2020

LehrplanPLUS

FOS · BOS 13

Abitur-Prüfu

mit Lösunge

MEHR ERFAHREN

Bayern

Mathematik Te

+ *Aufgaben im Stil de*

STARK

Inhaltsverzeichnis

Übungsaufgaben zur Stochastik

Musterprüfungen zum Abitur ab 2020

Original-Fachabituraufgaben Stochastik

Digitales Übungsmaterial zu diesem Buch

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein **kostenloses Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen im Abitur 2020 vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Autoren

Lösungen zu den Original-Abituraufgaben (Technik):
OStR Winfried Stark (ab 2016), StD Harald Krauß (bis 2015)

Lösungen zu den Original-Fachabituraufgaben (Nichttechnik):
StD Georg Ott und StD Friedrich Schmidt

Musterprüfungen:
Analysis: OStR Winfried Stark, Stochastik: StD Friedrich Schmidt, StD Georg Ott

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie haben zwei lehrreiche Jahre an der BOS oder an der FOS ein zusätzliches 13. Schuljahr absolviert und werden eine schriftliche Prüfung im Fach Mathematik ablegen.

Ab 2020 ändern sich die Struktur und die Inhalte der Prüfung. Die bisherigen Abiturprüfungen (Technik) eignen sich daher nur noch teilweise zur Prüfungsvorbereitung. Zur Einübung der Prüfungsinhalte enthält dieses Buch daher einen **Übungsteil mit relevanten offiziellen schriftlichen Prüfungsaufgaben** der letzten Jahre. Da sich aufgrund der Lehrplananpassung in der Stochastik auch die Fachabituraufgaben der nichttechnischen Ausbildungsrichtungen gut zur Prüfungsvorbereitung eignen, sind diese ebenfalls im Übungsteil abgedruckt.

Um Ihnen einen Eindruck von der Struktur und dem Umfang der Prüfung zu geben, enthält das Buch zudem zwei **Musterprüfungen** im Stil der neuen Abiturprüfung.

Die am Ende des Buchs abgedruckten Original-Aufgaben zur **Stochastik** aus dem **Fachabitur** 2019 (Nichttechnik) könnten aufgrund der Lehrplananpassung genau so auch in der Abiturprüfung (Technik) ab 2020 gestellt werden und bieten Ihnen daher eine weitere Übungsmöglichkeit.

Zu jeder Aufgabe folgen **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie zusätzliche **Lösungshinweise**, die Ihnen das eigenständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Die angeführten Lösungen sind dabei als **möglicher, aber keineswegs einziger Weg** zum Erreichen des Ergebnisses zu sehen.

Das Ziel der Arbeit mit dem Buch besteht darin, dass Sie die Problemstellungen weitgehend selbstständig bearbeiten können und die beschriebenen Lösungswege nur noch zur Kontrolle Ihrer eigenen Ergebnisse nutzen. Wenn Sie dieses Ziel erreicht haben, sind Sie gut auf die bevorstehende Prüfung vorbereitet.

Darüber hinaus können Sie dieses Buch **unterrichtsbegleitend** bei der systematischen Vorbereitung auf Schulaufgaben einsetzen, da Ihr Fachlehrer oder Ihre Fachlehrerin hier auch immer die Abiturprüfung im Blick haben wird.

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen für Ihre Prüfungen viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Abitur

1 Aufgabe der Beruflichen Oberschule

In der Beruflichen Oberschule sind die Fachoberschule (FOS) und die Berufsoberschule (BOS) zusammengefasst.

Ziel der Berufsoberschule (BOS) ist es, Schülerinnen und Schüler mit einem mittleren Schulabschluss und einer Berufsausbildung innerhalb von zwei Schuljahren (Jahrgangsstufen 12 und 13) in den Ausbildungsrichtungen Technik; Wirtschaft und Verwaltung; Sozialwesen; Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie; Gesundheit (Schulversuch) bzw. Internationale Wirtschaft (Schulversuch) zur fachgebundenen Hochschulreife (nur Englisch als Fremdsprache) oder auch zur allgemeinen Hochschulreife (mit einer zweiten Fremdsprache) zu führen. Die Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule können nach der 12. Jahrgangsstufe an der Fachabiturprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife teilnehmen und mit diesem Abschluss die Schule verlassen. Dies wurde durch eine Abstimmung der Lehrpläne und Stundentafeln für die Fachoberschule (11. und 12. Jahrgangsstufe) und die Berufsoberschule ermöglicht.

Ziel der Fachoberschule (FOS) ist es, Schülerinnen und Schüler mit einem mittleren Schulabschluss innerhalb von zwei Schuljahren (Jahrgangsstufen 11 und 12) in den Ausbildungsrichtungen Technik; Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie; Wirtschaft und Verwaltung; Sozialwesen; Gestaltung; Gesundheit (Schulversuch) bzw. Internationale Wirtschaft (Schulversuch) zur Fachhochschulreife zu führen. Im Anschluss daran können Schülerinnen und Schüler, die im Zeugnis der Fachhochschulreife einen bestimmten Notendurchschnitt erreicht haben, die 13. Jahrgangsstufe der Fachoberschule besuchen. Stundentafeln, Lehrpläne, Abiturprüfungen und die möglichen Abschlüsse (fachgebundene bzw. allgemeine Hochschulreife) stimmen mit denen der Berufsoberschule überein.

2 Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik

2.1 Aufbau und Auswahl der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben werden einheitlich vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus gestellt. Die Prüfungsstruktur ist identisch mit der der Fachabiturprüfung am Ende der 12. Jahrgangsstufe. Die Prüfung ist in zwei Teile gegliedert:

- Teil 1: Die Bearbeitung erfolgt ohne Verwendung von Hilfsmitteln.
  Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Teil 2: Die Bearbeitung erfolgt unter Verwendung von Hilfsmitteln (siehe Abschnitt 2.3). Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Zwischen den beiden Prüfungsteilen ist eine Pause von 30 Minuten.

Jeder Teil setzt sich aus den beiden Aufgabengruppen A (Analysis) und S (Stochastik) zusammen.

In Teil 2 gibt es für jede Aufgabengruppe zwei Varianten (AI und AII bzw. SI und SII). Die Auswahl jeweils einer Variante trifft die Schule; die Schülerinnen und Schüler haben keine Wahlmöglichkeit.

In Teil 1 wird zentral nur eine Variante gestellt.[1]

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit mit abzugeben.

Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen dürfen nur auf Papier, das den Stempel der Schule trägt, angefertigt werden.

2.2 Bewertung der Prüfungsaufgaben

Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten (BE) angegeben.
Es sind maximal 100 BE zu erreichen. Diese werden wie folgt verteilt:

	Aufgaben-gruppe	Bewertungs-einheiten
Teil 1	A	22 BE
	S	12 BE
Teil 2	A	43 BE
	S	23 BE

1 Teil 1 des Musterprüfungssatzes in diesem Buch besteht dennoch aus zwei Varianten pro Aufgabengruppe, um Ihnen zwei vollständige Prüfungen zum Üben zur Verfügung zu stellen.

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungseinheiten	100 ⋮ 96	95 ⋮ 91	90 ⋮ 86	85 ⋮ 81	80 ⋮ 76	75 ⋮ 71	70 ⋮ 66	65 ⋮ 61	60 ⋮ 56	55 ⋮ 51	50 ⋮ 46	45 ⋮ 41	40 ⋮ 34	33 ⋮ 27	26 ⋮ 20	19 ⋮ 0

2.3 Zugelassene Hilfsmittel

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Technik für Berufliche Oberschulen und eines der beiden Tabellenwerke zur Stochastik: „Stochastik-Tabellen“ v. Barth u. a. (München: Ehrenwirth-Verlag); „Tafelwerk zur Stochastik“ v. Wörle/Mühlbauer (München: Bayerischer Schulbuch-Verlag). Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.

Die Merkhilfe Mathematik/Technik wurde von den Fachmitarbeitern der Dienststellen der Ministerialbeauftragten für die Beruflichen Oberschulen des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus erarbeitet. Sie ist auf der Webseite des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung zu finden:
www.isb.bayern.de

Seit dem Schuljahr 2014/15 wird im Rahmen eines Schulversuchs eine Abiturprüfung angeboten, die auch Teile enthält, die mit einem Computer-Algebra-System (CAS) zu bearbeiten sind. Es besteht für alle Prüfungsteilnehmerinnen und Prüfungsteilnehmer der am Schulversuch teilnehmenden Schulen Wahlfreiheit, ob sie die Abiturprüfung im Rahmen des Schulversuchs mit CAS-Teil ablegen oder ob sie an der Prüfung ohne CAS teilnehmen möchten. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich diesbezüglich bis zum 1. März des jeweiligen Schuljahres entscheiden.

3 Arbeit mit diesem Buch

Da sich die Form der Prüfung und die Prüfungsinhalte ab 2020 von denen in den Vorjahren wesentlich unterscheiden, sind die früheren Abiturprüfungen der Ausbildungsrichtung Technik nicht mehr vollständig relevant. Das Buch enthält daher einen **Übungsteil**, in dem **relevante Aufgaben alter Original-Prüfungen** zusammengestellt wurden.

Im Analysis-Übungsteil finden Sie eine umfangreiche Auswahl an relevanten Aufgaben aus früheren Abiturprüfungen der Ausbildungsrichtung Technik. Zur Prüfungsvorbereitung in der Stochastik eignen sich die im Stochastik-Übungsteil abgedruckten Original-Prüfungen der 12. Jahrgangsstufe der nichttechnischen Ausbildungsrichtungen sehr gut. Zusätzlich finden Sie im Stochastik-Übungsteil weitere relevante Aufgaben aus den Original-Abiturprüfungen der Ausbildungsrichtung Technik zum Thema „bedingte Wahrscheinlichkeit“.

Zur weiteren Einübung der Prüfungsinhalte und insbesondere zur Simulation der Prüfungssituation dienen die **Musterprüfungen**, die der Form der Abiturprüfung ab 2020 entsprechen. Der Aufgabensatz mit den Varianten AI und SI bzw. AII und SII stellt dabei jeweils eine vollständige Prüfung dar. Die Musterprüfungen decken ein möglichst breites Spektrum an unterschiedlichen Aufgabenstellungen ab, erheben jedoch nicht den Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller möglichen Aufgabentypen und -varianten.

Am Ende des Buchs finden Sie weitere Original-Aufgaben zur **Stochastik** aus dem **Fachabitur** 2019 (Nichttechnik). Aufgrund der Lehrplananpassung könnten diese Aufgaben genau so auch in der Abiturprüfung (Technik) ab 2020 gestellt werden. Sie bieten Ihnen daher für den Themenbereich Stochastik eine weitere Möglichkeit zur Simulation der Prüfungssituation. Entsprechend der Verteilung der Bewertungseinheiten (vgl. Abschnitt 2.2) empfehlen sich folgende Bearbeitungszeiten:
- Teil 1, Stochastik (ohne Hilfsmittel): ca. 20 Minuten.
- Teil 2, Stochastik I bzw. II (mit Hilfsmitteln): ca. 40 Minuten.

4 Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen für die schriftliche Abiturprüfung stichpunktartig aufgeführt. Diese Auflistung soll Ihnen einen Überblick über den prüfungsrelevanten Lehrstoff vermitteln, sie ersetzt jedoch nicht den ausführlichen Lehrplan für das Fach Mathematik.

Die Zusammenstellung kann Ihnen bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als Leitfaden für die verbindlichen Inhalte und wichtigsten mathematischen Begriffe dienen.

In der Analysis werden die Lerninhalte der 12. Jahrgangsstufe (in der FOS auch die der 11. Jahrgangsstufe) als bekannt vorausgesetzt, sie sind daher im Folgenden noch einmal aufgeführt. Das Lerngebiet Lineare Algebra und Analytische Geometrie wird nicht geprüft.

Die Aufgabenstellung in der 13. Jahrgangsstufe unterscheidet sich von der der 12. Jahrgangsstufe auch darin, dass die Aufgaben nicht mehr so kleinschrittig untergliedert sind. Bei vielen Teilaufgaben müssen Sie eine komplexere Lösungsstrategie selbst entwickeln.

Aufgabe 1: Kurvendiskussion

FOS / BOS 13 Technik, 2019, A II, 2

1.0 Gegeben ist die Funktion $h\colon\ x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ in der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$ und für $x \to 0^+$.

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von h.
[Mögliches Teilergebnis: $h'(x) = \frac{2}{x^2+1}$]

1.3.0 Gegeben ist die Funktion $H\colon\ x \mapsto \int\limits_1^x h(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_H = \mathbb{R}^+$.

1.3.1 Ermitteln Sie ohne Verwendung der integralfreien Darstellung von H(x) die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts des Graphen von H.

1.3.2 Bestimmen Sie für die Funktion H eine integralfreie Darstellung.

TIPP Lösungshinweise

Teilaufgabe 1.1
Untersuchen Sie zunächst das Grenzwertverhalten des Arguments der Arkustangensfunktion.

Teilaufgabe 1.2
Bilden Sie die erste Ableitung mit der Kettenregel.
Führen Sie eine Vorzeichenuntersuchung bei der Ableitungsfunktion h' durch.

Teilaufgabe 1.3.1
Nutzen Sie den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Teilaufgabe 1.3.2
Verwenden Sie die partielle Integration vom Typ „Faktor 1".

1.1 $$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to -1}}{\underbrace{2x}_{\to 0^+}} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \arctan\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)}_{\to -\infty} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to \infty}}{\underbrace{2x}_{\to \infty}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{\overbrace{x}^{\to \infty} - \overbrace{\tfrac{1}{x}}^{\to 0}}^{\to \infty}}{2} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \arctan\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)}_{\to \infty} = \frac{\pi}{2}$$

Alternative:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to \infty}}{\underbrace{2x}_{\to \infty}} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{1}{2x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to \infty} - \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0}\right) = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \arctan\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)}_{\to \infty} = \frac{\pi}{2}$$

1.2 Für $h(x) = \arctan(f(x))$ gilt mit der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)$

Mit $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ folgt:

$$h'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2} \cdot \frac{2x \cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2}{(2x)^2} = \frac{4x^2-2x^2+2}{\left(1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2\right)\cdot (2x)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2}{(2x)^2+(x^2-1)^2} = \frac{2\cdot(x^2+1)}{4x^2+x^4-2x^2+1} = \frac{2\cdot(x^2+1)}{x^4+2x^2+1}$$

$$= \frac{2\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{\underbrace{x^2+1}_{>0}} > 0$$

G_h ist streng monoton steigend in $]-\infty; 0[$ und in $]0; \infty[$.

TIPP Für diese Teilaufgabe müsste man den Funktionsterm von h' nicht vollständig vereinfachen. Dass $h'(x) > 0$ ist, kann man schon vorher erkennen:

$$\frac{\overbrace{2x^2}^{>0}+2}{\underbrace{(2x)^2}_{>0}+\underbrace{(x^2-1)^2}_{>0}} > 0$$

In den nachfolgenden Teilaufgaben ist der vereinfachte Funktionsterm von h' jedoch hilfreich.

1.3.1 Nach dem HDI gilt: $H'(x) = h(x)$

$$\begin{aligned} H'(x) &= 0 \\ \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) &= 0 \\ \frac{x^2-1}{2x} &= 0 \\ x^2-1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_1 = 1;\quad &\underbrace{x_2 = -1}_{\notin D_H} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll} H''(1) = h'(1) = \dfrac{2}{1^2+1} = 1 > 0 & \text{(h' aus Teilaufgabe 1.2)} \\ H(1) = 0 & \text{(„obere Grenze“ = „untere Grenze“)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Relativer Tiefpunkt } TP(1\,|\,0)$$

1.3.2 $$H(x) = \int_1^x h(t)\,dt = \int_1^x 1\cdot\arctan\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)dt \overset{(1)}{=} \left[t\cdot\arctan\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)\right]_1^x - \int_1^x t\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt$$

$$= \left[t\cdot\arctan\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)\right]_1^x - \int_1^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt \overset{(2)}{=} \left[t\cdot\arctan\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)\right]_1^x - \left[\ln(t^2+1)\right]_1^x$$

$$= x\cdot\arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) - 1\cdot\arctan\underbrace{\left(\frac{1^2-1}{2\cdot 1}\right)}_{=0} - (\ln(x^2+1) - \ln(1^2+1))$$

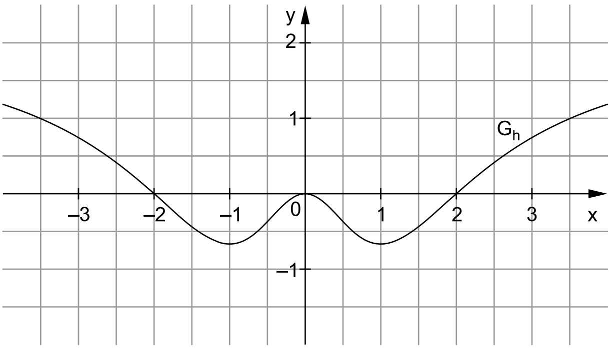
$$= x\cdot\arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) - \ln(x^2+1) + \ln(2)$$

Bayern ▪ FOS · BOS 13 ▪ Musterprüfung
Mathematik (Technik) – Teil 1, Analysis I (ohne Hilfsmittel)

Aufgabenstellung

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion h ist in der nachfolgenden Abbildung dargestellt. Dabei ist bekannt, dass der Graph der Funktion h achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft und den Tiefpunkt $TP\left(-1 \,\middle|\, -\frac{2}{3}\right)$ sowie den Hochpunkt $HP(0|0)$ besitzt.



1.1 Betrachtet wird nun die Integralfunktion $J\colon x \mapsto J(x) = \int_1^x h(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_J = \mathbb{R}$. Dabei gilt:
$J(2) \approx -0{,}4$ und $J(0) \approx 0{,}35$
Geben Sie die Lage der drei Nullstellen der Funktion J exakt oder zumindest in guter Näherung an.
Bestimmen Sie außerdem die Koordinaten und die Art der Punkte, in denen der Graph der Funktion J eine waagrechte Tangente besitzt. 7

1.2 Betrachtet wird nun die Funktion $H\colon x \mapsto -\arctan(h(x))$ mit der Definitionsmenge $D_H = [-3{,}5;\ 3{,}5]$.
Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der relativen Extrempunkte des Graphen von H und zeichnen Sie den Graphen der Funktion H in die Zeichnung von 1.0 ein.
Hinweis: Sie dürfen den Wert $\arctan(h(1)) \approx -0{,}6$ verwenden. 6

TIPP **Lösungshinweise – Teil 1, Analysis I**

Teilaufgabe 1.1

Überlegen Sie, welchen Wert J(1) hat.

Finden Sie weitere Nullstellen durch „Kästchenzählen".

Beachten Sie dabei auch die „Integrationsrichtung" und die Lage der einzelnen Flächen bezüglich der x-Achse.

Verwenden Sie zur Bestimmung der Ableitung von J die Aussage des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.

Schließen Sie mithilfe der Nullstellen der Funktion h und des Vorzeichenwechsels an diesen Nullstellen auf die Art der Punkte mit waagrechter Tangente.

Teilaufgabe 1.2

Begründen Sie, wie das Monotonieverhalten der Funktion H mit dem Monotonieverhalten der Funktion h zusammenhängt.

Schließen Sie vom Monotonieverhalten der Funktion h auf das Monotonieverhalten der Funktion H und entscheiden Sie damit, an welchen Stellen der Graph der Funktion H relative Extrema besitzt.

Verwenden Sie für die Zeichnung die Lage der relativen Extrema von H sowie den Wert $\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}8$.

Teilaufgabe 2.1

Überlegen Sie, welche Werte das Argument der Logarithmusfunktion annehmen darf.

Überlegen Sie, welche Werte das Argument der Wurzelfunktion annehmen darf.

Teilaufgabe 2.2

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f und folgern Sie damit die Umkehrbarkeit der Funktion f.

Lösen Sie die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf und geben Sie den Term der Umkehrfunktion an.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f an den Rändern der Definitionsmenge D_f und schließen Sie damit auf die Wertemenge W_f.

Folgern Sie daraus die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1}.

Lösungsvorschlag – Teil 1, Analysis I

1.1 Nullstellen: $x_1 = 1,\ \ x_2 \approx 3,\ \ x_3 \approx -3{,}75$

TIPP Mögliche Begründungen für die Nullstellen sind:

$x_1 = 1$: „obere Grenze" gleich „untere Grenze"

Somit gilt: $J(1) = \int_1^1 h(t)\,dt = 0$

$x_2 \approx 3$: „Kästchen zählen"

Das Integral $\int_1^2 h(t)\,dt$ entspricht in etwa 1,5 Kästchen, die unterhalb der x-Achse liegen.

Das Integral $\int_2^3 h(t)\,dt$ entspricht in etwa 1,5 Kästchen, die oberhalb der x-Achse liegen.

Somit gilt: $J(3) = \int_1^3 h(t)\,dt \approx 0$

$x_3 \approx -3{,}75$: „Kästchen zählen"

Das Integral $\int_1^{-2} h(t)\,dt$ entspricht in etwa 4,5 Kästchen, die unterhalb der x-Achse liegen.

Das Integral $\int_{-2}^{-3{,}75} h(t)\,dt$ entspricht in etwa 4,5 Kästchen, die oberhalb der x-Achse liegen.

Somit gilt: $J(-3{,}75) = \int_1^{-3{,}75} h(t)\,dt \approx 0$

Punkte mit waagrechter Tangente:
Nach dem HDI gilt $J'(x) = h(x)$, d. h., die Nullstellen von h sind die Stellen, an denen der Graph von J eine waagrechte Tangente besitzt.

Da der Graph der Funktion h an der Stelle $x = -2$ eine Nullstelle besitzt und das Vorzeichen hier von „+" nach „–" wechselt, hat der Graph der Funktion J an dieser Stelle einen relativen Hochpunkt.

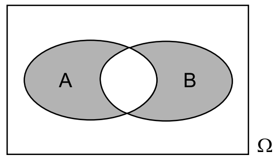
Mit $J(-2) \approx 0{,}35 + 0{,}35 + 0{,}4 = 1{,}1$ folgt: $HP(-2 \mid 1{,}1)$

Bayern ▪ FOS · BOS 12 ▪ Fachabiturprüfung 2019
Mathematik (Nichttechnik) – Teil 1, Stochastik (ohne Hilfsmittel)

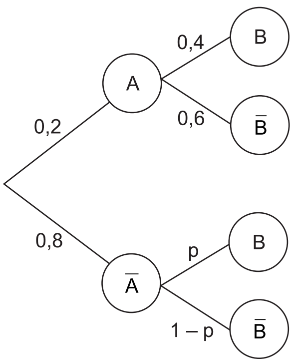
Aufgabenstellung

BE

1 A und B sind zwei beliebige (vereinbare) Ereignisse von Ω. Geben Sie das in nebenstehendem Venn-Diagramm grau unterlegte Ereignis E_1 in möglichst einfacher Symbolschreibweise an und veranschaulichen Sie das Ereignis $E_2 = \overline{A \cap \overline{B}}$ in einem Venn-Diagramm. 3



2.0 Folgendes Baumdiagramm stellt die Ergebnisse eines zweistufigen Zufallsexperiments dar. Dabei gilt: $p \in \mathbb{R}$ und $0 \leq p \leq 1$.



2.1 Bestimmen Sie den Wert von p so, dass für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B gilt: $P(B) = 0{,}24$. 2

2.2 Das zweistufige Zufallsexperiment ist ein Gewinnspiel, bei dem man nur gewinnt, wenn das Ereignis $\overline{A} \cap \overline{B}$ eintritt.
Interpretieren Sie folgende Gleichung im Sachzusammenhang:
$(0{,}8 \cdot (1-p))^3 = 0{,}001$ 2

TIPP Lösungshinweise – Teil 1, Stochastik

Teilaufgabe 1

Ereignis E_1:

In der Wortformulierung bedeutet das Ereignis E_1, dass entweder Ereignis A oder Ereignis B eintritt.

Ereignis E_2:

Wenden Sie die Regeln von De Morgan und den Satz vom doppelten Komplement an.

Teilaufgabe 2.1

Stellen Sie mithilfe der Pfadregeln die Wahrscheinlichkeit P(B) in Abhängigkeit von p dar.

Lösen Sie die auftretende Gleichung nach p auf.

Teilaufgabe 2.2

Bestimmen Sie anhand des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ für einen Gewinn beim einmaligen Spielen.

Überlegen Sie, wie oft das Gewinnspiel entsprechend dem gegebenen Linksterm durchgeführt wird.

Teilaufgabe 3

Ereignis E_1:

Da keine Aussage über die ersten fünf Teilnehmer getroffen wird, ist es egal, ob diese gewinnen oder verlieren. Dies entspricht dem Eintritt des sicheren Ereignisses für die ersten fünf Teilnehmer.

Ereignis E_2:

Es liegen zwei „bunte“ Reihen vor. Eine beginnt mit einem Gewinner, die andere mit einem Verlierer.

Ereignis E_3:

Ordnen Sie zunächst die Gewinner in einer Reihe an.

Bestimmen Sie dann die Anzahl der Möglichkeiten, die drei Gewinner zwischen den Verlierern zu verteilen.

Lösungsvorschlag – Teil 1, Stochastik

1 Das Ereignis E_1 bedeutet in der Wortformulierung:
E_1: „Entweder Ereignis A oder Ereignis B.“

In der Mengensymbolik ergibt sich:

$$E_1 = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$E_2 = \overline{A \cap \overline{B}}$$

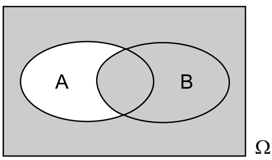
Mit dem De-Morgan-Gesetz der Mengenalgebra folgt:

$$E_2 = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}}$$

Mit dem Gesetz des doppelten Komplements ergibt sich:

$$E_2 = \overline{A} \cup B$$

Veranschaulichung im Venn-Diagramm:



2.1 Für die Wahrscheinlichkeit P(B) folgt mithilfe der 1. und 2. Pfadregel aus dem Baumdiagramm:

$$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$$

Mit $P(B) = 0,24$ und den Wahrscheinlichkeiten längs der Äste im Baumdiagramm ergibt sich:

$$0,24 = 0,2 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot p \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{24}{100} = \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{8}{10} \cdot p \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{24}{100} = \frac{8}{100} + \frac{8}{10} \cdot p \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{8}{10} \cdot p = \frac{16}{100} \quad \Leftrightarrow$$

$$p = \frac{16}{100} \cdot \frac{10}{8} \quad \Leftrightarrow$$

$$p = \frac{2}{10} = 0,2$$