MEHR
ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Analysis

Bayern

STARK

Inhalt

Autor: Horst Lautenschlager

Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, dass Sie sich beim Ansehen der Videos im WLAN befinden. Haben Sie keine Möglichkeit, den QR-Code zu scannen, finden Sie die Lernvideos auch unter:
http://qrcode.stark-verlag.de/940021V

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Unterricht, Klausuren und die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik (Teilgebiet Analysis) umfassend unterstützt.

Bei der Aufbereitung des Stoffs wurde berücksichtigt, dass in der Oberstufe und auch bei den Prüfungsaufgaben weniger Gewicht auf formale Rechenfähigkeiten und schematische Verfahrensweisen gelegt wird, gleichzeitig aber das Wissen und das Anwenden analytischer Grundkenntnisse an Bedeutung gewinnen. Daher werden im ersten Kapitel systematisch die **Eigenschaften reeller Funktionen und deren Funktionsgraphen** analysiert, bevor in den nächsten beiden Kapiteln mit der **Differenzial-** und **Integralrechnung** das Herzstück der Analysis behandelt wird. Die dort erlernten Verfahren werden im abschließenden Kapitel zur Lösung einiger typischer **Anwendungsaufgaben** eingesetzt.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie noch Probleme haben oder welches gerade im Unterricht behandelt wird. Falls Sie dabei auf einen Begriff oder einen Sachverhalt stoßen, bei dem Sie sich unsicher fühlen, können Sie im Stichwortverzeichnis nachschlagen.

Folgende strukturelle Maßnahmen erleichtern Ihnen die Arbeit mit diesem Buch:

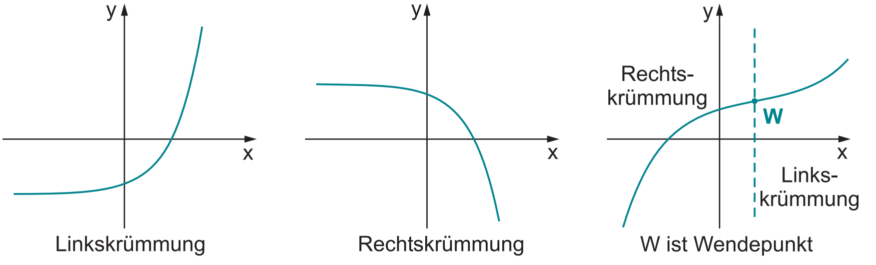
- Die wichtigen **Begriffe** und **Definitionen** eines Lernabschnitts sind möglichst schülergerecht und doch mathematisch präzise formuliert in farbig getönten Feldern, **Regeln, Lehr-** und **Merksätze** in farbig umrandeten Kästen abgelegt.
- An jeden Theorieteil schließen passgenaue und kommentierte **Beispiele** an, die zur Erleichterung des Verständnisses dienen.
- Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.
- Jeder Lernabschnitt schließt mit **Übungsaufgaben**. Zur Selbstkontrolle finden Sie die zugehörigen **Lösungen** am Ende des Buchs vollständig ausgearbeitet.
- Die mit Stern **(✱)** versehenen Aufgaben dienen der Vertiefung und der Förderung des Problemlöseverhaltens. Sie können bei Zeitmangel ohne nachteilige Auswirkungen für das Grundverständnis übersprungen werden.

Viel Erfolg wünscht Ihnen

Horst Lautenschlager

5.3 Krümmungsverhalten und Wendestellen

Gleitet man mit dem Finger auf einem Funktionsgraphen in Richtung zunehmender x-Werte entlang und beschreibt der Finger dabei eine Linkskurve (Rechtskurve), so ist der Graph linksgekrümmt (rechtsgekrümmt).



Von besonderem Interesse sind die Punkte des Graphen, in denen er sein Krümmungsverhalten ändert, also von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht oder umgekehrt.

Definition

Ein Punkt, in dem der Graph einer Funktion sein Krümmungsverhalten ändert, heißt **Wendepunkt**, die zugehörige x-Koordinate heißt **Wendestelle**.
Die Tangente bzw. Normale an den Funktionsgraphen in einem Wendepunkt wird als **Wendetangente** bzw. **Wendenormale** bezeichnet.
Einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente nennt man **Terrassenpunkt**.

Das Krümmungsverhalten einer Funktion können Sie mithilfe ihrer 2. Ableitung ermitteln.

Regel

Hinreichende Bedingung für die Krümmungsart
Ist f eine auf einem offenen Intervall I zweimal differenzierbare Funktion und gilt für alle $x \in I$

- $f''(x) > 0$, dann ist f auf I linksgekrümmt.
- $f''(x) < 0$, dann ist f auf I rechtsgekrümmt.

Die Lage der Wendestellen können Sie mithilfe zweier Lehrsätze ermitteln, die in folgender Regel zusammengestellt sind.

Regel

1. Satz: Notwendige Bedingung für Wendestellen

Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge eine Wendestelle besitzt, dann gilt $f''(x_0) = 0$.

2. Satz: Hinreichende Bedingungen für Wendestellen

a) Wenn für eine zweimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge $f''(x_0) = 0$ gilt und wenn $f''(x)$ beim Fortschreiten über die Stelle x_0 hinweg das Vorzeichen wechselt, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

b) Wenn für eine dreimal differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge $f''(x_0) = 0$ gilt und $f'''(x_0) \neq 0$ ist, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

Diese Kriterien erlauben Ihnen, schrittweise die Wendestellen einer mindestens zwei- bzw. dreimal differenzierbaren Funktion f(x) zu ermitteln.

Regel

Schrittweises Bestimmen von Wendestellen

1. Schritt: Berechnen Sie $f''(x)$.

2. Schritt: Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$.

3. Schritt: Überprüfen Sie für jede Lösung x_0, ob $f''(x)$ beim Fortschreiten von links nach rechts über x_0 hinweg das Vorzeichen wechselt.
- Nutzen Sie hierfür das eventuell schon bekannte Krümmungsverhalten von f aus oder ermitteln Sie für kleine positive, reelle h die Vorzeichen von $f''(x_0 + h)$ und $f''(x_0 - h)$.
- Ist der Nachweis eines Vorzeichenwechsels nicht möglich oder rechnerisch zu aufwendig, fahren Sie unter Schritt 5 fort.

4. Schritt: Werten Sie aus:
- Wechselt $f''(x)$ das Vorzeichen, so ist x_0 eine Wendestelle.
- Bleibt das Vorzeichen von $f''(x)$ unverändert ($+ \to +$ bzw. $- \to -$), dann besitzt f bei x_0 keine Wendestelle.

5. Schritt: Berechnen Sie $f'''(x)$.

6. Schritt: Berechnen Sie den Funktionswert $f'''(x_0)$:
- Ist $f'''(x_0) \neq 0$, so ist x_0 eine Wendestelle.
- Ist $f'''(x_0) = 0$, so lässt sich endgültig keine Aussage darüber machen, ob x_0 eine Wendestelle ist.

7. Schritt: Falls sich x_0 als Wendestelle erwiesen hat, überprüfen Sie, ob $f'(x) = 0$. Wenn ja, so handelt es sich um eine Terrassenstelle.

Beispiele

1. Berechnen Sie die Lage des einzigen Wendepunktes der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

   Lösung:

   Schritt 1: Berechnung der 2. Ableitung von f(x)

   $f'(x) = x \cdot e^x + e^x = e^x(x+1)$ $\quad$ $f''(x) = e^x \cdot 1 + (x+1) \cdot e^x = e^x(x+2)$

Schritt 2: Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung

$f''(x) = e^x (x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -2 \;\; (\text{da } e^x > 0)$

Schritt 3: $f''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0 = -2$ das Vorzeichen, da e^x stets positiv ist, $x+2$ für $x < -2$ negativ und für $x > -2$ positiv ist.

Schritt 4: Wegen des Vorzeichenwechsels ist $x_0 = -2$ Wendestelle von f.

2. Berechnen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = x^2 e^x$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Geben Sie damit die Lage aller Wendestellen der Funktion an.

   Lösung:

   Schritt 1: Berechnung der 2. Ableitung von f(x)

   $f'(x) = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x = e^x (x^2 + 2x)$

   $f''(x) = e^x \cdot (2x+2) + (x^2 + 2x) \cdot e^x = e^x (x^2 + 4x + 2)$

   Regel zur Krümmungsart: Wegen $e^x > 0$ stimmt das Vorzeichen von $f''(x)$ mit dem Vorzeichen des quadratischen Terms $x^2 + 4x + 2$ überein. Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen finden Sie, dass die nach oben offene Parabel $y = x^2 + 4x + 2$ die x-Achse bei

   $x_1 = -2 - \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = -2 + \sqrt{2}$

   schneidet; sie verläuft daher auf $]-\infty; -2-\sqrt{2}[\;\cup\;]-2+\sqrt{2}; +\infty[$ über und auf $]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$ unter der x-Achse.

   Daraus folgt für

   - $x \in \,]-\infty; -2-\sqrt{2}[\,\cup\,]-2+\sqrt{2}; +\infty[$: $f''(x) > 0$ und f linksgekrümmt
   - $x \in \,]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$: $f''(x) < 0$ und f rechtsgekrümmt

   Schritt 4: f besitzt Wendestellen bei $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ und $x_2 = -2 + \sqrt{2}$.

3. Zeigen Sie, dass der Ursprung Terrassenpunkt der Funktion $f(x) = x^3 e^x$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist.

   Lösung:

   Mithilfe der Produktregel berechnen Sie zunächst $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$:

   $f'(x) = x^3 \cdot e^x + e^x \cdot 3x^2 = e^x (x^3 + 3x^2)$

   $f''(x) = e^x \cdot (3x^2 + 6x) + (x^3 + 3x^2) \cdot e^x = e^x (x^3 + 6x^2 + 6x)$

   $f'''(x) = e^x \cdot (3x^2 + 12x + 6) + (x^3 + 6x^2 + 6x) \cdot e^x = e^x (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$

   Dann gilt:

   - **Satz 2 b über Wendestellen:** f hat bei $x_0 = 0$ eine Wendestelle, weil $f''(0) = e^0 \cdot 0 = 0$ und $f'''(0) = e^0 \cdot 6 = 6 \neq 0$.
   - **Schritt 7:** Wegen $f'(0) = e^0 \cdot 0 = 0$ besitzt die Wendetangente die Steigung 0 und verläuft horizontal.

   f besitzt bei $x = 0$ also einen Terrassenpunkt.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{2x}{1-x}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ keine Wendestelle besitzt.

Lösung:

Schritt 1: Berechnung der 2. Ableitung von f(x)

$$f'(x) = \frac{(1-x)\cdot 2 - 2x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1-x)^2\cdot 0 - 2\cdot 2\cdot(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Satz 1 über Wendestellen: Besäße f eine Wendestelle, hätte die 2. Ableitung mindestens eine Nullstelle. Dies ist aber nicht der Fall, weil der Zähler des Quotienten $\frac{4}{(1-x)^3}$ nicht null wird.

Aufgaben

132. Zeigen Sie, dass die Graphen der folgenden Funktionen genau einen Wendepunkt aufweisen, und berechnen Sie dessen Koordinaten.

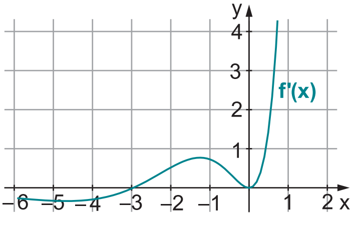
a) $f(x) = \frac{x+1}{e^{2x}}$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

b) $f_k(x) = 4e^{-x}(k - e^{-x})$
$\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R};\ k \in \mathbb{R}^+$

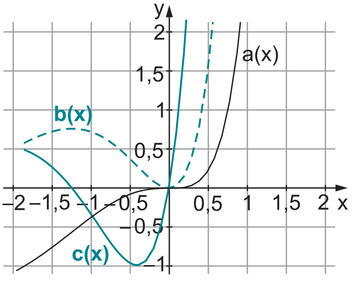
133. Wo schneidet die einzige Wendetangente des Graphen der Funktion $f(x) = x\cdot e^{1-x}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ die x-Achse?

134. Zeigen Sie, dass alle Wendetangenten der Schar $f_k(x) = (x-k)\cdot e^{2-\frac{x}{k}}$, $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^+$ parallel zueinander verlaufen.

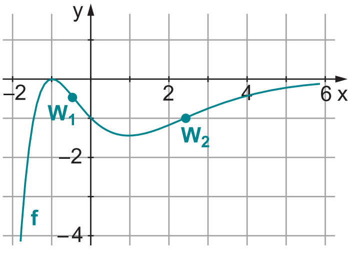
135. Die Skizze zeigt den Graphen der ersten Ableitung f' einer Funktion f.
Geben Sie die Lage der Wendestellen der Funktion f möglichst genau an und begründen Sie Ihr Vorgehen.



✳ 136. Die Skizze zeigt die Graphen einer Funktion f(x) und ihrer Ableitungen f'(x) und f''(x).
Welcher Graph gehört zu welcher Funktion?
Begründen Sie Ihre Aussagen.



✱ **137.** Die Skizze zeigt den Graphen G_f einer Funktion f(x) mit seinen beiden Wendepunkten.
Skizzieren Sie den Graphen $G_{f'}$ der Funktion f'(x), wenn alle Schnittpunkte von G_f und $G_{f'}$ auf den Koordinatenachsen liegen.
Begründen Sie Ihr Vorgehen.



✱ **138.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Für die Widerlegung genügt die Skizze eines geeigneten Funktionsgraphen.

a) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion eine Wendestelle besitzt, dann besitzt sie auch mindestens ein relatives Extremum.

b) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion in Teilen ihrer Definitionsmenge rechts- und in anderen linksgekrümmt ist, dann besitzt sie auch eine Wendestelle.

c) Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ nur linksgekrümmt ist, dann besitzt sie mindestens ein relatives Minimum.

129.
- Eine Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ besitzt wegen $f(1) = 0$ an der Stelle $x_0 = 1$ eine horizontale Tangente, aber kein Extremum, weil f dort nicht das Vorzeichen wechselt. Der einzige von den abgebildeten Graphen mit dieser Eigenschaft ist h(x). Also gilt $h'(x) = f(x)$.
- Eine Funktion G mit $G'(x) = g(x)$ besitzt an der Stelle $x_1 = -1$ bzw. $x_2 = 1$ ein relatives Maximum bzw. Minimum, weil g dort eine Nullstelle besitzt und das Vorzeichen von + nach – bzw. von – nach + wechselt. Der einzige von den abgebildeten Graphen mit dieser Eigenschaft ist f(x). Also gilt $f'(x) = g(x)$.
- Eine Funktion J mit $J'(x) = j(x)$ besitzt an der Stelle $x_1 = -2$ bzw. $x_2 = 0$ ein relatives Maximum bzw. Minimum, weil j dort eine Nullstelle besitzt und das Vorzeichen von + nach – bzw. von – nach + wechselt. Der einzige von den abgebildeten Graphen mit diesen Eigenschaften ist i(x). Also gilt $i'(x) = j(x)$.

130. **Schritt 1:** Berechnung der 1. Ableitung von $f_k(x)$

$$f_k'(x) = \cos x + k$$

Schritt 2: Berechnung der Nullstellen der 1. Ableitung

$$f_k'(x) = 0 \iff \cos x = -k$$

Diese Gleichung besitzt wegen $|\cos x| \leq 1$ keine Lösung, wenn $|k| > 1$.

Daher besitzt f_k nach Satz 1 keine relativen Extrema, wenn $|k| > 1$.

131. **Schritt 1:** Berechnung der 1. Ableitung von w(x)

Nach der Kettenregel gilt: $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

Wegen $\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} > 0$ gilt: $w'(x) \begin{cases} > 0 & \iff & f'(x) > 0 \\ = 0 & \iff & f'(x) = 0 \\ < 0 & \iff & f'(x) < 0 \end{cases}$

Daher besitzt w'(x) die gleichen Nullstellen und das gleiche Vorzeichenverhalten an diesen Nullstellen wie die Funktion f(x) und damit nach Satz 1 und 2 über relative Extrema an den gleichen Stellen die gleiche Art von relativen Extrema wie die Funktion f(x).

132. a) **Schritt 1:** Berechnung der 2. Ableitung von f(x)

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 1 - (x+1) \cdot e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}} = -\frac{2x+1}{e^{2x}}$$

$$f''(x) = -\frac{e^{2x} \cdot 2 - (2x+1) \cdot e^{2x} \cdot 2}{e^{4x}} = -\frac{2 - (2x+1) \cdot 2}{e^{2x}} = \frac{4x}{e^{2x}}$$

Schritt 2: Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung

$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x}{e^{2x}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

f besitzt nach Satz 1 über die Wendestellen höchstens bei $x=0$ eine Wendestelle.

Schritt 3: Da e^{2x} stets positiv ist, gilt:

$f''(x) \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x}{e^{2x}} \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \gtrless 0$

Schritt 4: $f''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0=0$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f.

Wegen $f(0)=1$ lauten die Koordinaten des Wendepunkts $W(0\,|\,1)$.

b) **Schritt 1:** Nach Beseitigung der Klammer mittels Distributivgesetz,

$f_k(x)=4e^{-x}\cdot(k-e^{-x})=4ke^{-x}-4e^{-2x}$,

berechnen Sie die 2. Ableitung von $f_k(x)$ mithilfe der Kettenregel:

$f_k'(x)=4ke^{-x}\cdot(-1)-4e^{-2x}\cdot(-2)=-4ke^{-x}+8e^{-2x}$

$f_k''(x)=-4ke^{-x}\cdot(-1)+8e^{-2x}\cdot(-2)=4ke^{-x}-16e^{-2x}=4e^{-x}(k-4e^{-x})$

Schritt 2: $f_k''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4e^{-x}(k-4e^{-x})=0 \quad \Leftrightarrow \quad k-4e^{-x}=0$

$\Leftrightarrow \quad e^{-x}=\frac{k}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x=-\ln\frac{k}{4}=\ln\frac{4}{k}$

f_k besitzt nach Satz 1 über die Wendestellen höchstens bei $x=\ln\frac{4}{k}$ eine Wendestelle.

Schritt 3: Wegen $4e^{-x}>0$ gilt:

$f_k''(x) \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; k-4e^{-x} \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{k}{4} \gtrless e^{-x} \;\Leftrightarrow\; \ln\frac{k}{4} \gtrless -x \;\Leftrightarrow\; x \gtrless \ln\frac{4}{k}$

Schritt 4: $f_k''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0=\ln\frac{4}{k}$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f_k.

$f_k(\ln\frac{4}{k})=4ke^{\ln\frac{k}{4}}-4e^{2\ln\frac{k}{4}}=\frac{4k\cdot k}{4}-4\left(\frac{k}{4}\right)^2=\frac{3k^2}{4} \quad \Rightarrow \quad W_k\left(\ln\frac{4}{k}\,\middle|\,\frac{3k^2}{4}\right)$

133. Sie müssen zunächst (in vier Schritten) die Koordinaten des Wendepunkts ermitteln; anschließend können Sie den Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse mithilfe des Newton-Verfahrens bestimmen.

Schritt 1: $f'(x)=x\cdot e^{1-x}\cdot(-1)+e^{1-x}\cdot 1=e^{1-x}(1-x)$

$f''(x)=e^{1-x}\cdot(-1)+(1-x)\cdot e^{1-x}\cdot(-1)=e^{1-x}(x-2)$

Schritt 2: $f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1-x}(x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

f besitzt höchstens bei $x=2$ eine Wendestelle.

Schritt 3: Wegen $e^{1-x}>0$ gilt:

$f''(x) \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2 \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \gtrless 2$

Schritt 4: f''(x) wechselt an der Stelle $x_0 = 2$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f.

Durch Einsetzen von $f(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1}$ und $f'(2) = e^{1-2}(1-2) = -e^{-1}$ in die Formel des Newton-Verfahrens (vgl. S. 89), erhalten Sie die x-Koordinate x_T des gesuchten Schnittpunkts:

$$x_T = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2e^{-1}}{-e^{-1}} = 2 - (-2) = 4$$

Die Wendetangente schneidet die x-Achse im Punkt $(4\,|\,0)$.

134. Hier müssen Sie zeigen, dass die Steigungen der Scharkurven an den Wendestellen unabhängig vom Scharparameter k sind.

Schritt 1: $f_k'(x) = (x-k) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) + e^{2-\frac{x}{k}} \cdot 1 = e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{x}{k} + 2\right)$

$$f_k''(x) = e^{2-\frac{x}{k}} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{x}{k} + 2\right) \cdot e^{2-\frac{x}{k}} \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) = e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{3}{k} + \frac{x}{k^2}\right)$$

Schritt 2: $f_k''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2-\frac{x}{k}}\left(-\frac{3}{k} + \frac{x}{k^2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3}{k} + \frac{x}{k^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3k$

Schritt 3: Wegen $e^{2-\frac{x}{k}} > 0$ und $k \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$f_k''(x) \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{3}{k} + \frac{x}{k^2} \gtrless 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{k^2} \gtrless \frac{3}{k} \;\Leftrightarrow\; x \gtrless 3k$$

Schritt 4: $f_k''(x)$ wechselt an der Stelle $x_0 = 3k$ das Vorzeichen, x_0 ist daher nach Satz 2 a Wendestelle von f_k.

Wegen $f_k'(3k) = e^{2-\frac{3k}{k}}\left(-\frac{3k}{k} + 2\right) = -e^{-1}$ haben alle Wendetangenten die gleiche Steigung und verlaufen daher parallel.

135. Der Graph der Funktion f besitzt dort Wendepunkte, wo sich sein Krümmungsverhalten ändert. Da dieses wegen f''(x) = (f')'(x) durch das Steigungsverhalten von f' bestimmt wird, besitzt der Graph von f' also bei den Wendestellen von f relative Extrema. Der Skizze entnimmt man, dass f' bei

- $x_1 \approx -4{,}7$ vom Fallen ins Steigen,
- $x_2 \approx -1{,}3$ vom Steigen ins Fallen,
- $x_3 = 0$ vom Fallen ins Steigen

wechselt. Daher sind x_1, x_2, x_3 die Wendestellen von f.

136. Zunächst versuchen Sie im Ausschlussverfahren herauszufinden, welcher Graph f(x) ist.

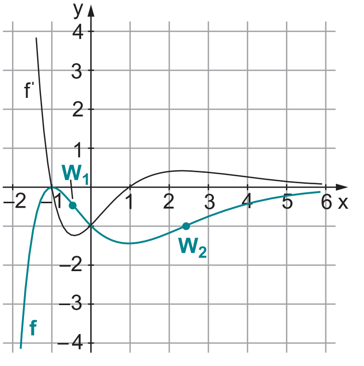
- Annahme c(x) = f(x): Dann wäre entweder a(x) = f'(x) oder b(x) = f'(x). Beides ist nicht möglich, weil weder a(x) noch b(x) bei $x_0 = -0{,}4$ eine Nullstelle aufweisen, obwohl c dort ein relatives Minimum besitzt.
  Die Annahme c(x) = f(x) ist daher falsch.

- Annahme $b(x) = f(x)$: Dann wäre entweder $a(x) = f'(x)$ oder $c(x) = f'(x)$.
  - $a(x) = f'(x)$ ist nicht möglich, da $a(x)$ an der Stelle $x_0 = -1{,}3$ keine Nullstelle besitzt, obwohl $b(x)$ dort ein relatives Maximum aufweist.
  - $c(x) = f'(x)$ ist nicht möglich, weil dann $a(x) = f''(x)$ wäre und $b(x)$ an der Stelle $x_0 = -0{,}4$ eine Wendestelle aufweist, obwohl $a(x)$ dort keine Nullstelle besitzt.

  Die Annahme $b(x) = f(x)$ ist daher falsch.

Es bleibt nur noch $f(x) = a(x)$. Da $a'(x) \neq c(x)$, weil $a(x)$ bei $x_0 = -1{,}3$ keine horizontale Tangente besitzt, obwohl $c(x)$ dort eine Nullstelle aufweist, gilt $a'(x) = b(x)$ und somit: $f(x) = a(x)$, $f'(x) = b(x)$, $f''(x) = c(x)$

137. Folgende Überlegungen führen zum rechts gezeigten Graphen von f':



- Die Nullstellen von $f'(x)$ liegen dort, wo G_f horizontale Tangenten besitzt, also bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
- $G_{f'}$ verläuft dort unterhalb der x-Achse, wo G_f streng monoton fällt, und dort oberhalb der x-Achse, wo G_f streng monoton steigt.
- $G_{f'}$ weist dort ein relatives Minimum auf, wo G_f von einer Rechts- in eine Linkskrümmung übergeht.
- $G_{f'}$ weist dort ein relatives Maximum auf, wo G_f von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht.
- Gemäß Aufgabenstellung liegen alle Schnittpunkte von G_f und $G_{f'}$ auf den Koordinatenachsen, also bei $(-1|0)$ und $(0|-1)$.

138. Alle Aussagen sind falsch.

a) Die Funktion
$f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$
ist zweimal differenzierbar und weist bei $x_0 = 0$ eine Wendestelle auf, besitzt aber kein relatives Extremum.