Stuhl mit ungleichen Beinen. Die Gewinnchancen beim Fußball wären ungleich verteilt, wenn die Felder nicht symmetrisch angelegt wären.
Auch die Natur bietet viele symmetrische Formen (Schneeflocken, Blätter, Blüten, Insekten, …). Künstler und Architekten bedienen sich der Symmetrie, um als schön angesehene Objekte zu erstellen.
Bei den im normalen Sprachgebrauch als symmetrisch bezeichneten Figuren lassen sich verschiedene Formen der Symmetrie feststellen. Eine dieser Arten ist die Achsensymmetrie. Um eine Klassifizierung zu ermöglichen, wird eine genaue Definition dieser Symmetrie benötigt.

Achsensymmetrische Figuren

Zwei Punkte P und P' sind **symmetrisch** bezüglich der **Symmetrieachse a**, wenn die Verbindungsstrecke der Punkte **senkrecht** auf der Achse a steht und von ihr **halbiert** wird.

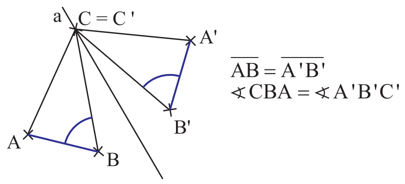


Eine Figur ist achsensymmetrisch zu einer Symmetrieachse a, wenn zu jedem Punkt der Figur auch der entsprechende achsensymmetrische Punkt in der Figur enthalten ist.
Du erkennst symmetrische Figuren, wenn du sie entlang der Symmetrieachse faltest. Die eine Hälfte kommt deckungsgleich auf der anderen Hälfte zu liegen.

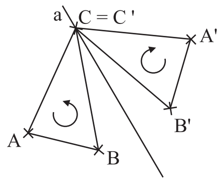
Der gespiegelte Punkt wird als Bildpunkt bezeichnet. Entsprechend nennt man eine gespiegelte Figur auch Bildfigur. Häufig wird der ursprüngliche Punkt bzw. die ursprüngliche Figur als das Original bezeichnet.

Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren:

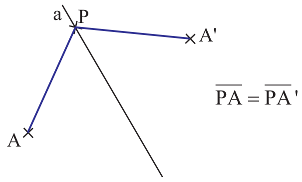
- zueinander symmetrische Strecken sind **gleich lang**
- zueinander symmetrische Winkel sind **gleich groß**



- Original und Bildfigur haben einen **unterschiedlichen Umlaufsinn**



- zueinander symmetrische Geraden sind parallel oder schneiden sich auf der Symmetrieachse
- Punkte, die auf der Symmetrieachse liegen, werden auf sich selbst abgebildet **(Fixpunkte)**
- Geraden, die senkrecht auf der Achse stehen, werden auf sich selbst abgebildet **(Fixgeraden)**
- jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zwei zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt
- jeder Punkt, der von zwei zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt ist, liegt auf der Symmetrieachse



Beispiele

1. Spiegele das Viereck an der gegebenen Achse.