

2020

Berufskolleg

Prüfung zum
Fachhochschulreife

Baden-Württemberg

**MEHR
ERFAHREN**

Mathematik

+ Online-Glossar



STARK

Inhalt

Vorwort	
Stichwortverzeichnis	

Allgemeine Hinweise zur Prüfung

Informationen zur Fachhochschulreifeprüfung	I
Bewertung der Prüfungsarbeiten	II
Inhalte und Schwerpunktthemen	III
Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung	V

Merkhilfe Mathematik*

1 Zahlenmengen	M-1
2 Geometrie	M-1
3 Terme	M-2
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen	M-2
5 Analysis	M-6

Übungsaufgaben für den Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

Übungsaufgabe 1	Ü-1
Übungsaufgabe 2	Ü-7
Übungsaufgabe 3	Ü-15
Übungsaufgabe 4	Ü-22

Übungsaufgaben für den Wahlteil (mit Hilfsmitteln)

Übungsaufgabe 1	Ü-29
Übungsaufgabe 2	Ü-35
Übungsaufgabe 3	Ü-41
Übungsaufgabe 4	Ü-49

* Die Abschnitte 6 bis 8 der „Merkhilfe Mathematik für die Sekundarstufe II an beruflichen Schulen in Baden-Württemberg“ sind in diesem Band nicht enthalten, da sie für die schriftliche Fachhochschulreifeprüfung nicht relevant sind.

Offizielle Musteraufgaben zur neuen Prüfungsstruktur ab 2018

Pflichtteil: Aufgabe 1 (Beispiel A)	1
Pflichtteil: Aufgabe 1 (Beispiel B)	7
Wahlteil: Aufgabe 2	13
Wahlteil: Aufgabe 3	18
Wahlteil: Aufgabe 4	25

Prüfungsaufgaben 2018

Pflichtteil: Aufgabe 1	2018-1
Wahlteil: Aufgabe 2	2018-6
Wahlteil: Aufgabe 3	2018-12
Wahlteil: Aufgabe 4	2018-19

Prüfungsaufgaben 2019

Pflichtteil: Aufgabe 1	2019-1
Wahlteil: Aufgabe 2	2019-8
Wahlteil: Aufgabe 3	2019-15
Wahlteil: Aufgabe 4	2019-21



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Prüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren der Übungsaufgaben und Lösungen der Musteraufgaben:

Volker Huy
Klaus Specht

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch unterstützt Sie optimal bei Ihrer Vorbereitung auf die **Prüfung der Fachhochschulreife an Berufskollegs** im Fach Mathematik, die seit dem Jahr 2018 eine neue Struktur hat.

Sie finden in diesem Band die Abschlussprüfungsaufgaben der **Jahrgänge 2018 und 2019** sowie **Übungsaufgaben**, die diese Struktur mit Pflichtteil (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) und Wahlteil (Bearbeitung mit Hilfsmitteln) widerspiegeln. Außerdem wurden die offiziellen Musteraufgaben zur Vorbereitung auf die Prüfung 2018 in diesen Band aufgenommen. Alle Aufgaben wurden mit **vollständigen, kommentierten Lösungsvorschlägen** versehen. Weiter finden Sie bei allen Aufgaben zusätzliche „**Hinweise und Tipps**“ zu jedem Aufgabenteil, die zwischen den Aufgaben und Lösungen stehen. Diese „Hinweise und Tipps“ liefern Denkanstöße zur Lösung, sie sind durch eine graue Raute markiert und nach zunehmendem Grad der Hilfestellung geordnet.

Im **Hinweisteil** erhalten Sie detaillierte Informationen über den Ablauf der Prüfung, die Prüfungsinhalte und die Bewertung der Prüfung. Hinweise zur Prüfungsvorbereitung und Tipps zur richtigen Strategie in der Prüfung helfen Ihnen, Ihre Zeit optimal zu nutzen. Eine Beschreibung zur Arbeit mit einem Lösungsplan gibt Ihnen die Möglichkeit, systematisches Vorgehen einzuüben und so Sicherheit für die Prüfungssituation zu gewinnen.

Das **Stichwortverzeichnis** ermöglicht es Ihnen zudem, wichtige Fachbegriffe und die dazugehörigen Aufgabenstellungen schnell zu finden, sodass Sie einzelne Themen gezielt üben und bearbeiten können.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Fachhochschulreifeprüfung 2020 vom baden-württembergischen Ministerium für Kultus, Jugend und Sport bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter: www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung auf die Fachhochschulreifeprüfung!

Die Autoren

Allgemeine Hinweise zur Prüfung

Informationen zur Fachhochschulreifeprüfung

Wer einen mittleren Bildungsabschluss hat, erhält in 1 bis 3 Jahren im Berufskolleg eine berufliche Ausbildung und eine erweiterte allgemeine Bildung. Um einen einheitlichen Wissensstand der allgemeinbildenden Fächer zu gewährleisten, werden seit 2011 an allen Berufskollegs, die zur Fachhochschulreife führen, dieselben Prüfungen in den Fächern Deutsch, Englisch und **Mathematik** durchgeführt. Da die Rechenkompetenz der Schüler von vielen Seiten bemängelt wurde, hat man versucht, diese Mängel im neuen Lehrplan und in der Prüfung zu berücksichtigen. Mit der Fachhochschulreife-Prüfung 2018 haben sich Inhalt und Struktur der Aufgaben im Fach Mathematik grundlegend geändert. Die Prüfung wird unterteilt in einen Pflichtteil und einen Wahlteil. Zusätzlich wird der bis zur Prüfung 2017 generell zugelassene grafikfähige Taschenrechner durch einen weniger leistungsfähigen Taschenrechner (WTR) ersetzt. Die Durchführung und der Ablauf der Prüfung werden im nächsten Abschnitt dargestellt.

Die schriftliche Prüfung im Fach Mathematik

Das zentrale Thema der schriftlichen Prüfung im Fach Mathematik ist die **Analysis**. Die Prüfung ist in einen Pflichtteil (ohne Hilfsmittel, d. h. ohne Merkhilfe und ohne wissenschaftlichen Taschenrechner) und einen Wahlteil aufgeteilt. Der Pflichtteil ist für alle Schülerinnen und Schüler verpflichtend, wobei die Arbeitszeit innerhalb der insgesamt zur Verfügung stehenden 200 Minuten frei gewählt werden kann. Er enthält mehrere „kleinere“ Aufgaben aus der Analysis oder ein lineares Gleichungssystem. Nachdem der Pflichtteil verbindlich abgegeben wurde, erhält die Schülerin bzw. der Schüler als Hilfsmittel einen WTR und die Merkhilfe zur Bearbeitung der Aufgaben im Wahlteil. *Wichtig:* Aus dem Pflichtteil darf nun keine Aufgabe mehr gelöst werden!

Die Aufgaben (im Pflicht- und im Wahlteil) umfassen folgende Funktionstypen und Themengebiete:

- ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen
- trigonometrische Funktionen
- lineare Gleichungssysteme
- Lösen von Gleichungen

Aus den drei Aufgaben für den Wahlteil wählt die Schülerin bzw. der Schüler zwei Aufgaben zur Bearbeitung aus.

Damit der Schüler „in Ruhe“ selbstständig eine Auswahl vornehmen kann, ist eine Einlesezeit von 20 Minuten in der Prüfungszeit vorgesehen. Der Schüler darf diese Einlesezeit jedoch auch als Rechenzeit z. B. im Pflichtteil nutzen. Für jede Aufgabe sollte ein neues Blatt begonnen und vor der Abgabe entsprechend sortiert werden. Die Punkte sind so verteilt, dass pro 2 Minuten Bearbeitungszeit 1 Punkt vergeben wird. Der Schüler kann sich anhand der bereits bearbeiteten Aufgaben ausrechnen, ob er noch gut in der Zeit liegt. Die in der Tabelle (siehe unten) angegebenen Zeitrichtwerte sind daher nur als Empfehlung zu verstehen. Eine Pause zwischen den Aufgaben findet nicht statt.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Der Pflichtteil muss komplett bearbeitet werden. Von den drei Aufgaben des Wahlteils müssen zwei ausgewählt und bearbeitet werden.

Aufgabe	Stoffgebiet	Schüler erhält	Erreichbare Punkte	Zeitrichtlinie (Minuten)
Pflichtteil (mit Einlesezeit zur Aufgabenauswahl)				20
1	Analysis	diese Aufgabe	30	60
Wahlteil				
2	Analysis	diese Aufgabe	30	60
3	Analysis	diese Aufgabe	30	60
4	Analysis	diese Aufgabe	30	60
Vom Schüler sind der Pflichtteil und zwei der drei Aufgaben aus dem Wahlteil zu bearbeiten.			90	200

Zugelassene Hilfsmittel

Neben Schreib- und Zeichengeräten ist ausschließlich im Wahlteil zusätzlich erlaubt:

- die Merkhilfe
- ein Taschenrechner (WTR) inkl. Bedienungsanleitung

Ein GTR- oder ein CAS-Rechner ist weder im Pflicht- noch im Wahlteil erlaubt.

Bewertung der Prüfungsarbeiten

Die Korrektur einer Prüfungsarbeit erfolgt in drei Stufen.

Erstkorrektur: Sie wird grundsätzlich vom Fachlehrer, der die Schüler unterrichtet hat, durchgeführt. Er korrigiert und bewertet die Arbeiten.

Zweitkorrektur: Ein weiterer Fachlehrer korrigiert und bewertet die Arbeiten ebenfalls, ohne aber die Punkteverteilung des Erstkorrektors zu kennen.

Notenfindung: Bei Abweichungen von Erst- und Zweitkorrektur einigen sich die beiden Fachlehrer auf eine Note. Ist der Unterschied nur eine halbe Note, so ist die bessere Note die Prüfungsnote.

Der Schüler bearbeitet drei Aufgaben (Pflichtteil und zwei Aufgaben aus dem Wahlteil). Bei jeder Aufgabe sind maximal 30 Punkte zu erreichen. Die Umrechnung der Punkte in Notenstufen wird nach folgendem verbindlichen Schlüssel vorgenommen:

Note	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
Punkte	90–83	82–75	74–67	66–59	58–51	50–42	41–33	32–24	23–15	14–6	5–0

Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen für die schriftliche Fachhochschulreifeprüfung stichpunktartig aufgeführt. Diese Auflistung gibt einen Überblick über den prüfungsrelevanten Lehrstoff, ersetzt jedoch nicht den ausführlichen Lehrplan für das Fach Mathematik. Die Zusammenstellung kann jedoch bei der Vorbereitung auf die Fachhochschulreifeprüfung als Leitfaden für die verbindlichen Inhalte und wichtigsten mathematischen Begriffe dienen.

Funktionen und ihre Schaubilder, zugehörige Gleichungen

Funktionstypen

- Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
- Polynomfunktionen
- Exponentialfunktionen $f(x) = ae^{kx} + b$
- Trigonometrische Funktionen $f(x) = a \sin(kx) + b$, $g(x) = a \cos(kx) + b$

Schaubild von Funktionen

- globales Verhalten
- gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen
- gemeinsame Punkte mit anderen Schaubildern
- Symmetrie zum Ursprung bzw. zur y-Achse
- Verschiebung und Streckung in x- und y-Richtung
- asymptotisches Verhalten
- Periodizität
- durchschnittliche und momentane Änderungsrate

Lösen von Gleichungen

- näherungsweise: grafisch, experimentell, iterativ
- exakt: Äquivalenzumformungen, Lösungsformel, Faktorisieren, Substitution

Lineare Gleichungssysteme

- Lösungsverfahren
- Lösungsvielfalt von linearen Gleichungssystemen

Differenzial- und Integralrechnung

Funktionstypen

- Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
- Polynomfunktionen
- Exponentialfunktionen $f(x) = ae^{kx} + b$
- Trigonometrische Funktionen $f(x) = a \sin(kx) + b$, $g(x) = a \cos(kx) + b$

Fachhochschulreife Mathematik (Berufskolleg Baden-Württemberg)
Hauptprüfung 2019 – Pflichtteil (Teil 1): Aufgabe 1

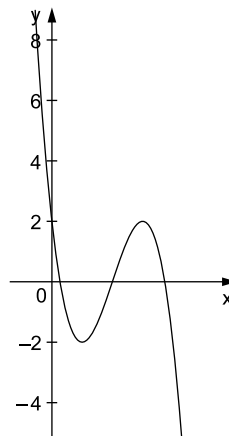
Punkte

1.1 Lösen Sie die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 16 = -1$.

5

1.2 Gegeben ist das Schaubild einer Polynomfunktion f dritten Grades. Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Das Schaubild der ersten Ableitungsfunktion von f ist eine nach unten geöffnete Parabel.
- Das Schaubild einer neuen Funktion $f_{\text{neu}}(x) = f(x) + 1$ schneidet die x -Achse genau zweimal.
- Das Schaubild einer Stammfunktion von f besitzt genau einen Wendepunkt.



6

1.3 Gegeben ist eine Funktion g mit $g(x) = x^3 - 2x^2 + 16$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 2$.

4

1.4 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{4 \cdot \ln(2)} e^{0,25x} dx$.

4

1.5 Die Funktion k ist gegeben durch $k(x) = 2e^{-x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild heißt K .

Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an.

Skizzieren Sie K .

In welchem Quadranten schließt K mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein?

5

1.6 Eine Polynomfunktion p vom Grad 4 soll dieselben Nullstellen haben wie die Funktion h mit $h(x) = 3\sin(\pi x)$, $x \in [0; 3]$.

Weiterhin hat p an der Stelle $x = \frac{3}{2}$ den Funktionswert 3.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p .

6

30

Tipps und Hinweise

Aufgabenteil 1.1

Lösen der biquadratischen Gleichung

- ▣ Beachten Sie: In dieser Gleichung 4. Grades kommen nur gerade Exponenten vor. Welche Operation führt daher zum Ziel?
- ▣ Ersetzen Sie x^2 durch u . Somit ist $x^4 = \dots$?
- ▣ Lösen Sie die entstandene Gleichung $u^2 + 2u \dots = -1$ nach u auf.
- ▣ Bestimmen Sie mithilfe der Rücksubstitution die beiden Lösungen für x .

Aufgabenteil 1.2

Aussage a

- ▣ Markieren Sie die prägnanten Punkte (HP, TP, WP) des Schaubildes von f .
- ▣ Skizzieren Sie das Schaubild der Ableitungsfunktion. Beachten Sie:
Ein Extrempunkt im Schaubild von f wird zu im Schaubild von f' .
Ein Wendepunkt im Schaubild von f wird zu im Schaubild von f' .

Aussage b

- ▣ Wie entsteht das Schaubild von f_{neu} aus dem Schaubild von f ?
- ▣ Wo liegt somit der Tiefpunkt des Schaubildes von f_{neu} ?
- ▣ Wie oft schneidet das verschobene Schaubild die x -Achse?

Aussage c

- ▣ Wenden Sie die NEW-Regeln an.
- ▣ Beachten Sie: Das Schaubild von f hat zwei Extrempunkte. Was können Sie damit für die Anzahl der Wendepunkte des Schaubildes von F schließen?

Aufgabenteil 1.3

Tangentengleichung

- ▣ Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B . Beachten Sie: $B(2 | g(2))$
- ▣ Bestimmen Sie die Steigung der Tangente in B .
- ▣ Benutzen Sie die **Punkt-Steigungs-Form** oder die **Hauptform** einer Geradengleichung.

Aufgabenteil 1.4

Berechnung des Integrals

- ▣ Beachten Sie: $\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Lösung

1.1 Lösen der biquadratischen Gleichung

Substitution: In der Gleichung wird x^2 durch u ersetzt. Somit ist:

$$x^4 = (\underbrace{x^2}_{=u})^2 = u^2$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \underbrace{x^4}_{=u^2} + 2\underbrace{x^2}_{=u} - 16 &= -1 \quad | +1 \\ u^2 + 2u - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Mit der p-q-Formel ergibt sich:

$$u_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+15} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_2 = -5 \end{cases}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{cases} u_1 = 3 = x^2 & \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3} \\ u_2 = -5 = x^2 & \Rightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{-5} \text{ keine Lösung} \end{cases}$$

Die Lösungen der Gleichung sind:

$$\underline{\underline{x_1 = \sqrt{3}; \quad x_2 = -\sqrt{3}}}$$

1.2 a) Die Aussage ist wahr.

Begründung: In den Extrempunkten (H, T) von K_f ist die Steigung der Tangenten 0. $\Rightarrow$ Nullstellen von $K_{f'}$.

Im Wendepunkt von K_f ist die Steigung der Tangente maximal. $\Rightarrow$ Hochpunkt von $K_{f'}$.

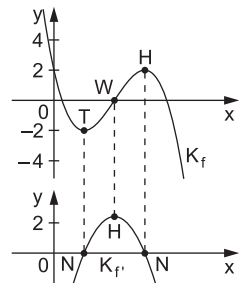
Alternative Begründung: f ist eine Funktion dritten Grades. Das Schaubild von f verläuft vom 2. in den 4. Quadranten. Somit gilt:

$$f(x) = \underbrace{a}_{<0} x^3 + bx^2 + cx + d$$

Für die Ableitungsfunktion von f gilt also:

$$f'(x) = \underbrace{3a}_{<0} x^2 + 2bx + c$$

Das Schaubild der Ableitungsfunktion ist daher (vor dem x^2 steht eine negative Zahl) eine nach unten geöffnete Parabel 2. Ordnung.



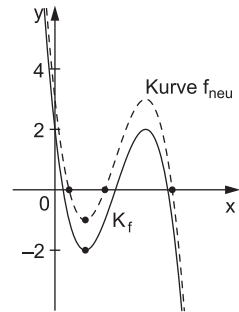
b) Die Aussage ist falsch.

Begründung: K_f ist das Schaubild von f . Dieses wird um eine LE in y -Richtung (nach oben) verschoben.

K_f hat den Tiefpunkt $T(x_T | -2)$.

Das Schaubild der Funktion f_{neu} hat somit den Tiefpunkt $T_{\text{neu}}(x_T | -1)$.

Somit schneidet das Schaubild von f_{neu} die x -Achse dreimal.



c) Die Aussage ist falsch.

Begründung: Das Schaubild von f hat genau 2 Extrempunkte.

NEW-Regel:

Kurve von F:	N	E	W		
Kurve von f:		N	E	W	
Kurve von f':			N	E	W

Somit hat das Schaubild jeder Stammfunktion von f genau 2 Wendepunkte.

1.3 Tangentengleichung

Funktion: $g(x) = x^3 - 2x^2 + 16$

Erste Ableitung: $g'(x) = 3x^2 - 4x$

Berührungspunkt B: $g(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 16 = 16 \Rightarrow B(\underbrace{2}_{x_B} | \underbrace{16}_{y_B})$

Steigung m der Tangente: $g'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 = m$

1. Möglichkeit: Punkt-Steigungs-Form

$$y = m \cdot (x - x_B) + y_B$$

$$t: y = 4 \cdot (x - 2) + 16$$

2. Möglichkeit: Hauptform

$y = m \cdot x + b$; mit $m = 4$ folgt:

$$y = 4x + b$$

Punktprobe mit $B(2 | 16)$ ergibt: $16 = 4 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 8$

$$t: y = 4x + 8$$

1.4 Berechnung des Integrals

$$\begin{aligned} \int_0^{4 \ln(2)} e^{0,25x} dx &= \left[\frac{1}{0,25} e^{0,25x} \right]_0^{4 \ln(2)} = \left[4e^{0,25x} \right]_0^{4 \ln(2)} = 4e^{0,25 \cdot 4 \ln(2)} - \underbrace{4e^0}_{=1} \\ &= 4 \underbrace{e^{\ln(2)}}_{=2} - 4 = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK