
MEHR
ERFAHREN

GYMNASIUM

TRAINING

MATHEMATIK

MEHR ERFAHREN

Grundwissen

Geometrie 9. Klasse

STARK

Inhalt

Autorin: Monika Muthsam

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem auf **G8** abgestimmten Trainingsbuch kannst du den **gesamten Unterrichtsstoff** für die **Geometrie** in der **9. Klasse** selbstständig wiederholen und dich optimal auf Klassenarbeiten bzw. Schulaufgaben vorbereiten.

- Um dir bei der Herangehensweise an mathematische Probleme zu helfen, werden im ersten Teil dieses Buches **Methoden** zur effektiven Lösung von Mathematikaufgaben vorgestellt.
- In den folgenden Kapiteln werden alle **unterrichtsrelevanten Themen** aufgegriffen und anhand von ausführlichen **Beispielen** veranschaulicht. **Kleinschrittige Hinweise** erklären dir die einzelnen Rechen- oder Denkschritte genau. Die Zusammenfassungen der **zentralen Inhalte** sind außerdem in farbiger Schrift hervorgehoben.
- **Zahlreiche Übungsaufgaben** mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad bieten dir die Möglichkeit, die verschiedenen Themen einzuüben. Hier kannst du überprüfen, ob du den gelernten Stoff auch anwenden kannst. Komplexere Aufgaben, bei denen du wahrscheinlich etwas mehr Zeit zum Lösen brauchen wirst oder die sich auch auf Themengebiete aus der 5. und 8. Klasse beziehen, sind mit einem ✳ gekennzeichnet.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit **ausführlichen Hinweisen**, die dir den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.
- Begriffe, die dir unklar sind, kannst du im **Grundwissen der 5. bis 9. Klasse** nachschlagen. Dort sind alle wichtigen Definitionen aus der Geometrie zusammengefasst, die du am Ende der 9. Klasse wissen musst.

Ich wünsche dir gute Fortschritte bei der Arbeit mit diesem Buch und viel Erfolg in der Mathematik!

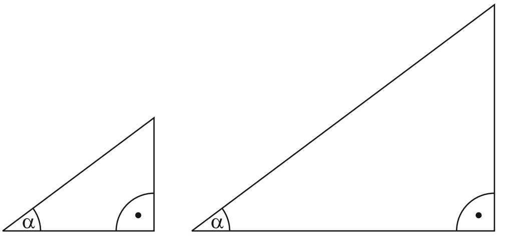
Monika Muthsam

Monika Muthsam

1 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

Bekannt ist bereits der Begriff der geometrischen Ähnlichkeit, mit dessen Hilfe Zusammenhänge zwischen Winkeln und Seitenlängen im Dreieck hergestellt werden können.
Während zwei Gegenstände umgangssprachlich als ähnlich bezeichnet werden, wenn sie ungefähr gleich aussehen, dürfen sich zwei geometrische Figuren dafür lediglich in ihrer Größe und Lage unterscheiden.

Speziell müssen alle Winkel und damit auch sämtliche Verhältnisse entsprechender Seitenlängen der ähnlichen Figuren übereinstimmen.
Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so sind sie aufgrund der Winkelsumme im Dreieck ähnlich, da sie auch im dritten Winkel übereinstimmen.
Es werden nun zwei rechtwinklige Dreiecke, die in einem weiteren Winkel (hier α) übereinstimmen, betrachtet. Da alle Dreiecke mit dieser Winkelkonstellation zueinander ähnlich sind, ist das Verhältnis der Seiten zueinander gleich groß und somit eindeutig festgelegt. Zu einem bestimmten Winkel α gehört ein bestimmtes Verhältnis.



Genauso lässt sich die Ähnlichkeit zweier Dreiecke auch an den gleichen Verhältnissen der entsprechenden Dreiecksseiten ablesen.

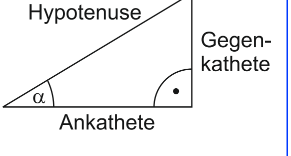
Definition

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

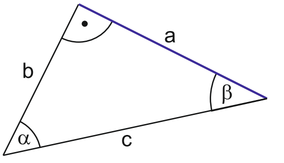
$\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ (sprich: „Sinus von α ist …“)

$\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ (sprich: „Kosinus von α ist …“)

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ (sprich: „Tangens von α ist …“)



Beachte, dass im rechtwinkligen Dreieck jede Kathete gleichzeitig An- und Gegenkathete ist – je nachdem, welcher Winkel betrachtet wird. So ist Seite a die Gegenkathete zu Winkel α und gleichzeitig die Ankathete zu Winkel β.



Da die Hypotenuse die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck ist, sind die Verhältnisse der Katheten zur Hypotenuse und damit auch Sinus und Kosinus immer kleiner als 1. Da Seitenlängen immer positiv sind, gilt dies auch für Sinus und Kosinus der Winkel im rechtwinkligen Dreieck.
Je kleiner der betrachtete Winkel ist, umso kleiner ist bei konstanter Hypotenuse auch die Gegen- bzw. Ankathete und damit auch der Sinus bzw. Kosinus.
Da der Tangens dem Verhältnis der beiden Katheten entspricht, ist dieser ebenfalls positiv, es gibt jedoch nach oben keine Einschränkung, sodass er alle Werte größer als null annehmen kann.

Für bestimmte Winkel können die exakten Sinus-, Kosinus- und Tangens-Werte bestimmt werden. Diese Werte solltest du auswendig können:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

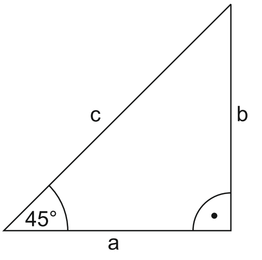
(Berechnung siehe Beispiel 1 und Aufgabe 31)

Bei der Berechnung für andere Winkel hilft der Taschenrechner. Ebenso ist die Ermittlung des zugehörigen Winkels α bei gegebenem Wert für z. B. $\sin\alpha$ Aufgabe des Taschenrechners (siehe Aufgabe 30).
Beachte bei der Verwendung des Taschenrechners, dass dieser unbedingt auf klassische Gradangaben eingestellt sein muss. Du erkennst dies bei den gängigen Modellen an einem kleinen „D" oder „DEG" im Display. Wird hier stattdessen ein „R", „RAD", „G" oder „GRA" angezeigt, muss der Modus unbedingt umgestellt werden. Hierbei hilft ein Blick in die Betriebsanleitung. „D" bzw. „DEG" stehen übrigens für „degree" (engl. Grad).

Beispiele

1. Bestimme den exakten Wert für $\sin 45°$, $\cos 45°$ und $\tan 45°$.

Lösung:
In einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c und $\alpha = 45°$ folgt mit dem Satz zur Winkelsumme im Dreieck: $\beta = 45°$



Das Dreieck ist somit gleichschenklig:
$a = b$ bzw. Gegenkathete = Ankathete
Schon an dieser Stelle wird klar, dass gelten muss: $\sin 45° = \cos 45°$

Zur exakten Berechnung muss der Satz des Pythagoras verwendet werden:
$c^2 = a^2 + b^2$ bzw.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

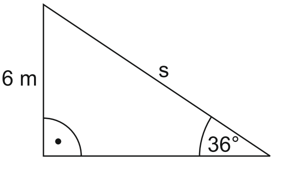
Im letzten Schritt wurde der Nenner rational gemacht.

$$\cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

2. Ein Hausdach soll neu eingedeckt werden. Der Giebel des Satteldaches befindet sich 6 m oberhalb der Dachrinnen. Die beiden rechteckigen Dachhälften haben jeweils eine Neigung von 36°.
Für welche Fläche müssen Dachziegel eingekauft werden, wenn das Dach 8 m lang ist?

Lösung:
Da das Dach rechteckig ist, gilt für den Flächeninhalt:
$A = 2 \cdot$ Länge des Daches $\cdot$ Länge der Dachschräge
Die Dachschräge s ermittelt man mithilfe von Höhe und Neigungswinkel.

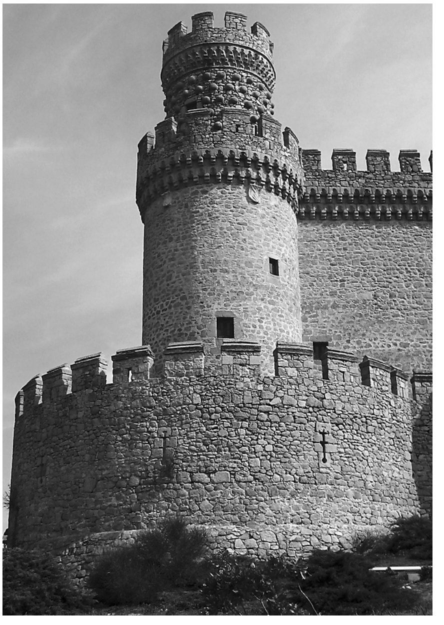


$$\sin 36° = \frac{h}{s}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{h}{\sin 36°} = \frac{6 \text{ m}}{\sin 36°} \approx 10{,}2 \text{ m}$$

$$A \approx 2 \cdot 8 \text{ m} \cdot 10{,}2 \text{ m} = 163{,}2 \text{ m}^2$$

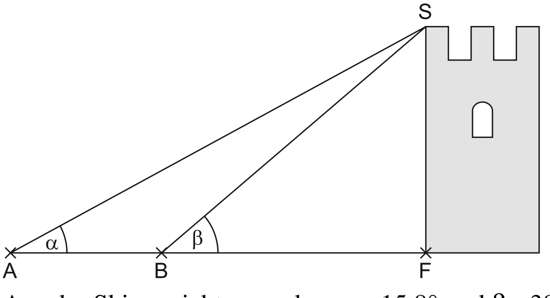
3. Um die Höhe eines Turmes zu bestimmen, steckt man in der Ebene eine horizontale Standlinie [AB] ab, wobei A, B und der Fußpunkt F des Turmes auf einer Geraden liegen. Nun wird von A und B aus jeweils der Höhenwinkel zur Turmspitze S gemessen, d. h. der Winkel zwischen dem Boden und der Verbindung zwischen A (bzw. B) und S.



   a) Fertige eine Skizze an.
   b) Wie hoch ist der Turm und wie weit ist sein Fußpunkt von B entfernt, wenn $\overline{AB} = 100$ m beträgt und die zwei Winkel 15,8° und 38,1° groß sind?

Lösung:

a)



b) Aus der Skizze sieht man, dass $\alpha = 15{,}8°$ und $\beta = 38{,}1°$ gelten muss. Die gesuchten Größen können nicht direkt bestimmt werden. Aber mithilfe der beiden Winkel und der Standlinie [AB] können für die gesuchten Größen zwei Gleichungen aufgestellt werden:

(I) $\tan\beta = \dfrac{\overline{SF}}{\overline{BF}}$

(II) $\tan\alpha = \dfrac{\overline{SF}}{\overline{AB} + \overline{BF}}$

Das Gleichungssystem mit zwei Unbekannten kann man auf verschiedene Arten lösen: Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren oder Additionsverfahren.

Während die dritte Möglichkeit in diesem Fall nicht zu empfehlen ist, lässt sich durch Auflösen beider Gleichungen nach $\overline{SF}$ und anschließendem Gleichsetzen der Abstand von B zu F schnell ermitteln:

(I') $\overline{SF} = \overline{BF} \cdot \tan\beta$

(II') $\overline{SF} = (\overline{AB} + \overline{BF}) \cdot \tan\alpha$

$$\begin{aligned} \text{(I')} = \text{(II')} \quad \overline{BF} \cdot \tan\beta &= (\overline{AB} + \overline{BF}) \cdot \tan\alpha && \text{ausmultiplizieren} \\ \overline{BF} \cdot \tan\beta &= \overline{AB} \cdot \tan\alpha + \overline{BF} \cdot \tan\alpha && \left| -\overline{BF} \cdot \tan\alpha \right. \\ \overline{BF} \cdot \tan\beta - \overline{BF} \cdot \tan\alpha &= \overline{AB} \cdot \tan\alpha && \overline{BF} \text{ ausklammern} \\ \overline{BF} \cdot (\tan\beta - \tan\alpha) &= \overline{AB} \cdot \tan\alpha && \left| :(\tan\beta - \tan\alpha) \right. \end{aligned}$$

$$\overline{BF} = \frac{\overline{AB} \cdot \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} = \frac{100\text{ m} \cdot \tan 15{,}8°}{\tan 38{,}1° - \tan 15{,}8°} \approx 56{,}5\text{ m}$$

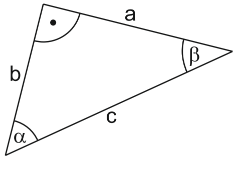
Mithilfe des rechtwinkligen Dreiecks BFS oder direkt durch Verwendung von (I') lässt sich nun auch die Turmhöhe einfach ermitteln:

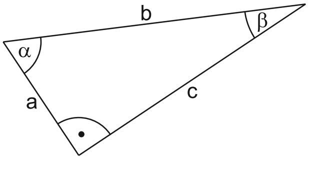
$\overline{SF} = \overline{BF} \cdot \tan\beta = 56{,}5\text{ m} \cdot \tan 38{,}1° \approx 44{,}3\text{ m}$

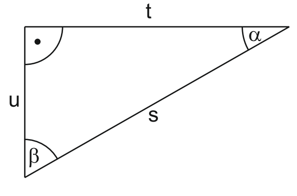
Der Turm ist 44,3 m hoch und sein Fußpunkt ist 56,5 m von B entfernt.

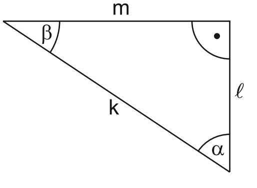
Aufgaben

28. Gib bei den folgenden Dreiecken $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ und $\tan\beta$ in der Form $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ an.

a) 

b) 

c) 

d) 

29. Berechne mit dem Taschenrechner die Werte auf zwei Dezimalen genau.

a) $\sin 26°$ b) $\cos 12°$

c) $\tan 36°$ d) $\sin 69°$

e) $\cos 73°$ f) $\tan 80°$

30. Berechne mit dem Taschenrechner die Werte der Winkel auf zwei Dezimalen genau.

a) $\sin\alpha = 0{,}34$
b) $\cos\alpha = 0{,}67$
c) $\tan\alpha = 2{,}34$
d) $\cos\alpha = 0{,}37$
e) $\tan\alpha = 0{,}67$
f) $\sin\alpha = 1{,}45$

31. Bestimme jeweils den exakten Wert, ohne den Taschenrechner zu verwenden.

a) $\sin 60°$, $\cos 60°$, $\tan 60°$
b) $\sin 30°$, $\cos 30°$, $\tan 30°$
c) Vergleiche die Werte von $\sin 30°$ und $\sin 60°$. Die Werte der Winkel werden verdoppelt.
Was geschieht mit den Werten vom Sinus der Winkel?

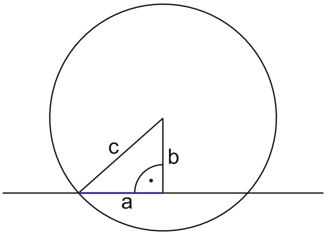
32. Ein spitzer Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck wird vergrößert.
Wie ändert sich

a) sein Sinuswert, wenn
 i) die Hypotenuse gleichbleibt?
 ii) die Gegenkathete gleichbleibt?
b) sein Kosinuswert, wenn
 i) die Hypotenuse gleichbleibt?
 ii) die Ankathete gleichbleibt?
c) sein Tangenswert, wenn
 i) die Gegenkathete gleichbleibt?
 ii) die Ankathete gleichbleibt?

Aufgaben für den Sinus

33. Ein Radfahrer fährt auf einen Berg. Auf einer 3 km langen geraden Strecke mit gleichmäßiger Steigung gewinnt er 500 m an Höhe.
Wie groß ist der Steigungswinkel der Strecke?

2. Möglichkeit:
Bei der zweiten Möglichkeit wird der Satz des Pythagoras verwendet. Die Hypotenuse c entspricht dem halben Balldurchmesser, die Kathete b dem nicht eingesunkenen Teil des Balles abzüglich des halben Balldurchmessers. Die Kathete a ist der benötigte Kreisradius.



Es gilt:

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(9\ \text{cm})^2 - (4{,}5\ \text{cm})^2} = \sqrt{60{,}75} \approx 7{,}8\ \text{cm}$

Der Umfang $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ des Kreises, den die Wasseroberfläche mit dem Ball bildet, beträgt daher etwa **49 cm**.

28. a) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\tan\alpha = \frac{a}{b}$,

$\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\tan\beta = \frac{b}{a}$

b) $\sin\alpha = \frac{c}{b}$, $\cos\alpha = \frac{a}{b}$, $\tan\alpha = \frac{c}{a}$,

$\sin\beta = \frac{a}{b}$, $\cos\beta = \frac{c}{b}$, $\tan\beta = \frac{a}{c}$

c) $\sin\alpha = \frac{u}{s}$, $\cos\alpha = \frac{t}{s}$, $\tan\alpha = \frac{u}{t}$,

$\sin\beta = \frac{t}{s}$, $\cos\beta = \frac{u}{s}$, $\tan\beta = \frac{t}{u}$

d) $\sin\alpha = \frac{m}{k}$, $\cos\alpha = \frac{\ell}{k}$, $\tan\alpha = \frac{m}{\ell}$,

$\sin\beta = \frac{\ell}{k}$, $\cos\beta = \frac{m}{k}$, $\tan\beta = \frac{\ell}{m}$

Hinweise und Tipps:
Suche in dem Dreieck die Hypotenuse und die zum Winkel gehörende An- bzw. Gegenkathete.

29. a) $\sin 26° \approx$ **0,44**

b) $\cos 12° \approx$ **0,98**

c) $\tan 36° \approx$ **0,73**

d) $\sin 69° \approx$ **0,93**

e) $\cos 73° \approx$ **0,29**

f) $\tan 80° \approx$ **5,67**

Hinweise und Tipps:
Durch Betätigen der entsprechenden Taschenrechnertaste und korrektes Runden erhält man den gesuchten Wert. Achte darauf, dass der Taschenrechner im Modus „Degree“ ist.

30. Die Taste „sin“ liefert für einen Winkel das zugehörige Verhältnis aus Gegenkathete und Hypotenuse. Bei dieser Aufgabe ist dieses Verhältnis jedoch vorgegeben und der zugehörige Winkel wird gesucht. Diese „Umkehraufgabe“ bearbeitet der Taschenrechner mit „$\sin^{-1}$“ gefolgt vom vorgegebenen Seitenverhältnis. In aller Regel wird „$\sin^{-1}$“ durch die Tastenkombination „SHIFT“ „sin“ aufgerufen.

a) $\alpha = \sin^{-1} 0{,}34 \approx 19{,}88°$

b) $\alpha = \cos^{-1} 0{,}67 \approx 47{,}93°$

c) $\alpha = \tan^{-1} 2{,}34 \approx 66{,}86°$

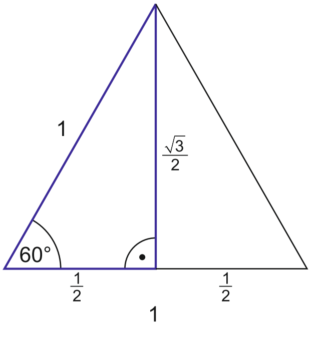
d) $\alpha = \cos^{-1} 0{,}37 \approx 68{,}28°$

e) $\alpha = \tan^{-1} 0{,}67 \approx 33{,}82°$

f) geht nicht, da der Sinus nur für Werte kleiner 1 definiert ist.

Hinweise und Tipps:
Achte darauf, dass der Taschenrechner im Modus „Degree“ ist.

31. a) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Innenwinkel 60° groß. Da es nur auf das Verhältnis der Seiten ankommt, kann man als Seitenlänge 1 annehmen. Man zeichnet eine Höhe ein, um zwei rechtwinklige Dreiecke zu erhalten. Da die Höhe der Grundseite halbiert wird, entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenusenlänge 1 und einer bekannten Kathetenlänge $\frac{1}{2}$.



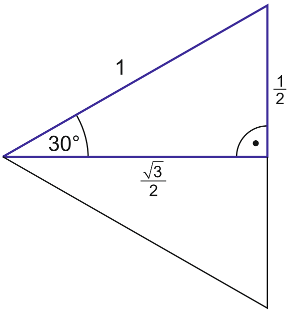
Mithilfe des Satzes von Pythagoras kann die Höhe des ursprünglichen Dreiecks bestimmt werden, die gleichzeitig die benötigte zweite Kathete in dem rechtwinkligen Dreieck darstellt.

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hiermit können nun die gesuchten Verhältnisse ermittelt werden:

$$\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

b) In einem gleichseitigen Dreieck halbiert jede Höhe nicht nur ihre Grundseite, sondern auch den gegenüberliegenden Innenwinkel. So erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit einem 30°-Winkel und bekannten Seiten (siehe Teilaufgabe a).



Für die gesuchten Verhältnisse folgt somit:

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

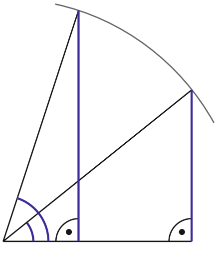
$$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Eine Verdopplung des Winkels α führt nicht zu einer Verdopplung von $\sin\alpha$!

$\sin(2 \cdot \alpha) \neq 2 \cdot \sin\alpha$

32. a) i) Bei gleichbleibender Hypotenuse wird die Gegenkathete größer, der Sinuswert wird also auch größer.



Hinweise und Tipps:
Mit der Formulierung „ein spitzer Winkel“ ist eindeutig festgelegt, dass nicht der rechte Winkel des Dreiecks verändert wird, da nur Winkel kleiner als 90° als spitze Winkel bezeichnet werden.

ii) Wird dagegen die Länge der Gegenkathete beibehalten, so müssen sowohl Ankathete als auch Hypotenuse verkleinert werden, um den betrachteten Winkel zu vergrößern.
Auch in diesem Fall vergrößert sich also das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse und damit der Sinus des Winkels.