2020

Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium RW

Mathematik

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives Training

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2018

Abiturprüfung 2019

Im Downloadbereich zu diesem Buch finden Sie alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind.
Außerdem finden Sie dort Lernvideos zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS beim Lösen von Abituraufgaben im Prüfungsteil B.

ActiveBook
Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **Interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind.
Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Leistungskurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2020** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2020 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Die schriftliche Abiturprüfung besteht seit 2017 aus folgenden beiden Teilen:

  Prüfungsteil A: Aufgaben **ohne Hilfsmittel**
  Prüfungsteil B: Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematische Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben**, die diese Struktur der schriftlichen Abiturprüfung abbilden, sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2019**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs.
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2014 bis 2019**, die nicht im Buch abgedruckt sind, zum Download.

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

ActiveBook
Interaktives Training

Trotz der **geänderten fachlichen Vorgaben** für das Zentralabitur ab 2017 können Sie die Original-Abituraufgaben der früheren Jahrgänge zur inhaltlichen Vorbereitung auf den Prüfungsteil B einsetzen. Beachten Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgaben folgende Kennzeichnung:
Der graue Balken am linken Rand signalisiert Ihnen, dass Sie die gesuchte Stammfunktion nicht mithilfe eines Integrationsverfahrens bestimmen müssen. Alternativ können Sie durch Ableiten zeigen, dass die zur Kontrolle angegebene Funktion eine Stammfunktion ist.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2020 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!
Ihr Stark Verlag

Autoren:

Georg Breitenfeld

Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A – Aufgabenserie 1: c, d; Aufgabenserie 2: c, d; Aufgabenserie 3: c, d;
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung ab 2017 – Prüfungsteil A: c, d; Prüfungsteil B: B4, B5;
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: d; Prüfungsteil B: B4 (GTR / CAS), B5 (GTR);
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B4 (GTR / CAS), B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B4 (GTR / CAS), B5 (GTR / CAS);
Download: 2014 – 1 (CAS), 2 (CAS), 4 (CAS), 5 (WTR), 6 (WTR / CAS); 2015 – 1 (WTR), 1 (CAS), 4 (CAS), 5 (WTR), 6 (WTR / CAS); 2016 – 2 (WTR), 2 (CAS), 4 (CAS), 5 (WTR), 6 (WTR / CAS); 2017 – B5 (CAS)

Herbert Kompernaß

Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A – Aufgabenserie 1: a, b; Aufgabenserie 2: a, b; Aufgabenserie 3: a, b;
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung ab 2017 – Prüfungsteil A: a, b; Prüfungsteil B: B1, B2, B3;
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: a, b, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (GTR / CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR / CAS);
Download: 2014 – 1 (WTR), 2 (WTR), 3 (WTR), 4 (WTR / CAS); 2015 – 2 (WTR), 2 (CAS), 3 (WTR), 4 (WTR / CAS); 2016 – 1 (WTR), 1 (CAS), 3 (WTR), 4 (WTR / CAS); 2017 – B1 (CAS), B2 (GTR); 2018 – B1 (CAS); 2019 – B1 (CAS), B2 (GTR)

Hinweise und Tipps zum Abitur 2020

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.

Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik setzt sich seit dem Abitur 2017 aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitenden Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**, zusammen.

Viele Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial für den Prüfungsteil B weiterhin gut geeignet. Eine Auswahl finden Sie im Downloadbereich zu diesem Buch.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Leistungskurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Diese sind verbindlich zu bearbeiten, d. h., es findet keine Auswahl durch die Fachlehrkraft statt. Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.

– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet 2 Analysisaufgaben, 1 Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und 2 Stochastikaufgaben, dabei eine mit dem Schwerpunkt stochastische Matrizen.
  Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
  Der Prüfungsteil B wird aus **3 Aufgaben** gebildet, wobei jeweils eine **Analysisaufgabe**, eine Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und eine **Stochastikaufgabe** zu wählen ist.

  Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:
  - GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
  - Mathematische Formelsammlung
  - Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen Ihnen im Leistungskurs insgesamt **255 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit für den Prüfungsteil A, der von Ihnen zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 45 Minuten. Sobald Sie mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel. Sollten Sie den Prüfungsteil A schneller bearbeiten können, dürfen Sie auch schon früher mit dem Prüfungsteil B beginnen. Sie haben dann für diesen entsprechend mehr Zeit.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2020

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Leistungskurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2020** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	Beispiele
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2018 – Aufgabe B1 (GTR)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern	2017 – Aufgabe B1 (GTR)
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe a
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe c
• Integralrechnung	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
Analytische Geometrie und Lineare Algebra	
• lineare Gleichungssysteme	2017 – Aufgabe A, Teilaufgabe c
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte	2019 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Lagebeziehungen und Abstände	2017 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Skalarprodukt	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe a

Stochastik	
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe d
• Binomialverteilung und Normalverteilung	2017 – Aufgabe B5 (GTR)
• Testen von Hypothesen	2018 – Aufgabe B5 (GTR/CAS)
• stochastische Prozesse	2019 – Aufgabe B4 (GTR/CAS)

3 Leistungsanforderung und Bewertung

Im Leistungskurs beläuft sich die Höchstpunktzahl für den Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) auf 24 Punkte und für den Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) auf 120 Punkte (3 Aufgaben zu je 40 Punkten).

Die Bewertung der Klausuraufgaben erfolgt auf der Grundlage eines der Aufgabenstellung beigefügten Bewertungsschemas. Darin sind Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Das Bewertungsschema ist Grundlage der Beurteilung. Von der Modelllösung abweichende Lösungen werden entsprechend bewertet, die für die Aufgabenstellung vorgesehene Höchstpunktzahl kann aber nicht überschritten werden. Ferner können nur ganze Punktzahlen vergeben werden. Ausschlaggebend ist hier die fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit.

Ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium ist die Darstellungsleistung, in welche der richtige Einsatz der Fachsprache und die Strukturiertheit der Ausführungen einfließen. Die Bewertung der Darstellungsleistung wird in die Bewertung der inhaltlichen Leistungen integriert. Punktabzug aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (Rechtschreibung und Grammatik) kann im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen erfolgen.

Das seitliche Profil einer Wasserrutsche in einem Freibad kann durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = (x+1) \cdot e^{1-x}, \quad 0 \leq x \leq 5$[1]

modelliert werden (x und f(x) in Metern). Das Schwimmbecken wird im Bereich der Rutsche auf der linken Seite durch den negativen Teil der y-Achse begrenzt und der obere Beckenrand befindet sich auf Höhe der x-Achse. Für den Wasserspiegel der Wasseroberfläche wird angenommen, dass er 20 cm unterhalb des Beckenrandes liegt. Der Sachverhalt ist in Abbildung 1 veranschaulicht.

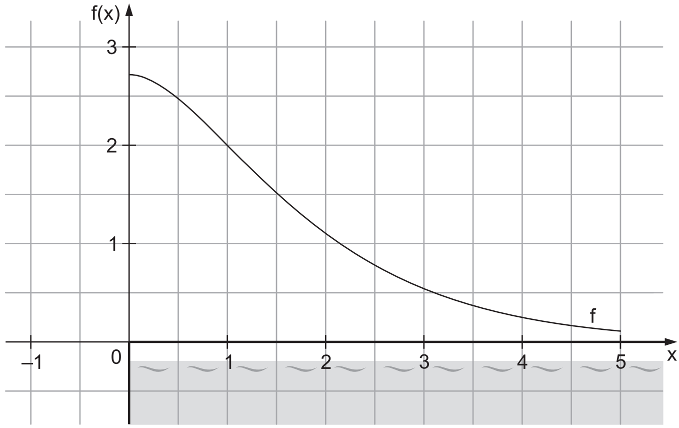


Abbildung 1

a) (1) Ermitteln Sie, in welcher Höhe über der Wasseroberfläche das Ende der Rutsche liegt.

(2) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Profillinie der Rutsche auf der gesamten Länge fällt, und bestimmen Sie das durchschnittliche Gefälle der Rutsche.

(3) Bestimmen Sie durch Rechnung denjenigen Punkt auf der Profillinie der Rutsche, in dem das Gefälle am größten ist.
Aus Sicherheitsgründen darf der Neigungswinkel der Rutsche an keiner Stelle 60° überschreiten.
Überprüfen Sie, ob die Rutsche dieser Norm gerecht wird.

1 Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $0 \leq x \leq 5$ zur Modellierung verwendet.

Lösung

a) (1) Da die Wasseroberfläche 20 cm = 0,2 m unterhalb des Beckenrandes liegt, muss zum Funktionswert f(5) noch der Wert 0,2 addiert werden:

$f(5)+0,2 \approx 0,31$

GTR/CAS

$f(x):=(x+1)\cdot e^{1-x}$	*Fertig*
$f(5)+0.2$	0.309894

Das Ende der Rutsche liegt ca. 0,31 m (= 31 cm) über der Wasseroberfläche.

(2) Die Profillinie der Rutsche fällt auf der gesamten Länge, wenn der Graph der Funktion f im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend ist.
Dies ist der Fall, wenn $f'(x) < 0$ ist für $0 < x < 5$. (Die Ränder des Definitionsbereichs können bei der Untersuchung auf Monotonie vernachlässigt werden.)

Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die 1. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot e^{1-x} + (x+1)\cdot e^{1-x}\cdot(-1) \\ &= e^{1-x} - (x+1)\cdot e^{1-x} \\ &= e^{1-x} - x\cdot e^{1-x} - e^{1-x} \\ &= -x\cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

CAS

$a1f(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$-x\cdot e^{1-x}$

Für $x > 0$ gilt folgende Abschätzung:

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{<0}\cdot\underbrace{e^{1-x}}_{>0} < 0$$

Der Graph der Funktion f ist streng monoton fallend für $x > 0$. Die Profillinie der Rutsche fällt daher auf der gesamten Länge.

Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche entspricht der mittleren Steigung des Funktionsgraphen von f im Definitionsbereich $0 \le x \le 5$.

$$m = \frac{f(5)-f(0)}{5-0} \approx -0,52$$

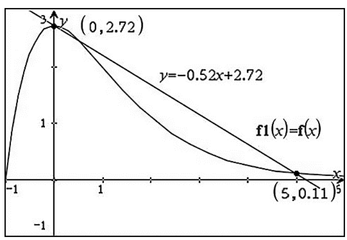
GTR/CAS

$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}$	-0.521678

Alternativ:
Die mittlere Steigung m kann auch grafisch anhand der Gleichung der Sekante durch die Punkte $P(0\,|\,f(0))$ und $Q(5\,|\,f(5))$ ermittelt werden.

Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche beträgt ca. 0,52 m je Meter in horizontaler Richtung.

GTR/CAS



(3) Das Gefälle der Rutsche wird durch die 1. Ableitung $f'(x)$ beschrieben. Das größte Gefälle liegt an der Minimalstelle der Funktion $f'(x)$ vor. Dafür infrage kommen die Nullstellen der 2. Ableitung $f''(x)$ oder die Randstellen des Definitionsbereichs.

Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot e^{1-x} + (-x) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= -e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \\ &= (x-1) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

CAS

$a2f(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	Fertig
$a2f(x)$	$(e \cdot x - e) \cdot e^{-x}$

Notwendige Bedingung für eine Minimalstelle der Funktion $f'(x)$: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot e^{1-x} &= 0 \qquad \big| : e^{1-x} \neq 0 \\ x - 1 &= 0 \qquad \big| +1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Berechnung des Funktionswertes der Funktion $f'(x)$:
$f'(1) = -1$

Zu überprüfen sind noch die Randstellen:
$f'(0) = 0$
$f'(5) \approx -0{,}09$

GTR/CAS

$a1f(x) := -x \cdot e^{1-x}$	Fertig
$a1f(1)$	-1
$a1f(0)$	0.
$a1f(5)$	-0.091578
$f(1)$	2

Das größte Gefälle besitzt die Rutsche nach 1 Meter in horizontaler Richtung. Mit $f(1) = 2$ lauten die Koordinaten des zugehörigen Punktes $(1|2)$.

Der Winkel α, der zu diesem Gefälle gehört, berechnet sich durch:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= -1 \\ \alpha &= \tan^{-1}(-1) \\ \alpha &= -45° \end{aligned}$$

GTR/CAS

$\tan^{-1}(-1)$	-45.

Da Neigungswinkel immer zwischen 0° und 90° angegeben werden, beträgt der zugehörige Neigungswinkel 45°. Die Rutsche wird der Norm daher gerecht.

b) (1) Die zu verkleidende Fläche auf einer Seite der Rutsche setzt sich aus der Fläche zwischen der Profillinie der Rutsche und dem oberen Beckenrand (x-Achse) sowie der rechteckigen Fläche zwischen dem Beckenrand und der Wasseroberfläche im Bereich $0 \le x \le 5$ zusammen. Da beide Seiten der Rutsche verkleidet werden sollen, wird mit 2 multipliziert.

$$A = 2 \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + 5 \cdot 0{,}2 \right) \approx 12{,}62\,[m^2]$$

GTR/CAS

$a := 2 \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + 5 \cdot 0.2 \right)$	12.6167

Abiturprüfung 2018 Mathematik Leistungskurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil B – Stochastik B5 (GTR/CAS)

Punkte

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

(1) 800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft.“
B: „Mindestens 5 % der Teile sind fehlerhaft.“ 5

(2) Ermitteln Sie, wie viele Kunststoffteile mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit davon mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 100 Teile keinen Fehler haben. 5

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4 %“ auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

(3) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 6

(4) Das neue Granulat ist teurer als das vorherige.
Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe. 4

(5) Interpretieren Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit, wenn in Wirklichkeit nur 2 % der Teile fehlerhaft sind. 5

b) Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größe der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

Lösung

a) (1) Bei der zufälligen Auswahl von 800 Kunststoffteilen handelt es sich um einen 800-stufigen Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}04$ und der Gegenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p = 0{,}96$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit bezieht sich dabei allerdings darauf, dass ein Teil fehlerhaft ist, und die Gegenwahrscheinlichkeit darauf, dass ein Teil keinen Fehler hat.

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der fehlerhaften Teile in der Stichprobe" ist damit binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0{,}04$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft" beträgt:

$P(A) = P(X = 30) \approx 0{,}0693 = 6{,}93\ \%$

binomPdf(800,0.04,30)	0.069276

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B werden vorab 5 % von 800 Teilen berechnet:

$0{,}05 \cdot 800 = 40$

0.05· 800	40.

Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: „Mindestens 40 der Teile sind fehlerhaft":

$P(B) = P(X \geq 40) = P(40 \leq X \leq 800)$

$\approx 0{,}0912 = 9{,}12\ \%$

binomCdf(800,0.04,40,800)	0.091165

Alternativ:

$P(B) = P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39)$

$\approx 0{,}0912 = 9{,}12\ \%$

1−binomCdf(800,0.04,0,39)	0.091165

(2) In dieser Aufgabenstellung ist die Größe m der Stichprobe so zu bestimmen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 mindestens 100 Teile keinen Fehler haben.

Betrachtet wird die Zufallsgröße $\overline{X}$: „Anzahl der Teile in der Stichprobe, die *keinen* Fehler haben". $\overline{X}$ ist binomialverteilt mit m und $q = 0{,}96$.

Die Größe m ist so zu bestimmen, dass Folgendes gilt:

$P_{q=0{,}96}(\overline{X} \geq 100) \geq 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad P_{q=0{,}96}(100 \leq \overline{X} \leq m) \geq 0{,}95$

Alternativ:

$P_{q=0{,}96}(\overline{X} \geq 100) \geq 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P_{q=0{,}96}(\overline{X} \leq 99) \geq 0{,}95$

Die Bestimmung kann durch systematisches Probieren erfolgen.
Es ergibt sich:

$m = 105: \quad P_{q=0{,}96}(\overline{X} \geq 100) \approx 0{,}7559$

$m = 107: \quad P_{q=0{,}96}(\overline{X} \geq 100) \approx 0{,}9344$

$m = 108: \quad P_{q=0{,}96}(\overline{X} \geq 100) \approx 0{,}9705$

binomCdf(105,0.96,100,105)	0.755862
binomCdf(107,0.96,100,107)	0.934428
binomCdf(108,0.96,100,108)	0.970466

Es müssen also mindestens 108 Kunststoffteile zufällig ausgewählt werden, damit davon mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 100 Teile keinen Fehler haben.

Alternativ:

1−binomCdf(105,0.96,0,99)	0.755862
1−binomCdf(107,0.96,0,99)	0.934428
1−binomCdf(108,0.96,0,99)	0.970466

(3) Bei dieser Aufgabenstellung geht es um das Testen von Hypothesen. Es soll begründet geklärt werden, ob das neue Granulat sich hinsichtlich der Fehlerquote vom alten Granulat nicht unterscheidet (Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}04$) oder ob sich die Fehlerquote reduziert hat (Alternativhypothese H_1).

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der fehlerhaften Teile in der Stichprobe von 500 Teilen" wird als binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0{,}04$ angenommen.

Zu ermitteln ist, bis zu welcher Anzahl an fehlerhaften Teilen in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % von einer gesunkenen Fehlerquote ausgegangen wird, obwohl dies nicht der Fall ist und die Fehlerquote immer noch 4 % beträgt.

Gesucht ist also der Wert k, für den gilt:

$P_{p=0,04}(X \leq k) \leq 0{,}05 \quad \text{und} \quad P_{p=0,04}(X \leq k+1) > 0{,}05$

Mit dem Taschenrechner lässt sich der gesuchte Wert experimentell ermitteln:

$P_{p=0,04}(X \leq 12) \approx 0{,}0362 < 0{,}05$

$P_{p=0,04}(X \leq 13) \approx 0{,}0623 > 0{,}05$

binomCdf(500,0.04,0,10)	0.009675
binomCdf(500,0.04,0,11)	0.019508
binomCdf(500,0.04,0,12)	0.036204
binomCdf(500,0.04,0,13)	0.062318

Die Entscheidungsregel lautet damit:
Verwirf die Nullhypothese, falls $X \leq 12$, d. h., falls maximal 12 Teile in der Stichprobe fehlerhaft sind.

(4) Es soll vermieden werden, dass auf Dauer das teurere Granulat eingesetzt wird, obwohl sich der Anteil der fehlerhaften Teile nicht reduziert hat. Dies ist der Fall, wenn das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, die Nullhypothese aber in Wahrheit zutrifft. Man spricht hier von einem Fehler 1. Art und setzt dessen Wahrscheinlichkeit (die sogenannte Irrtumswahrscheinlichkeit) mit $\alpha = 5$ % entsprechend gering an.

(5) Beim Fehler 2. Art ist die Nullhypothese falsch, d. h., das neue Granulat ist besser als das alte. Das Stichprobenergebnis liegt aber im Annahmebereich der Nullhypothese. Der Produktionsleiter geht aufgrund des Testergebnisses also irrtümlich davon aus, dass das neue Granulat nicht besser ist als das alte.

Sind in Wirklichkeit nur $p = 0{,}02$ Teile fehlerhaft, beträgt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art:

$$P_{p=0,02}(X \geq 13) = P_{p=0,02}(13 \leq X \leq 500) \approx 0{,}2065 = 20{,}65\ \%$$

binomCdf(500,0.02,13,500)	0.206518