MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Analytische Geometrie

Mit Hinweisen zu
GTR- und CAS-Nutzung

STARK

Inhalt

Autoren:
Eberhard Endres, Winfried Grunewald

Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, dass Sie sich beim Ansehen der Videos im WLAN befinden. Haben Sie keine Möglichkeit, den QR-Code zu scannen, finden Sie die Lernvideos auch unter:

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch bietet Ihnen eine umfassende Zusammenstellung grundlegender mathematischer **Definitionen, Regeln und Vorgehensweisen**, die zum Lösen geometrischer Fragestellungen in der Oberstufe erforderlich sind. Die einzelnen Kapitel sind so aufgebaut, dass jeweils ein Themenbereich übersichtlich hergeleitet und dargestellt sowie mit **Beispielen** erläutert wird. Jeder Abschnitt schließt mit **Übungsaufgaben** zur Einübung des Gelernten sowie zur eigenen Erfolgskontrolle.

Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.

Zunächst werden die elementaren Grundsteine gelegt, die zur **Beschreibung und Untersuchung von Geraden und Ebenen** benötigt werden. Es folgt ein Kapitel mit **anwendungsorientierten Fragestellungen**, bevor Sie im Kapitel **Aufgabenmix** Ihre bis dahin erworbenen Kenntnisse zusammenhängend vertiefen können.

Ergänzend werden viele Beispiele und Aufgaben auch mit einem **grafikfähigen Taschenrechner (GTR)** vorgerechnet oder mit einem Taschenrechner gelöst, der über ein **Computer-Algebra-System (CAS)** verfügt. Der GTR stellt seine Fähigkeiten insbesondere bei der numerischen Lösung von linearen Gleichungssystemen unter Beweis. Während dieser Taschenrechnertyp allerdings schnell an seine Grenzen stößt, kann ein CAS-Rechner umfangreicher auch für das algebraische Lösen von Problemen, die Parameter enthalten, eingesetzt werden. Einzelne Beispiele und Aufgaben sind deshalb speziell dazu gedacht, die besonderen Einsatzmöglichkeiten des CAS-Rechners darzulegen und sind entsprechend gekennzeichnet.
Als GTR wurde in diesem Buch der CASIO CFX-9850GB PLUS verwendet. Die CAS-Screenshots wurden mit einem TI-Nspire™ CAS erstellt. Die Bedienung der Rechner ist jedoch auch bei anderen Fabrikaten ähnlich, sodass dieses Buch ebenso geeignet ist, wenn Sie einen anderen Rechner verwenden.

Prinzipiell kann **jedes Kapitel separat** bearbeitet werden, jedoch bauen die meisten davon auf vorhergehenden Einheiten auf, sodass sich auch die Bearbeitung des gesamten Buches anbietet. Die mit Stern **(✱)** gekennzeichneten Aufgaben sind etwas anspruchsvoller und regen in besonderer Weise zum Nachdenken an.

Zur Selbstkontrollen sind die **Lösungswege für alle Aufgaben** im Lösungsteil ausführlich dargestellt und z. T. mit GTR- bzw. CAS-Lösungen ergänzt.

Viel Erfolg wünschen Ihnen

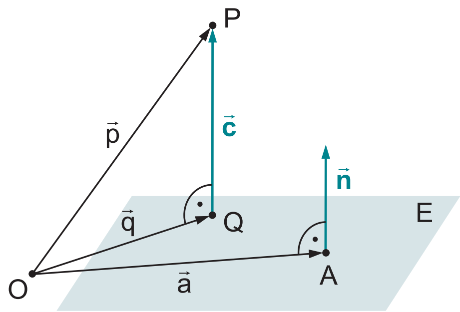
Winfried Grunewald

Winfried Grunewald Eberhard Endres

8.1 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Bei allen Abstandsproblemen ist nach dem jeweils **kürzesten Abstand** zwischen den betrachteten geometrischen Objekten gefragt. Das bedeutet, dass bei dem Abstandsproblem Punkt–Ebene nach der Länge eines Vektors gesucht wird, der **senkrecht** auf der Ebene steht und den Punkt als End- oder Anfangspunkt besitzt.

Betrachtet wird ein Punkt P, der außerhalb der Ebene E liegt. Der Punkt A ist der Punkt in der Ebene, auf den der Ortsvektor $\vec{a}$ als Stützvektor der Ebene zeigt, und Q ist der Lotfußpunkt des Lotes von P auf die Ebene E (vgl. Bild rechts). Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene wird zwar zunächst im Punkt A angesetzt, kann aber so verschoben werden, dass er im Punkt Q steht.



Verlängert man den Vektor $\vec{n}$ entsprechend, so erhält man den gesuchten Vektor $\vec{c}$, dessen Länge den Abstand des Punktes P zur Ebene E darstellt. Die Frage bleibt nun, um welchen Faktor man den Normalenvektor $\vec{n}$ verlängern muss, um bis zum Punkt P zu gelangen.

Lösungsmöglichkeit 1

Man erstellt eine Gerade, die durch den Punkt P geht und senkrecht auf der Ebene E steht (eine sogenannte Lotgerade). Eine solche Gerade ist:

$g:\ \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{n}$

Anschließend berechnet man den Schnittpunkt dieser Lotgeraden g mit der Ebene E. Dieser Schnittpunkt ist der Punkt Q. Hat man den Punkt Q, so ergibt sich der gesuchte Abstand d aus:

$d = |\vec{c}| = |\vec{p} - \vec{q}|$

Beispiel

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(3|1|2)$ von der Ebene E, die durch die Gleichung $E:\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 19$ gegeben ist.

Lösung:

Der Normalenvektor der Ebene E ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Die Lotgerade, die durch den Punkt P führt, wird beschrieben durch:

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Zur Berechnung des Schnittpunktes der Geraden g mit der Ebene E ersetzt man die Variablen x_1, x_2 und x_3 in der Koordinatenform von E entsprechend dieser Geradengleichung (vgl. Abschnitt 6.3) und erhält folgende Gleichung:

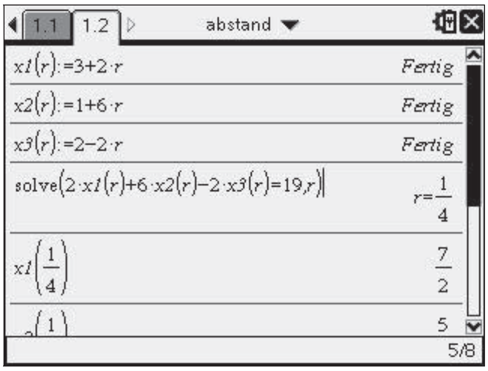
$2 \cdot (3 + 2r) + 6 \cdot (1 + 6r) - 2 \cdot (2 - 2r) = 19 \quad \Leftrightarrow \quad 44r = 11 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{4}$

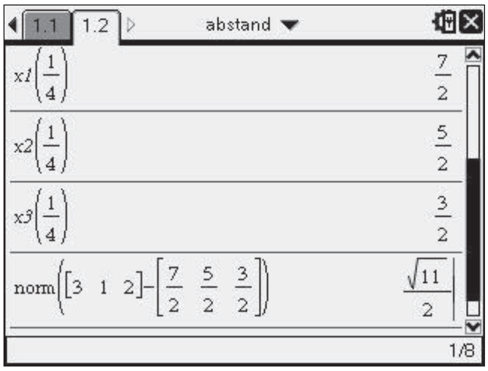
Setzt man diesen Wert in die Gleichung von g ein, erhält man den Schnittpunkt $Q\left(\frac{7}{2} \mid \frac{5}{2} \mid \frac{3}{2}\right)$. Der Abstand d von P zur Ebene E ergibt sich aus:

$$d = \left|\vec{p} - \vec{q}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

CAS *Hinweise für den CAS-Einsatz:*

Der Schnittpunkt Q der Geraden g mit der Ebene E wird berechnet wie in Abschnitt 6.3 erläutert. Der Abstand d als Länge des Vektors $\vec{c} = \vec{p} - \vec{q}$ wird anschließend mit dem Befehl **norm** ermittelt.





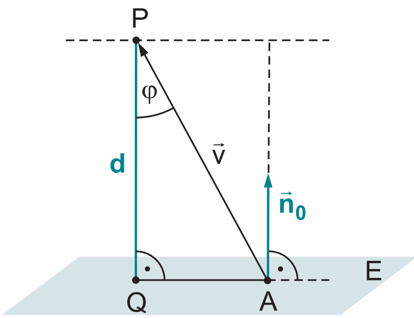
Lösungsmöglichkeit 2

Unter der Voraussetzung, dass der Normalenvektor $\vec{n}$ und der Vektor $\vec{c} = \vec{p} - \vec{q}$ in dieselbe Richtung zeigen, gilt $\vec{c} = \vec{p} - \vec{q} = k \cdot \vec{n}$ mit positivem $k \in \mathbb{R}$. Verändert man die Länge des Normalenvektors $\vec{n}$ so, dass aus $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$ wird (vgl. Abschnitt 5.3), dann erhält man $\vec{c} = d \cdot \vec{n}_0$. Die positive reelle Zahl d gibt

dabei den gesuchten Abstand an, denn es gilt $\left|\vec{n}_0\right| = 1$ und damit $\left|\vec{c}\right| = d \cdot \left|\vec{n}_0\right| = d$.

Die drei Punkte A, P und Q bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Mit den Bezeichnungen wie im Bild rechts gilt für die dargestellte Situation:

$\cos\varphi = \frac{d}{\left|\vec{v}\right|} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\varphi = d$



Andererseits folgt aus der alternativen Definition des Skalarproduktes (vgl. Abschnitt 4.1):

$\vec{v} \cdot \vec{n}_0 = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}_0\right| \cdot \cos\varphi = \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\varphi = d$

Zeigen $\vec{n}_0$ und $\vec{c} = \vec{p} - \vec{q}$ in entgegengesetzte Richtungen, dann gilt $\vec{c} = d \cdot (-\vec{n}_0)$. Auch jetzt gibt d den gesuchten Abstand an, aber das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{n}_0$ wird negativ. Um auch diesen Fall zu berücksichtigen, verwendet man den Betrag des Skalarproduktes:

$\left|\vec{v} \cdot \vec{n}_0\right| = \left|\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}_0\right| \cdot \cos\varphi\right| = \left|\left|\vec{v}\right| \cdot \cos\varphi\right| = d$

Mit $\vec{v} = \overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ folgt anschließend:
$d = \left| (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 \right|$
Man projiziert also den Vektor $\vec{p} - \vec{a}$ mithilfe des Skalarproduktes auf den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$ der Ebene.

Regel

Abstand eines Punktes von einer Ebene
Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ besitzt von der Ebene E, die den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$ und den Ortsvektor $\vec{a}$ als Stützvektor hat, den Abstand
$d = \left| (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 \right|$.

Diese Formel ähnelt sehr der Hesse'schen Normalenform (HNF) der Ebene E; diese lautet: $E\colon\ (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 = 0$ (vgl. Abschnitt 5.3)
Kennt man also die Hesse'sche Normalenform einer Ebene, so ist man nicht weit entfernt von der Formel zur Abstandsberechnung Punkt–Ebene. Man muss lediglich den variablen Ortsvektor $\vec{x}$ in der Ebenengleichung durch den Ortsvektor $\vec{p}$ des betrachteten Punktes ersetzen und den Betrag bilden.

Hinweis: Bei der Berechnung von Abständen und Längen ist es grundsätzlich erforderlich, die Längeneinheiten (LE) anzugeben; im Folgenden wird auf diese Angabe verzichtet.

Beispiel

Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $P_1(5|2|2)$ und $P_2(3|2|1)$ von der Ebene $E\colon\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$.

Lösung:
Der Normalenvektor der Ebene kann an den Koeffizienten der Ebenengleichung abgelesen werden:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus bildet man den Normaleneinheitsvektor der Ebene E:

$$|\vec{n}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_0 = \tfrac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein Ortsvektor $\vec{a}$, der zu einem Punkt A der Ebene zeigt, wäre z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Hierzu wurde für die Koordinaten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gewählt.
Damit die Ebenengleichung erfüllt ist, muss dann $x_3 = 7$ sein.
So lässt sich der Abstand des Punktes P_1 von der Ebene berechnen:

$$d_{P_1} = \left| (\vec{p}_1 - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 \right| = \left| \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{7} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{7} \cdot |30 - 6 - 10| = 2$$

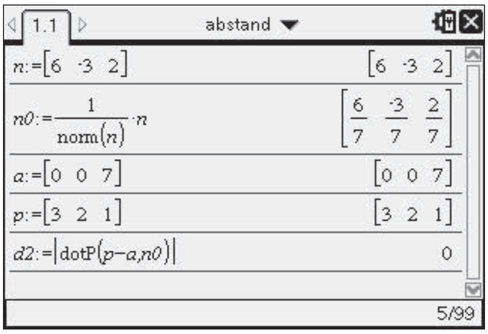
Für den Punkt P_2 ergibt sich analog:

$$d_{P_2} = |(\vec{p}_2 - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{7} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{7} \cdot |18 - 6 - 12| = 0$$

Der Abstand des Punktes P_2 zur Ebene E ist gleich 0, das bedeutet, dass der Punkt P_2 in der Ebene E liegt.

CAS *Hinweise für den CAS-Einsatz:*

Mithilfe des CAS-Rechners wird die Abstandsberechnung für den Punkt P_2 veranschaulicht. Dabei wird hier nochmals der vollständige Rechenweg ausgehend vom Normalenvektor gezeigt. Auch hier ergibt sich der Abstand 0.



Aufgabe 90. Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes A(5|1|2) von der Ebene E.

a) E: $4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 18$

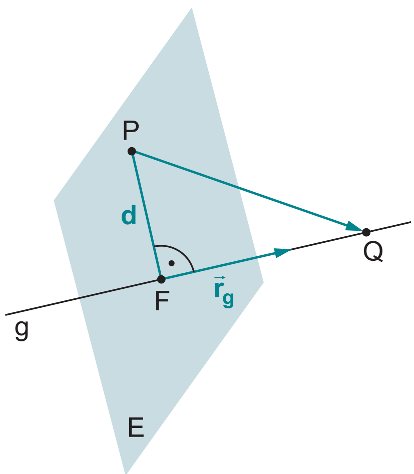
b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

d) Die Ebene E enthält die Punkte B(7|3|3), C(6|–1|9) und D(9|–1|0).

8.2 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Zur Bestimmung des Abstands eines Punktes P von einer Geraden g gibt es mehrere Möglichkeiten. Im Bild rechts ist d der gesuchte Abstand, F der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade g, $\vec{r}_g$ der Richtungsvektor der Geraden und Q ein beliebiger weiterer Punkt der Geraden.



Lösungsmöglichkeit 1

Man bestimmt die Koordinaten des Lotfußpunktes F, indem man eine Hilfsebene E bildet, die senkrecht zur Geraden g steht und in der der Punkt P liegt. Es gilt also:

E: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{r}_g = 0$

Man berechnet nun den Lotfußpunkt F als Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene. Ist die Gerade g durch die Gleichung $\vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{r}_g$ gegeben, so berechnet man den Parameter t, indem man die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzt: $((\vec{q} + t \cdot \vec{r}_g) - \vec{p}) \cdot \vec{r}_g = 0$

Der so ermittelte Wert für t wird in die Geradengleichung eingesetzt, sodass man den Ortsvektor zum Punkt F berechnen kann. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{FP}$ ergibt dann den gesuchten Abstand d: $d = |\overrightarrow{FP}|$

Beispiel

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(1|5|-5)$ von der Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Als Normalenvektor der Hilfsebene E dient der Richtungsvektor von g:

$$\vec{n} = \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also kann die Hilfsebene durch die Normalenform

$$E:\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

dargestellt werden. Wird nun die Geradengleichung eingesetzt, so erhält man:

$$\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-52 + 26t = 0$$

$$t = 2$$

Einsetzen in die Gleichung von g ergibt den Ortsvektor zum Lotfußpunkt F:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

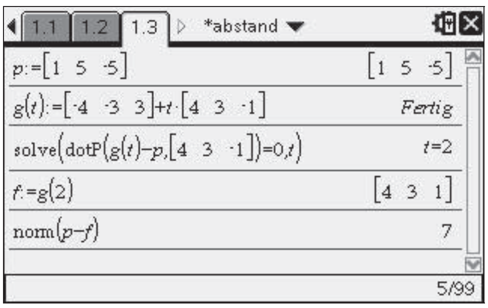
Somit beträgt der gesuchte Abstand d:

$$d = |\overrightarrow{FP}| = |\vec{p} - \vec{f}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 7$$

CAS

Hinweise für den CAS-Einsatz:

Im Bild rechts wird gezeigt, wie dieser Rechenweg mit dem CAS-Rechner ausgeführt werden kann.

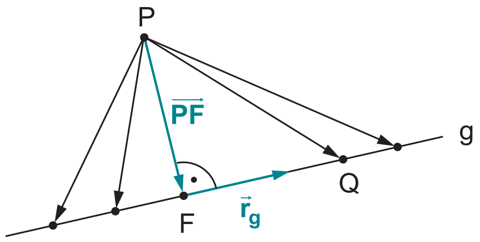


Lösungsmöglichkeit 2 a

Man bestimmt die Länge des Vektors $\overrightarrow{PF}$ mithilfe der Bedingung, dass diese Länge minimal wird. Diese minimale Länge entspricht dann dem gesuchten Abstand d.

F ist ein Punkt auf der Geraden g, sodass für den Ortsvektor zum Punkt F gilt:

$\vec{f} = \vec{q} + t \cdot \vec{r}_g$



Der Vektor $\overrightarrow{PF}$ hängt damit vom Parameter t ab, sodass sich für den gesuchten Abstand d die Funktion $d(t) = |\overrightarrow{PF}|$ ergibt. Mit den Mitteln der Analysis ist dann das Minimum dieser Funktion zu bestimmen.

Nach der Formel zur Berechnung der Länge eines Vektors (vgl. Abschnitt 4.1) ist die Funktion d(t) eine Wurzelfunktion. Um einfacher rechnen zu können, untersucht man stattdessen die quadratische Funktion $q(t) = d(t)^2 = |\overrightarrow{PF}|^2$ auf ihre Minimalstelle, da diese mit der Minimalstelle der Wurzelfunktion übereinstimmt.

Beispiel

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(1|2|3)$ von der Geraden

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Lösung:

Der Ortsvektor zum Punkt F auf der Geraden g hat die Koordinaten

$\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Also lautet der Verbindungsvektor:

$$\overrightarrow{PF} = \vec{f} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich als Zielfunktion:

$$q(t) = d(t)^2 = |\overrightarrow{PF}|^2 = (2+t)^2 + (1+0t)^2 + (-2+2t)^2 = 5t^2 - 4t + 9$$

Bekanntlich sind nun zur Bestimmung des Minimums entweder die Koordinaten des Scheitelpunktes durch Umwandlung dieser Parabelgleichung in die Scheitelpunktform zu suchen oder die Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} q'(t) &= 0 \\ 10t - 4 &= 0 \\ t &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Wegen $q''\left(\frac{2}{5}\right) = 10 > 0$ liegt bei $t = \frac{2}{5}$ tatsächlich das Minimum.

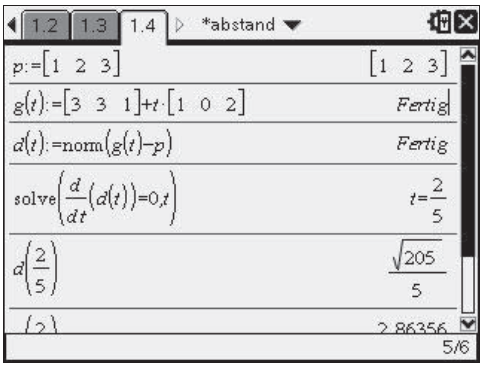
Das bedeutet, dass für $t = \frac{2}{5}$ der Vektor $\overrightarrow{PF}$ die kürzeste Länge hat. Diese Länge entspricht dem gesuchten Abstand d und beträgt:

$$d = d\left(\tfrac{2}{5}\right) = \sqrt{q\left(\tfrac{2}{5}\right)} = \sqrt{5 \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 - 4 \cdot \tfrac{2}{5} + 9} = \sqrt{\tfrac{41}{5}} \approx 2{,}86$$

CAS

Hinweise für den CAS-Einsatz:

Im Bild rechts wird gezeigt, wie dieser Rechenweg mit dem CAS-Rechner ausgeführt werden kann. Dabei wird hier die Abstandsfunktion d(t) selbst und nicht ihr Quadrat betrachtet.



Lösungsmöglichkeit 2 b

Wie bei Lösungsmöglichkeit 2 a soll die Länge des Vektors $\overrightarrow{PF}$ minimal werden. Allerdings nutzt man jetzt die Kenntnis aus, dass die Länge des Vektors $\overrightarrow{PF}$ genau dann minimal ist, wenn er senkrecht zur Geraden g verläuft, also senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{r}_g$ der Geraden steht. Das Skalarprodukt aus diesen beiden Vektoren muss also 0 ergeben (vgl. Abschnitt 4.2):

$$\overrightarrow{PF} \cdot \vec{r}_g = 0$$

Mit $\vec{f} = \vec{q} + t \cdot \vec{r}_g$ folgt: $((\vec{q} + t \cdot \vec{r}_g) - \vec{p}) \cdot \vec{r}_g = 0$

Löst man diese Gleichung nach t auf, so erhält man einen Wert t_0.

Diesen setzt man für t in die Gleichung $\overrightarrow{PF} = \vec{f} - \vec{p} = \vec{q} + t \cdot \vec{r}_g - \vec{p}$ ein und erhält so den Abstand d aus $d(t_0) = |\overrightarrow{PF}|$.

Beispiel

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P(3 | 2 | 1) von der Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Der Ortsvektor zum Punkt F auf der Geraden g hat die Koordinaten

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PF}$ lautet also:

$$\overrightarrow{PF} = \vec{f} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung für das Skalarprodukt aus dem Richtungsvektor $\vec{r}_g$ der Geraden und dem Vektor $\overrightarrow{PF}$ führt auf die Gleichung:

$$\overrightarrow{PF} \cdot \vec{r}_g = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$-8 + 26 t_0 = 0$$

$$t_0 = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$$

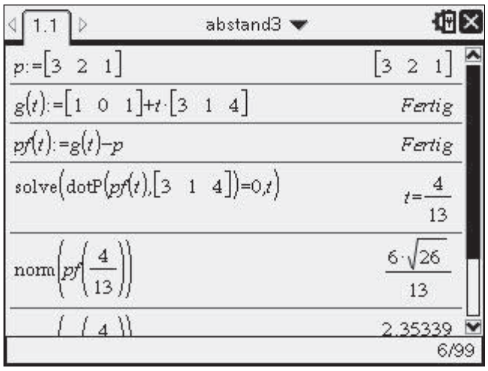
Dieser Wert wird in die Gleichung für den Vektor $\overrightarrow{PF}$ eingesetzt und anschließend wird die Länge dieses Vektors berechnet:

$$\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -22 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left| \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -22 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = \frac{6}{13} \cdot \sqrt{26} \approx 2{,}35$$

CAS *Hinweise für den CAS-Einsatz:*

Bei der CAS-Lösung wird der Vektor $\overrightarrow{PF}$ als Funktion in Abhängigkeit von t definiert. Dies ist praktisch, da so zum Schluss der für t errechnete Wert direkt in die Gleichung für $\overrightarrow{PF}$ eingesetzt werden kann.



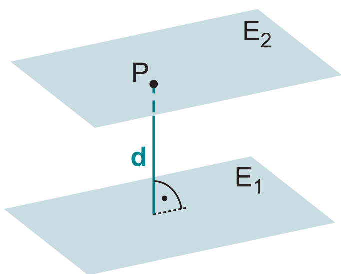
Aufgabe 91. Bestimmen Sie auf drei verschiedene Arten den Abstand des Punktes A(5|2|4) bzw. des Punktes B(5|−6|6) von der Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8.3 Abstand zweier Ebenen und Abstand von Gerade und Ebene

Zwei Ebenen können sich schneiden, sie können identisch sein oder echt parallel zueinander liegen. Nur im letzten Fall ist es sinnvoll, von einem Abstand zwischen den beiden Ebenen zu sprechen.

Dieses Abstandsproblem kann auf das bereits behandelte Problem „Abstand Punkt–Ebene“ zurückgeführt werden: Es reicht aus, sich einen beliebigen Punkt P in einer der beiden Ebenen (z. B. E_2) zu suchen und dann den Abstand dieses Punktes P zur anderen Ebene (hier E_1) zu berechnen.

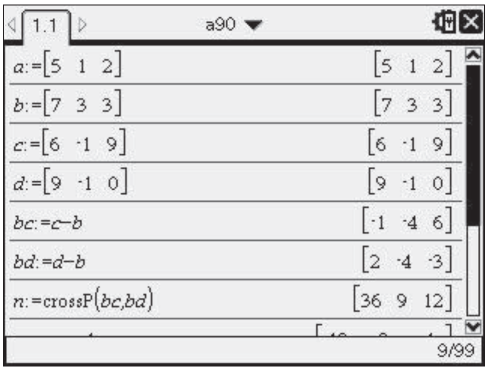


Mithilfe des Ortsvektors zum Punkt B als Punkt der Ebene E erhält man den Abstand des Punktes A zur Ebene:

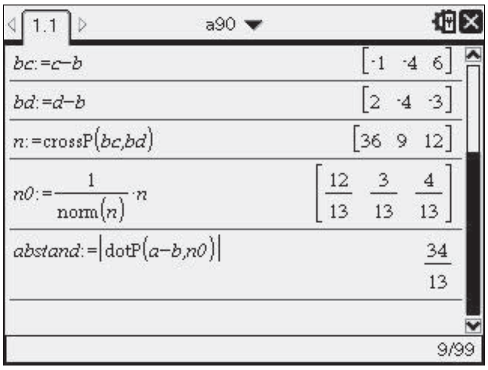
$$\mathbf{d} = \left| \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{39} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{39} \cdot |-102| = \mathbf{\frac{34}{13}}$$

Exemplarisch wird die Lösung von Teilaufgabe d auch mit dem CAS-Rechner gezeigt.

Um die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BD}$ zu berechnen, werden zunächst die Ortsvektoren zu den einzelnen Punkten definiert.



Die Hesse'sche Normalenform der Ebene E wird weder bei den handschriftlichen noch bei den CAS-Lösungen explizit angegeben. Sie findet sich aber etwas versteckt in der Formel für die Abstandsberechnung wieder.



91. *Weg 1:*

Hilfsebene E_1, die orthogonal zur Geraden g verläuft und A enthält:

$$E_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x_1 - 5) - (x_2 - 2) + 3(x_3 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 20$$

Schnitt der Ebene E_1 mit der Geraden g:

$$2 \cdot (1 + 2r) - (4 - r) + 3 \cdot (-2 + 3r) = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 14r = 28 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2$$

Den Schnittpunkt S erhält man durch Einsetzen von $r = 2$ in die Geradengleichung von g: $S(5\,|\,2\,|\,4)$

Der Schnittpunkt entspricht dem Punkt A, d. h., **A liegt auf der Geraden** (und besitzt damit den Abstand $\mathbf{d = 0}$ von g).

Analog bestimmt man eine Hilfsebene E_2, die den Punkt B enthält:

$$E_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x_1 - 5) - (x_2 + 6) + 3(x_3 - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 34$$