MEHR ERFAHREN

TRAINING

Gymnasium

Wiederholung Geometrie

STARK

Inhalt

Autor: Eberhard Endres

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die Geometrie ist das wohl älteste mathematische Gebiet, auf dem bereits in der Antike intensiv geforscht wurde. Im täglichen Leben begegnet man ihr in Form von Körpern wie z. B. Kegeln oder Quadern oder ebener geometrischer Gebilde wie z. B. Geraden oder Winkeln bzw. Rechtecken oder Dreiecken.

In diesem Buch werden alle **wesentlichen Themengebiete der Mittelstufengeometrie** systematisch in getrennten Kapiteln dargestellt und mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben unterstützt.

Hierbei werden diejenigen Teilgebiete deutlich umfassender und intensiver besprochen, die im **Mathematikunterricht der Oberstufe wieder aufgegriffen** und weitergeführt werden. Insbesondere werden – ausgehend von einfachen geometrischen Objekten, Kongruenz und Ähnlichkeit – die Satzgruppe des Pythagoras, Winkelberechnungen, Körper im dreidimensionalen Raum, Vektoren und Koordinatensysteme ausführlich bearbeitet.

Somit kann durch die Arbeit mit diesem Wiederholungsbuch ein bedeutender Grundstein für die erfolgreiche Bewältigung der Oberstufenmathematik gelegt werden.

Geometrie kann man aber nicht auswendig lernen, Geometrie muss man verstehen und „be-greifen". Daher sind in diesem Wiederholungsbuch **sehr viele anschauliche Zeichnungen** enthalten, die die Sachverhalte verbildlichen sollen.

Prinzipiell kann **jedes Kapitel separat** bearbeitet werden, jedoch bauen die meisten davon auf vorhergehenden Einheiten auf, sodass sich auch die Bearbeitung des gesamten Buches anbietet. Es steht Ihnen frei, über die Geschwindigkeit und Intensität der Bearbeitung selbst zu entscheiden.

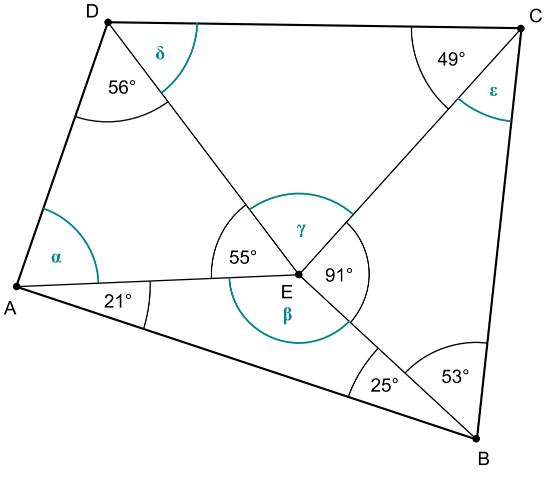
Im letzten Kapitel finden Sie eine bunte **Sammlung von Aufgaben**, die Sie nach der Bearbeitung der vorhergehenden Kapitel zur eigenen Erfolgskontrolle und Gesamtwiederholung benutzen können.

Die **Lösungswege für alle Aufgaben** sind im Lösungsteil ausführlich dargestellt, um eine gewissenhafte Kontrolle zu ermöglichen und somit den Lernerfolg zu unterstützen. Die mit einem Stern **(✱)** gekennzeichneten Aufgaben sind etwas anspruchsvoller und regen in besonderer Weise zum Nachdenken an; Sie können diese beim ersten Durcharbeiten auch überspringen.

In diesem Sinne wünsche ich Ihnen viel Erfolg bei der Wiederholung Geometrie!

Eberhard Endres

Aufgabe **22.** Berechnen Sie die grün markierten Winkel.



2.2 Besondere Dreiecke

Bei einem Dreieck, das bekanntlich drei Seiten und drei Innenwinkel besitzt, kann es vorkommen, dass einige Winkel oder Seiten gleich groß sind. Bei solchen besonderen Dreiecken lassen sich einige weitere Eigenschaften ableiten.

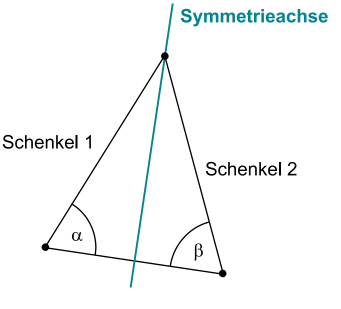
Gleichschenklige Dreiecke

Definition

Ein Dreieck, bei dem zwei Seiten gleich groß sind, nennt man **gleichschenklig**.
Bei einem gleichschenkligen Dreieck nennt man die beiden gleich großen Seiten **Schenkel** und die dritte Seite **Basis**.
Der Winkel, der von den beiden Schenkeln eingeschlossen wird, heißt **Scheitelwinkel**.
Die beiden an der Basis anliegenden Winkel werden mit **Basiswinkel** bezeichnet.

Die beiden an der Basis anliegenden Winkel sind gleich groß; für die Winkel α und β in nebenstehender Zeichnung gilt somit: $\boldsymbol{\alpha = \beta}$

Ein gleichschenkliges Dreieck ist **symmetrisch**. Seine Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte der Basis.



Gleichseitige Dreiecke

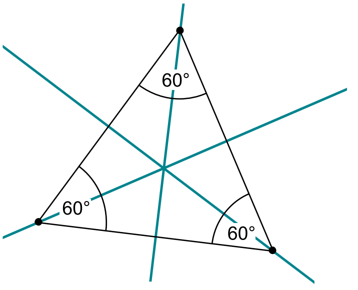
Definition

Wenn ein Dreieck drei gleich lange Seiten besitzt, dann nennt man dieses Dreieck **gleichseitig**.

Ein gleichseitiges Dreieck besitzt auch drei **gleich große Winkel**. Wegen der Winkelsumme im Dreieck von 180° beträgt jeder Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck:

$\frac{180°}{3} = \mathbf{60°}$

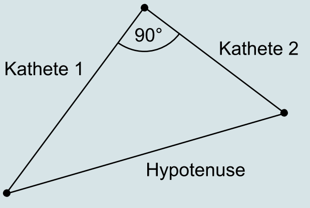
Ein gleichseitiges Dreieck besitzt **drei Symmetrieachsen**.



Rechtwinklige Dreiecke

Definition

Wenn ein Winkel im Dreieck 90° beträgt, nennt man dieses Dreieck **rechtwinklig**.
In diesem Fall nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse** und die beiden am rechten Winkel anliegenden Seiten **Katheten**.

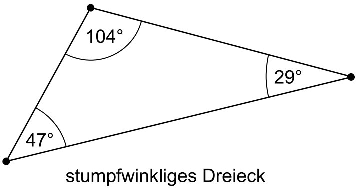


Stumpfwinklige und spitzwinklige Dreiecke

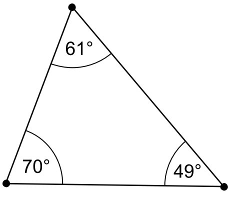
Dreiecke kann man auch nach der Größe ihrer Winkel unterscheiden:

Definition

Wenn der größte der drei Winkel eines Dreiecks stumpf, also größer als 90° ist, nennt man dieses Dreieck **stumpfwinklig**.
Sind dagegen alle drei Winkel des Dreiecks spitz, also kleiner als 90°, heißt dieses Dreieck **spitzwinklig**.



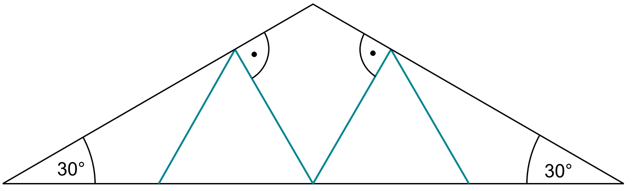
stumpfwinkliges Dreieck



spitzwinkliges Dreieck

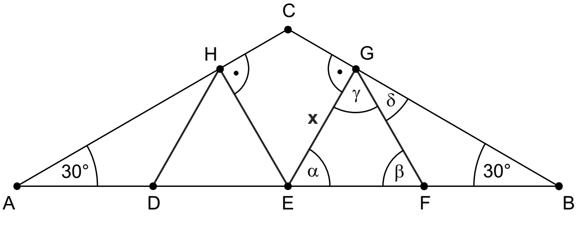
Beispiel

Ein 12 m breiter Hausgiebel soll durch vier gleich lange, hier grün gezeichnete Stützbalken stabilisiert werden.



Helfen Sie dem Zimmermann bei der Planung, indem Sie die Länge dieser Stützbalken berechnen.

Lösung:
Gesucht ist die Länge x jedes Stützbalkens. Wir schauen, welche besondere Eigenschaft die einzelnen Dreiecke in der Zeichnung besitzen:
Zunächst werden die Punkte sowie einige für die Berechnung wichtige Winkel markiert.



Anhand der Zeichnung entsteht die Vermutung, dass die Dreiecke DEH und EFG gleichseitig sein könnten. Dies werden wir zunächst begründen.
Das Dreieck EBG ist auf jeden Fall rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei G. Mithilfe der Winkelsumme in diesem Dreieck lässt sich daher der Winkel α bestimmen:
$\alpha + 90° + 30° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 180° - 90° - 30° = 60°$
Weil die grünen Balken gleich lang sind, ist das Dreieck EFG gleichschenklig; daher sind die Basiswinkel α und β gleich groß:
$\beta = 60°$
Wegen der Winkelsumme im Dreieck EFG ist damit auch $\gamma = 60°$ und dieses Dreieck sogar gleichseitig. Daher hat die Strecke [EF] ebenfalls die gesuchte Länge x:
$\mathbf{|EF| = x}$
Im gegenüberliegenden gleichseitigen Dreieck DEH liegt derselbe Sachverhalt vor; auch hier gilt:
$\mathbf{|DE| = x}$
Der Winkel $\sphericalangle$EGB bei G ist 90°:
$\gamma + \delta = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 90° - \gamma = 30°$
Daher ist das Dreieck FBG wegen der zwei 30°-Winkel gleichschenklig. Für die Seitenlängen dieses Dreiecks gilt $|FB| = |FG|$ und damit auch $\mathbf{|FB| = x}$.

Ebenso gilt wegen der symmetrischen Figur natürlich auch in dem Dreieck ADH:

$|AD| = |DH|$ und somit $\mathbf{|AD| = x}$

Für die gesamte Breite des Hauses folgt:

$|AB| = |AD| + |DE| + |EF| + |FG| = x + x + x + x = 4x = 12$ m

Daher muss jeder Balken genau 3 m lang sein.

Aufgaben

23. Bestimmen Sie den fehlenden Winkel in einem Dreieck und entscheiden Sie, ob folgende Angaben zu einem spitzwinkligen, rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreieck gehören:

a) $\alpha = 78°$; $\gamma = 90°$

b) $\alpha = 32°$; $\gamma = 47°$

c) $\alpha = 45°$; $\beta = 86°$

d) $\alpha = 63°$; $\gamma = 27°$

e) $\beta = 52°$; $\gamma = 38°$

24. Wie groß sind die Winkel eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks?

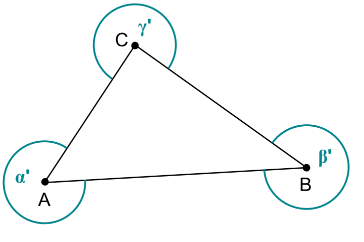
25. a) Ein gleichschenkliges Dreieck hat den Basiswinkel $\beta = 32°$. Bestimmen Sie die restlichen Winkel dieses Dreiecks.

b) Ein gleichschenkliges Dreieck hat den Scheitelwinkel $\gamma = 80°$. Bestimmen Sie die restlichen Winkel dieses Dreiecks.

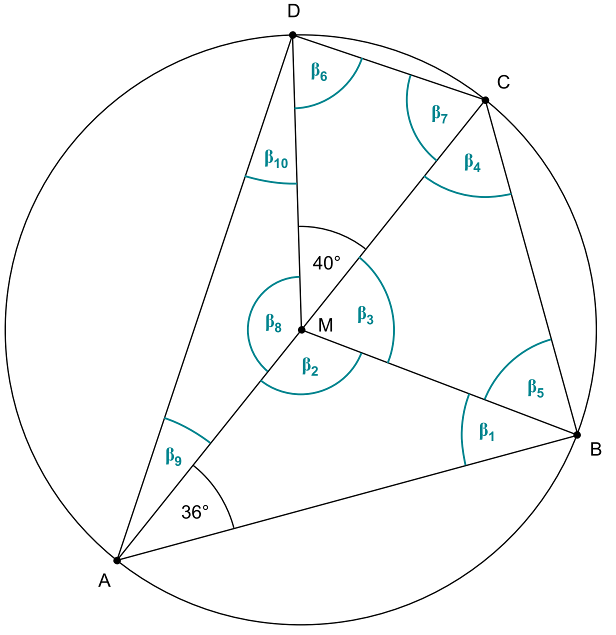
c) Bestimmen Sie die fehlenden zwei Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\beta = 72°$.

26. Warum kann es kein Dreieck mit zwei stumpfen Winkeln geben?

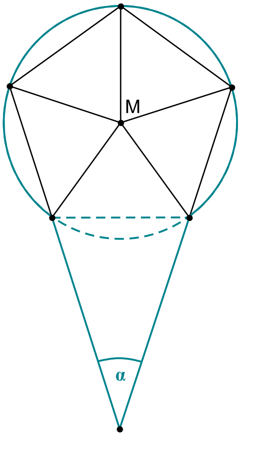
27. Die Winkel α', β' und γ' in nebenstehender Zeichnung bezeichnet man als **Außenwinkel** des Dreiecks ABC. Bestimmen Sie die Summe dieser drei Außenwinkel.



28. In der abgebildeten Figur ist die Strecke [AC] ein Durchmesser des Kreises. Bestimmen Sie die grün eingezeichneten Winkel β_1 bis β_{10}:

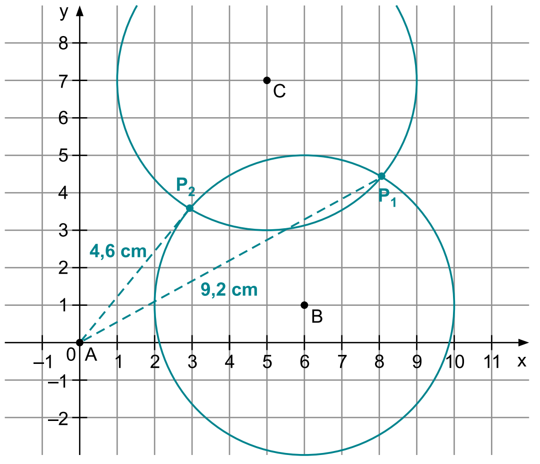


29. Die fünf um M gruppierten Dreiecke sind alle identisch.
Bestimmen Sie den Winkel α.



2.3 Seitenlängen im Dreieck

Für die Bezeichnung der Länge einer Seite verwendet man üblicherweise denselben Kleinbuchstaben wie für die Seite selbst, soweit eine Verwechslung ausgeschlossen ist.



P_1 ist ca. 9,2 km von A entfernt, P_2 besitzt eine Entfernung von ca. 4,6 km. Der Baum kann also entweder 9,2 km oder 4,6 km von A entfernt sein.

22. Im Dreieck AED gilt für die Winkelsumme im Dreieck:
$\alpha + 55° + 56° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = 180° - 55° - 56° \mathbf{= 69°}$

Entsprechend gilt im Dreieck ABE:
$\beta + 21° + 25° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta} = 180° - 21° - 25° \mathbf{= 134°}$

Für das Dreieck BCE folgt genauso:
$\varepsilon + 91° + 53° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 180° - 91° - 53° \mathbf{= 36°}$

Weil die vier Winkel bei E zusammen 360° ergeben, erhält man:
$\gamma + 55° + \beta + 91° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 360° - 55° - \beta - 91°$
$\boldsymbol{\gamma} = 360° - 55° - 134° - 91° \mathbf{= 80°}$

Schließlich ergibt sich im Dreieck CDE:
$\delta + \gamma + 49° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\delta} = 180° - \gamma - 49° = 180° - 80° - 49° \mathbf{= 51°}$

23. Es gilt jeweils: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Hiermit ergibt sich:

a) $\boldsymbol{\beta} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 78° - 90° \mathbf{= 12°}$ rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$)

b) $\boldsymbol{\beta} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 32° - 47° \mathbf{= 101°}$ stumpfwinkliges Dreieck ($\beta > 90°$)

c) $\boldsymbol{\gamma} = 180° - \alpha - \beta = 180° - 45° - 86° \mathbf{= 49°}$ spitzwinkliges Dreieck (alle Winkel kleiner als 90°)

d) $\boldsymbol{\beta} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 63° - 27° \mathbf{= 90°}$ rechtwinkliges Dreieck ($\beta = 90°$)

e) $\boldsymbol{\alpha} = 180° - \beta - \gamma = 180° - 52° - 38° \mathbf{= 90°}$ rechtwinkliges Dreieck ($\alpha = 90°$)

24. Ein rechtwinkliges Dreieck besitzt einen Winkel von 90°. Für die beiden anderen Winkel, die wegen der Gleichschenkligkeit gleich groß sein müssen, bleiben wegen der Winkelsumme im Dreieck zusammen 90° übrig, sodass die beiden Basiswinkel jeweils eine Winkelweite von 45° besitzen müssen.

25. a) Der zweite Basiswinkel (z. B. α) besitzt ebenfalls die Weite 32°. Somit verbleibt für den Scheitelwinkel wegen der Winkelsumme im Dreieck:
$\gamma = 180° - 2 \cdot 32° = \mathbf{116°}$

b) Wegen der Winkelsumme im Dreieck besitzen die beiden Basiswinkel zusammen die Weite von $180° - 80° = 100°$. Somit sind die beiden Basiswinkel jeweils **50°** groß.

c) Ein Winkel (z. B. γ) muss wegen der Rechtwinkligkeit 90° groß sein. Damit folgt für den noch fehlenden Winkel $\boldsymbol{\alpha}$:
$\alpha = 180° - 90° - 72° = \mathbf{18°}$

26. Wenn es zwei stumpfe Winkel in einem Dreieck geben würde, wäre die Winkelsumme dieses Dreiecks größer als 180°.

27. Die Winkel α', β' und γ' bilden zusammen mit den drei Dreieckswinkeln insgesamt drei Vollwinkel, besitzen also zusammen die Winkelweite von $3 \cdot 360° = 1\,080°$. Subtrahiert man davon die Winkelsumme des Dreiecks von 180° für die drei Innenwinkel des Dreiecks, dann ergibt sich für die Summe der drei Außenwinkel:
$\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma'} = 1\,080° - 180° = \mathbf{900°}$

28. Die Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM sind gleichschenklig.
Damit lassen sich alle gesuchten Winkel bestimmen:
Im Dreieck ABM gilt $\boldsymbol{\beta_1 = 36°}$ und damit wegen der Winkelsumme:
$\boldsymbol{\beta_2} = 180° - 2 \cdot 36° = \mathbf{108°}$
β_2 und β_3 bilden einen gestreckten Winkel. Somit ist $\boldsymbol{\beta_3} = 180° - \beta_2 = \mathbf{72°}$.
Im Dreieck BCM sind die Winkel β_4 und β_5 gleich groß. Somit gilt:
$\beta_3 + 2 \cdot \beta_4 = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \beta_4 = 180° - \beta_3 = 108° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta_4 = \beta_5} = \frac{108°}{2} = \mathbf{54°}$

Im Dreieck CDM sind die Winkel β_6 und β_7 gleich groß. Somit gilt:
$40° + 2 \cdot \beta_6 = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \beta_6 = 180° - 40° = 140° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta_6 = \beta_7} = \frac{140°}{2} = \mathbf{70°}$

β_8 ist ein Nebenwinkel zu 40° und besitzt somit die Weite 140°.
Im Dreieck DAM sind die Winkel β_9 und β_{10} gleich groß. Somit gilt:
$140° + 2 \cdot \beta_9 = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \beta_9 = 180° - 140° = 40° \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta_9 = \beta_{10}} = \frac{40°}{2} = \mathbf{20°}$