

# MATHE Skript

MEHR  
ERFAHREN

Du möchtest mehr erfahren!

Mittlerer Schulabschluss

Nordrhein

**STARK**

# **Inhalt**

## **Grundwissen**

1	Zuordnungen .....	1
2	Prozent- und Zinsrechnung .....	3
3	Potenzen und Potenzgesetze .....	5
4	Binomische Formeln .....	7
5	Berechnungen in einer Tabellenkalkulation .....	8

## **Gleichungen und Gleichungssysteme**

1	Lineare Gleichungen .....	9
2	Lineare Gleichungssysteme .....	11
3	Quadratische Gleichungen .....	14

## **Funktionen**

1	Lineare Funktionen .....	16
2	Quadratische Funktionen .....	20
2.1	Funktionen der Form $y=ax^2$ .....	21
2.2	Funktionen der Form $y=ax^2+n$ .....	22
2.3	Funktionen der Form $y=ax^2+bx+c$ .....	26
3	Exponentialfunktionen und Wachstumsprozesse .....	34

## **Ebene Geometrie**

1	Ebene Figuren .....	39
2	Sätze am rechtwinkligen Dreieck .....	43
3	Berechnungen am Kreis .....	45

## **Trigonometrie**

1	Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken .....	48
2	Berechnungen in beliebigen Dreiecken .....	50

## **Raumgeometrie**

1	Prisma .....	51
2	Pyramide .....	53
3	Zylinder .....	54
4	Kegel .....	55
5	Kugel .....	56
6	Zusammengesetzte Körper .....	57

## **Stochastik**

1	Statistik .....	58
2	Diagramme .....	64
3	Wahrscheinlichkeitsrechnung .....	68

<b>Stichwortverzeichnis .....</b>	<b>71</b>
-----------------------------------	-----------

**Autor:** Redaktion Stark Verlag, Dieter Gauß

# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet dir einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die du beim Mittleren Schulabschluss benötigst. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffes kurz vor der Prüfung.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abschlussprüfung!

Die Prüfungsaufgaben des letzten Jahres sowie einen umfangreichen Trainingsteil zur Wiederholung des Grundwissens enthält das Buch „Training Mittlerer Schulabschluss, NRW, Mathematik 10. Klasse“, das es in einer Ausgabe für Hauptschulen Typ B (Bestell-Nr. 53501) und in einer Ausgabe für Realschulen (Bestell-Nr. 51500) gibt. Beide Bücher gibt es auch mit einem interaktiven Online-Prüfungstraining (Bestell-Nr. 53501ML; 51500ML). Der zugehörige Lösungsband ist jeweils separat erhältlich (Bestell-Nr. 53501L; 51500L). Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen sowie zahlreichen Übungsaufgaben enthält das Buch „Mittlerer Schulabschluss, NRW, Mathematik 10. Klasse“ (Bestell-Nr. 515001).

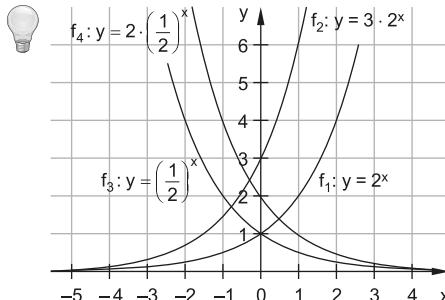


### 3 Exponentialfunktionen und Wachstumsprozesse

Eine **Exponentialfunktion** ist eine Funktion der Form:

$$y = c \cdot a^x \quad (c > 0; a > 0)$$

- Die Graphen dieser Funktionen verlaufen alle durch den Punkt  $(0 | c)$  und haben die x-Achse als Asymptote (Grenzgerade).
- Für  $0 < a < 1$  sind die Graphen monoton fallend und beschreiben **Abklingprozesse: exponentielle Abnahme**
- Für  $a > 1$  sind die Graphen monoton steigend und beschreiben **Wachstumsprozesse: exponentielle Zunahme**



Die Basis  $a$  beeinflusst die Form des Graphen wie oben beschrieben (fallend/steigend). Unterscheiden sich zwei Exponentialfunktionen nur im Faktor  $c$ , dann steigt/fällt der Graph umso stärker, je größer  $c$  ist.

Beachte, dass alle Graphen durch  $(0 | c)$  verlaufen. Die Graphen von  $f_1$  und  $f_3$  mit  $c = 1$  verlaufen z. B. beide durch  $(0 | 1)$ .

Exponentielles Wachstum/Abklingen tritt bei Vorgängen auf, die eine konstante prozentuale Wachstums-/Abklingrate  $p$  aufweisen: Vermehrung von Kapital durch Zinseszinseffekt, Wachstum von Bakterienkulturen, Zerfall radioaktiver Stoffe, Zerfall von Schaum etc.

Ein Vorgang, bei dem in  $x$  gleichen Zeitabständen der Anfangswert  $c$  jeweils um einen **konstanten Prozentsatz  $p$  %** zu-/abnimmt, kann durch folgende Exponentialfunktion beschrieben werden:

$$y_x = c \cdot \underbrace{\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)}_a^x \quad (y_x \text{ ist der Wert zum Zeitpunkt } x)$$

Den Faktor  $a = 1 + \frac{p}{100} > 1$  nennt man **Wachstumsfaktor**.

Den Faktor  $a = 1 - \frac{p}{100} < 1$  nennt man **Abnahmefaktor**.



- a) In einer Bakterienkultur mit 2 000 Bakterien halbiert sich jede Stunde die Anzahl der Bakterien.  
Wie viele Bakterien sind nach 4 Stunden noch vorhanden?
- b) In einer anderen Bakterienkultur mit 100 Bakterien verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien alle 20 Minuten.  
Wie viele Bakterien sind nach 3 Stunden vorhanden?

*Lösung:*

**a) Gegeben:**

Anfangswert:  $c = 2\,000$

$$\text{Abnahmefaktor: } a = 1 - \frac{p}{100} = 1 - \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad \text{Halbierung: } p \% = 50 \%$$

Abnahmeschritte:  $x = 4$

**Gesucht:**

Endwert:  $y_4$

**Rechnung:**

$$y_x = c \cdot a^x$$

$$y_4 = 2\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Der Anfangswert 2 000 muss 4-mal halbiert werden.

$$y_4 = 2\,000 \cdot \frac{1}{16}$$

$$y_4 = 125$$

Nach 4 Stunden sind noch 125 Bakterien vorhanden.

**b) Gegeben:**

Anfangswert:  $100$

$$\text{Wachstumsfaktor: } a = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{100}{100} = 2 \quad \text{Verdopplung: } p \% = 100 \%$$

$$\text{Wachstumsschritte: } x = \frac{3 \text{ h}}{20 \text{ min}} = \frac{180 \text{ min}}{20 \text{ min}} = 9 \quad \text{Berechne die Anzahl der Verdopplungen im Zeitraum 3 h.}$$

**Gesucht:**

Endwert:  $y_9$

**Rechnung:**

$$y_9 = 100 \cdot 2^9$$

$$y_9 = 100 \cdot 512$$

$$y_9 = 51\,200$$

Der Anfangswert 100 muss 9-mal verdoppelt werden.

Nach 3 Stunden sind 51 200 Bakterien vorhanden.

Werden Zinsen am Ende eines Jahres dem Guthaben (Kapital) zugerechnet und in den folgenden Jahren mitverzinst, spricht man von **Zinseszinsen**. Das Kapital wächst dann **exponentiell**.

Wichtige Begriffe der **Zinseszinsrechnung**:

**K<sub>0</sub>**: Kapital am Anfang

**K<sub>n</sub>**: Kapital nach n Jahren

**p**: Zinssatz

**q**: Zinsfaktor  $q = 1 + \frac{p}{100}$

**n**: Anzahl der verzinsten Jahre

**Zinseszinsformel:**

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Der Funktionswert einer Exponentialfunktion zu einem bestimmten Wert  $x=b$  kann wie bei anderen Funktionen durch Einsetzen berechnet werden (vgl. obiges Beispiel).

Der zu einem vorgegebenen Funktionswert  $y=k$  gehörige Wert  $x$  kann bei Exponentialfunktionen auf verschiedene Arten bestimmt werden.

### **Bestimmung von x bei vorgegebenem Funktionswert y=k**

#### **Vorgehensweise 1 – Lösen durch Probieren:**

- Für verschiedene Werte von  $x$  die zugehörigen Werte  $y_x$  bestimmen bis  $y_x = k$  gilt

#### **Vorgehensweise 2 – Lösen durch Ablesen:**

- Graph der Exponentialfunktion mithilfe einer Wertetabelle zeichnen
- Ablesen des zu  $y=k$  gehörenden Werts auf der x-Achse

#### **Vorgehensweise 3 – Lösen durch Logarithmieren:**

- Gleichung nach  $a^x$  auflösen
- Auf beiden Seiten der Gleichung logarithmieren und anschließend nach  $x$  auflösen



Als das Zinsniveau noch höher war, legte Herr Weber 14 950 € an.

Das Wachstum seines Kapitals bei festem Jahreszinssatz lässt sich durch die Funktion mit der Gleichung  $K_n = 14\,950 \cdot 1,05^n$  beschreiben, wobei  $K_n$  für das Kapital in Euro nach  $n$  Jahren steht.

- a) Ergänze die Wertetabelle auf Tausender gerundet. Zeichne dann den Graphen zu  $f$  in ein Koordinatensystem.

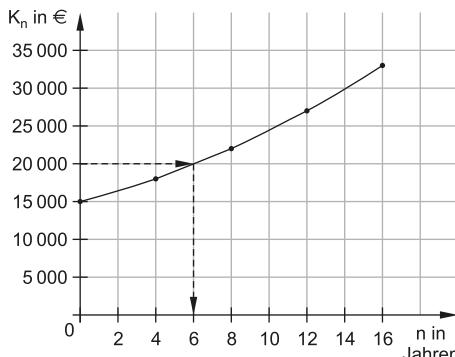
$n$	0	4	8	12	16
$14\,950 \cdot 1,05^n$					

- b) Wie hoch war der Zinssatz, zu dem Herr Weber sein Geld anlegte?  
 c) Bestimme, nach wie vielen Jahren das Kapital von Herrn Weber erstmals auf mehr als 20 000 € angewachsen ist.  
 d) Auf welchen Betrag ist das Kapital von Herrn Weber nach 10 Jahren angewachsen?

*Lösung:*

a) $x$	0	4	8	12	16
$14\,950 \cdot 1,05^x$	15 000	18 000	22 000	27 000	33 000

Beachte, dass die Werte in der Wertetabelle auf Tausender zu runden sind.



Beim Verbinden der Tabellenwerte im Koordinatensystem ist darauf zu achten, dass sich der Graph nicht aus geraden Stücken zusammensetzt, sondern eine durchgehende Krümmung aufweist.

- b) Das Kapital wächst jedes Jahr um den Faktor  $q = 1,05 = 1 + \frac{5}{100}$ , also mit einem Zinssatz von 5 %.



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**