GYMNASIUM

MEHR ERFAHREN

STARK in KLAUSUREN

Lagebeziehungen

Magnus Semmelbauer

STARK

Inhaltsverzeichnis

Fortsetzung nächste Seite

Auf einen Blick!

Autor: Magnus Semmelbauer

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

der uns umgebende Raum ist einer der Bereiche, den die Menschen schon sehr lange mathematisch erfassen wollen. Einerseits finden sich geometrische Körper – insbesondere die „Vollkommenheit“ und Ästhetik der platonischen Körper – schon lange vor den Pythagoreern, andererseits gelang mit der Begründung der Vektorrechnung die Beschreibung des dreidimensionalen Raumes an sich. In diesem Zusammenhang sind große Mathematiker wie Herrmann Günther Graßmann (1809 – 1877), er gilt als eigentlicher Begründer der Vektorrechnung, August Ferdinand Möbius (1790 – 1868), der umfangreiche Forschungen in der Astronomie und Geometrie betrieb, oder der prägende Geist der nicht-euklidischen Geometrie, Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), zu nennen.

Die Ergebnisse der sogenannten analytischen Geometrie, die Räume bis zu einer beliebigen Dimension zulässt, werden auf einfache Weise konkret in der Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum, wobei die Betrachtung möglicher Lagebeziehungen ein naheliegendes Vorhaben darstellt. Dieser Teilbereich zählt auch zu dem, was von Ihnen im Rahmen der **Abiturprüfung** gefordert wird.

Dieses Buch hilft Ihnen, Ihr Wissen und Ihre Fertigkeiten in diesem wichtigen Themengebiet zu **vertiefen** und zu **testen**.

- Anschauliche **Schritt-für-Schritt-Erklärungen** und konkrete **Rechenbeispiele** vermitteln die Lerninhalte so, dass Sie sie verstehen und anwenden können.
- Zahlreiche **Aufgaben** helfen Ihnen dabei, den neu gelernten Stoff zu festigen.
- **Klausuren** zur Selbstüberprüfung geben Ihnen einen Überblick über Ihren aktuellen Leistungsstand und die Möglichkeit zur Kontrolle Ihres Lernerfolgs.
- Ausführliche **Lösungsvorschläge** sorgen dafür, dass Sie Ihre Lösungsansätze und Rechenwege selbstständig überprüfen und verbessern können.

So können Sie **stark in** Ihre nächsten **Klausuren** gehen!

Viel Erfolg wünscht Ihnen

Magnus Semmelbauer

Auf einen Blick!

WISSEN

Abstand
Unter dem Abstand d(g; h) zweier windschiefer Geraden g und h versteht man die Länge der Strecke, die sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Dies ist die kürzeste Verbindungsstrecke zweier Punkte $P \in g$ und $Q \in h$.

Zur Bestimmung des Abstandes zweier windschiefer Geraden benötigt man einen **normierten Normalenvektor**

$$\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

zu den beiden Richtungsvektoren der Geraden sowie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Aufpunkte A und B. Hiermit gilt:

$$d(g;h) = \left|\vec{n}^0 \circ \overrightarrow{AB}\right|$$

BEISPIEL

Bestimmen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -4-(-3) \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor der Aufpunkte

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-2 \\ 14-(-30) \\ 5-(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 44 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 44^2 + 19^2}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 44 \\ 19 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\,397}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 44 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Aus dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren errechnet sich ein Normalenvektor, der normiert werden muss.

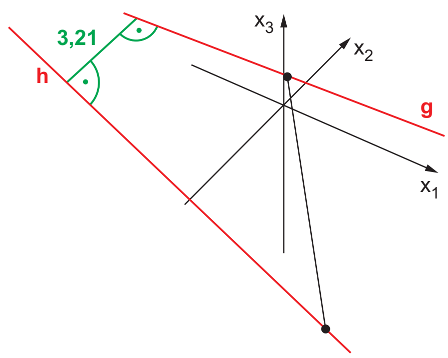
Somit ergibt sich für den Abstand der beiden Geraden g und h:

$$d(g;h) = \left|\vec{n}^0 \circ \overrightarrow{AB}\right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2\,397}} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 44 \\ 19 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2\,397}} \cdot (20 - 44 - 133) \right|$$

$$= \left| \frac{-157}{\sqrt{2\,397}} \right| = \frac{157}{\sqrt{2\,397}} \approx 3{,}21$$



Vertiefe dein Wissen!

20 Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden g und h.

a g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\-5\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

b g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$

c g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\-7\end{pmatrix}$, h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\-6\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$

21 Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Geraden
g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-1\\a\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ und h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix}$
den Abstand $d(g;h) = \sqrt{29}$ besitzen.

22 Die Koordinatenachsen besitzen die Geradendarstellungen
x_1: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, x_2: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und x_3: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Geben Sie möglichst einfache Beispiele für windschiefe Geraden g und h an, die die Abstände $d_1(g;h) = 2$, $d_2(g;h) = \frac{34}{57}$ und $d_3(g;h) = 3\sqrt{5}$ besitzen.

TIPP
Denken Sie an zu den Achsen parallele Geraden, deren Aufpunkte auf den Achsen liegen.

Klausur 2

00:45 MIN

1 5 BE

Bestimmen Sie den Abstand der parallelen Geraden

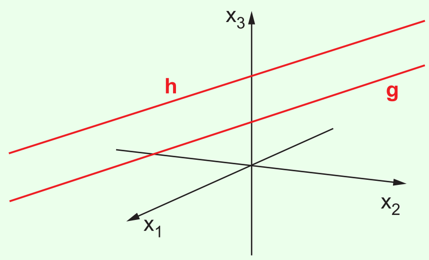
$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zueinander.

2 10 BE

Die beiden Geraden $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ schneiden sich in einem Punkt S. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S und den Schnittwinkel α.

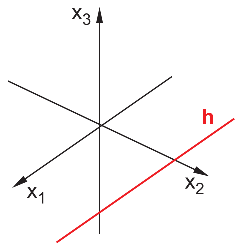
3 5 BE

Die nachfolgenden Geraden stellen jeweils einfache, zum Teil zu den Koordinatenachsen parallele Geraden dar. Kreuzen Sie ohne weitere Rechnung jeweils die Lage der beiden Geraden an.



windschief	parallel	identisch	orthogonal schneidend	schneidend, aber nicht orthogonal	
					$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
					$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
					$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
					$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
					$g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

22 Grundlage für die Überlegungen zur Lösung ist das Verwenden der Achsengeraden und dazu paralleler Geraden. Die in der Abbildung gezeichnete **Gerade h** ist parallel zur x_1-Achse, schneidet die x_2-Achse senkrecht und liegt windschief zur x_3-Achse. Der Abstand dieser zur x_3-Achse windschiefen Geraden ist die Entfernung zum Koordinatenursprung.



$\mathbf{d_1(g;h) = 2}$

Die Gerade g ist die x_3-Achse und die Gerade h eine Parallele zur x_1-Achse durch den Punkt $(0|2|0)$:

$$g\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad h\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ähnlich einfach verhält es sich mit den weiteren geforderten Abständen, die sich stets auf diesen ersten Fall übertragen lassen.

$\mathbf{d_2(g;h) = \frac{34}{57}}$

$$g\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad h\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\\frac{34}{57}\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\mathbf{d_3(g;h) = 3\sqrt{5}}$

$$g\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad h\colon\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\3\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Klausur 2

1 $d(g;h) = d(A;h) = \frac{1}{\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}\right|} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\7\\-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}\right|$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \left|\begin{pmatrix}-14-(-5)\\15-(-6)\\3-(-21)\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \left|\begin{pmatrix}-9\\21\\24\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{1\,098} = \frac{3\sqrt{427}}{7} \approx 8{,}86$$

Die Geraden g und h liegen ca. 8,86 Längeneinheiten voneinander entfernt.

2 **Bestimmung des Schnittpunktes**

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$$

Ansatz: $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$

(I) $\quad -2-2\lambda = 5+3\mu$

(II) $\quad 3+3\lambda = -2+\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \mathbf{5+3\lambda} \quad$ (IIa)

(III) $\quad 4+4\lambda = 4\mu$

Das resultierende Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, da ein Schnittpunkt vorhanden ist.

$-2-2\lambda = 5+3\cdot(\mathbf{5+3\lambda})$

$-2-2\lambda = 20+9\lambda$

$-11\lambda = 22 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mathbf{-2}$

(IIa) in (I) einsetzen

$4+4\lambda = 4\cdot(\mathbf{5+3\lambda})$

$4+4\lambda = 20+12\lambda$

$-8\lambda = 16 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mathbf{-2}$

Oder: (IIa) in (III) einsetzen

Nach Einsetzen von $\lambda = \mathbf{-2}$ in die Geradengleichung von g erhält man den Schnittpunkt S:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} + (\mathbf{-2}) \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(2\,|-3\,|-4)$$

Bestimmung des Schnittwinkels

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-6+3+16|}{\sqrt{4+9+16} \cdot \sqrt{9+1+16}} = \frac{13}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{754}}{58} \approx 0{,}4734$$

Der von den Geraden eingeschlossene Winkel beträgt etwa $\alpha \approx 61{,}74°$.

Überprüfe deine Ergebnisse!