GYMNASIUM

STARK in KLAUSUREN

Integralrechnung

Udo Mühlenfeld

STARK

Inhaltsverzeichnis

Fortsetzung nächste Seite

Auf einen Blick!

Inhaltsverzeichnis

Autor: Udo Mühlenfeld

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die Integralrechnung ruht im Mathematikunterricht auf zwei tragenden Säulen. Innermathematisch stellt sie den **Gegenpol zur Differenzialrechnung** dar, mit dem Ziel, zu einer gegebenen Funktion f eine Funktion F zu finden, deren Ableitung die Funktion f ergibt. Dieser Zusammenhang zwischen den beiden grundlegenden Konzepten der Analysis (Differenzieren und Integrieren) wird durch den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung vermittelt, dessen Grundgedanke unabhängig voneinander Isaac Newton (1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) entwickelten. Eine zweite Säule bildet, gerade auch mit Blick auf die Motivation im Unterricht, eine Fülle von **Alltagssituationen**, in denen das Konzept des Integrierens hilft, Probleme zu lösen: beispielsweise für ein startendes Flugzeug bei Kenntnis der Geschwindigkeit die notwendige Länge der Startbahn oder Inhalte von krummlinig begrenzten Flächen wie auch Volumina von Rotationskörpern zu berechnen. In diesen Kontextsituationen wird auch deutlich, welche Hilfe ein GTR bei der Bewältigung realer Daten bieten kann.

Auf beiden Säulen bauen auch die Aufgaben auf, mit denen Sie sich im Rahmen der **Abiturprüfung** beschäftigen. Dieses Buch hilft Ihnen, Ihr Wissen und Ihre Fertigkeiten in diesem wichtigen Themengebiet zu **vertiefen** und zu **testen**.

- Anschauliche **Schritt-für-Schritt-Erklärungen** und konkrete **Rechenbeispiele** vermitteln die Lerninhalte so, dass Sie sie verstehen und anwenden können.
- Zahlreiche **Aufgaben** helfen Ihnen dabei, den neu gelernten Stoff zu festigen.
- **Klausuren** zur Selbstüberprüfung geben Ihnen einen Überblick über Ihren aktuellen Leistungsstand und die Möglichkeit zur Kontrolle Ihres Lernerfolgs.
- Ausführliche **Lösungsvorschläge** sorgen dafür, dass Sie Ihre Lösungsansätze und Rechenwege selbstständig überprüfen und verbessern können.

So können Sie **stark in** Ihre nächsten **Klausuren** gehen!

Viel Spaß bei der Vorbereitung und viel Erfolg in der Klausur wünscht Ihnen

Udo Mühlenfeld

Udo Mühlenfeld

Auf einen Blick!

b $\int_{-2}^{-1} (x^2 - x)\,dx + \int_{-2}^{-1} (x^3 - x^2)\,dx + \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx$

$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x + x^3 - x^2)\,dx + \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^3 - x)\,dx + \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx$

$= \int_{-2}^{0} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - (4 - 2) = -2$

40 Ermitteln Sie jeweils einen Wert für den Parameter k.

TIPP
Verwenden Sie die Rechenregeln für bestimmte Integrale.

a $\int_{k}^{k} x\,dx = 0$

b $\int_{k}^{-1} 3x\,dx + \int_{-5}^{-3} 3x\,dx = \int_{-5}^{-1} 3x\,dx$

c $\int_{-2}^{-1} (k+3)x\,dx + \int_{-2}^{-1} 0{,}5x\,dx = \int_{-2}^{-1} (3-k)x\,dx$

d $\int_{0}^{k} 3x^2\,dx + \int_{0}^{k} 8\,dx = k^3 - 16$

3.3 Stammfunktionen der Grundfunktionen

In den ersten beiden Kapiteln wurde die Berechnung von Stammfunktionen und bestimmten Integralen mithilfe elementarer Integrations- und Rechenregeln systematisiert. Dabei hat es sich gezeigt, dass sich bei der Berechnung einfache Grundfunktionen ständig wiederholen. Um bei der sich anschließenden Flächen- und Volumenberechnung diese Grundfunktionen nicht immer wieder mithilfe der Regeln integrieren zu müssen, ist es sinnvoll, die Stammfunktionen dieser Grundfunktionen tabellarisch zusammenzustellen, um im weiteren Verlauf darauf zurückgreifen zu können.

WISSEN

f sei der Integrand und F eine zugehörige Stammfunktion. Für die am häufigsten vorkommenden Grundfunktionen gilt dann:

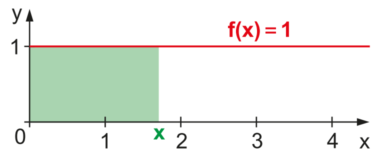
f(x)	F(x)	f(x)	F(x)
x^n; $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\sin x$	$-\cos x$
1	x	$\cos x$	$\sin x$
a; a = konstant	$a \cdot x$	e^x	e^x

BEISPIEL

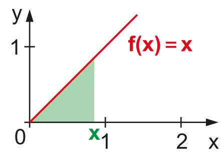
1 Erläutern Sie für die Integranden $f(x) = 1$ und $f(x) = x$ das Zustandekommen einer Stammfunktion mithilfe geometrischer Überlegungen.

Lösung:

$f(x) = 1$: Die Integralfunktion I_0 ist eine Stammfunktion zu f. Für das grün gefärbte Rechteck gilt:
$I_0(x) = 1 \cdot x = x$



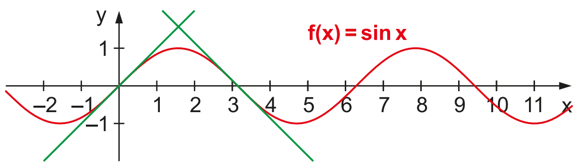
$f(x) = x$: Die Integralfunktion I_0 ist eine Stammfunktion zu f. Für das grün gefärbte Dreieck gilt:
$I_0(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$



2 Machen Sie für die Stammfunktion $F(x) = \sin x$ den passenden Integranden plausibel, indem Sie anhand des Graphen von F die Steigung in ausgewählten Punkten angeben.

Lösung:

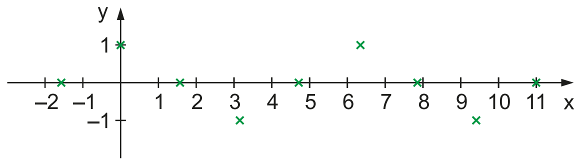
Die aus dem Graphen der Sinusfunktion nach Augenmaß ermittelten Tangentensteigungen m werden in einer Tabelle zusammengestellt.



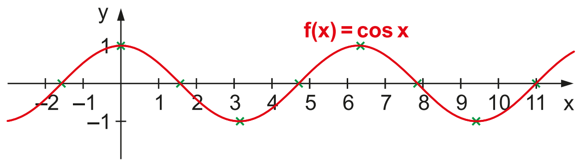
x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$
$m = F'(x) = f(x)$	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0

Vertiefe dein Wissen!

Die Werte werden grafisch dargestellt.



Die Punkte liegen auf dem Graphen der Cosinusfunktion.



41 Erläutern Sie für den Integranden $f(x)=a$ das Zustandekommen einer Stammfunktion mithilfe geometrischer Überlegungen.

42 Machen Sie für die Stammfunktion $F(x)=-\cos x$ den passenden Integranden plausibel, indem Sie anhand des Graphen von F die Steigung in ausgewählten Punkten angeben.

43 Begründen Sie für die Stammfunktion F zum Integranden $f(x)=x^n$ die Einschränkung $n\neq-1$.

00:45 MIN

Klausur 3

1 Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale.

7 BE

a $\int (3\sin x - 4\cos x)\,dx$

b $\int \sqrt{3x}\,dx$

c $\int \frac{1}{(7+2x)^3}\,dx$

d $\int \frac{4}{x}\,dx$

2 Erläutern Sie, welche Fehler in der folgenden Rechnung gemacht wurden.

3 BE

$$\int \frac{6}{x^2}\,dx = \int 6 \cdot x^{-2}\,dx = 6 \cdot \int x^{-2}\,dx = 6 \cdot \frac{1}{-2} x^{-3} + C = \frac{-3}{x^3} + C$$

3 Überlegen Sie, welche Zahlen in der nachfolgenden Rechnung fehlen.

4 BE

$$\int (\square x^{\square} + 6x^2 - \square x - \square)\,dx = 2x^4 + \square x^{\square} - 4x^2 - \square x + C$$

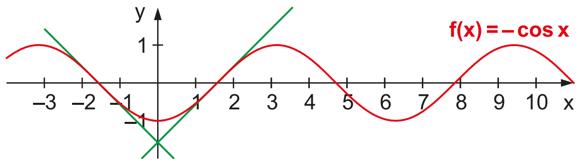
4 Berechnen Sie möglichst einfach die folgenden bestimmten Integrale unter Verwendung der Rechenregeln.

7 BE

a $\int_{-3}^{0} 3(x^2+1)\,dx + \int_{0}^{1} 3(x^2+1)\,dx + 3 \cdot \int_{-5}^{-3} (x^2+1)\,dx$

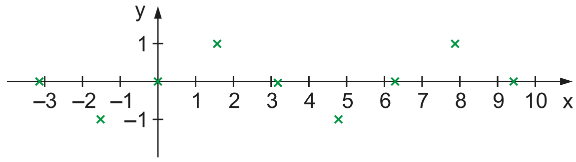
b $\int_{2}^{3} (3x-1)^2\,dx + \int_{2}^{3} (-1+6x)\,dx$

42 Die aus dem Graphen der Funktion F mit $F(x) = -\cos x$ nach Augenmaß ermittelten Tangentensteigungen m werden in einer Tabelle zusammengestellt.

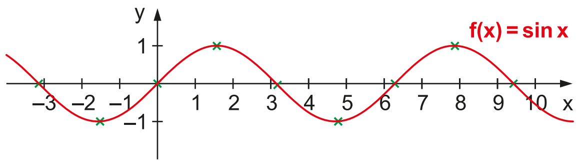


x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$m = F'(x) = f(x)$	0	–1	0	1	0	–1	0	1	0

Die Werte werden grafisch dargestellt.



Die Punkte liegen auf dem Graphen der Sinusfunktion.



43 Die Stammfunktion zur Funktion f mit $f(x) = x^n$ lautet:

$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

Für $n = -1$ ist der Bruch $\frac{1}{n+1}$ nicht definiert.

Klausur 3

1

a (2) $\int (3\sin x - 4\cos x)\,dx = \int 3\sin x\,dx - \int 4\cos x\,dx = 3\cdot\int \sin x\,dx - 4\cdot\int \cos x\,dx$

$= 3\cdot(-\cos x) - 4\cdot\sin x + C = -3\cos x - 4\sin x + C$

b (2) $\int \sqrt{3x}\,dx = \sqrt{3}\cdot\int \sqrt{x}\,dx = \sqrt{3}\cdot\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

c (2) $\int \frac{1}{(7+2x)^3}\,dx = \int (7+2x)^{-3}\,dx = \frac{1}{\mathbf{2}}\cdot\frac{1}{-2}(7+\mathbf{2}x)^{-2} + C = -\frac{1}{4\cdot(7+2x)^2} + C$

d (1) $\int \frac{4}{x}\,dx = 4\cdot\int \frac{1}{x}\,dx = 4\cdot\ln x + C$

2

$\int \frac{6}{x^2}\,dx = \int 6\cdot x^{-2}\,dx = 6\cdot\int x^{-2}\,dx = 6\cdot\frac{1}{-2}x^{-3} + C = \frac{-3}{x^3} + C$

Beim Integrieren wird der Exponent um 1 vergrößert (unter Beachtung des Vorzeichens): $-2+1=-1$. **Anschließend** wird durch den Exponenten dividiert.

Hier wurde das Vorzeichen nicht beachtet, also der Betrag des Exponenten um 1 vergrößert. Außerdem wurde **vorher** durch den Exponenten dividiert.

3

Die Berechnung der gesuchten Zahlen erfolgt „vorwärts“ durch Integration oder „rückwärts“ durch Ableiten.

$\int (\square x^{\square} + 6x^2 - \square x - \square)\,dx = 2x^4 + \square x^{\square} - 4x^2 - \square x + C$

Die Ableitung von $2x^4$ ergibt $8x^3$. Die Integration von $6x^2$ ergibt $2x^3$. Die Ableitung von $-4x^2$ ergibt $-8x$. Die Integration von $\square$ ergibt $\square x$. Hier kann also jede Zahl **a** eingesetzt werden.

Damit ergibt sich:

$\int (8x^3 + 6x^2 - 8x - a)\,dx = 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - ax + C$

4

a (4) $\int_{-3}^{0} 3(x^2+1)\,dx + \int_{0}^{1} 3(x^2+1)\,dx + 3\cdot\int_{-5}^{-3} (x^2+1)\,dx$

$= 3\cdot\int_{-5}^{-3} (x^2+1)\,dx + \int_{-3}^{0} 3(x^2+1)\,dx + \int_{0}^{1} 3(x^2+1)\,dx$ Kommutativgesetz

Überprüfe deine Ergebnisse!

STARK