

2020

# Abitur

Original-Prüfung  
mit Lösungen

**MEHR  
ERFAHREN**

Gymnasium ... berg

## Mathematik

- + Offizielle Musteraufgaben
- + Merkhilfe
- + Online-Glossar

**ActiveBook**  
• Interaktives  
Training



**STARK**

# Inhaltsverzeichnis

## Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Das Abitur 2020 .....	I
Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik .....	I
Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung .....	III
Bewertung der Prüfungsarbeiten .....	IV
Der Aufbau des Buches .....	IV
Einsatz eines WTR am Beispiel des TI-30X Plus MathPrint .....	VI

## Hilfsmittel

Merkhilfe Mathematik .....	M-1
----------------------------	-----

## Aufgabensammlung zum Pflichtteil

Pflichtteil 2013 .....	1
Pflichtteil 2014 .....	3
Pflichtteil 2015 .....	4
Pflichtteil 2016 .....	6
Pflichtteil 2017 .....	8
Pflichtteil 2018 .....	9
Lösungsvorschlag .....	11

## Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

<b>Ana 1</b>	<b>Medikament</b> – grafische Bestimmung von Wirkstoffmenge, ..... momentaner Änderungsrate und mittlerer Wirkstoffmenge; $g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0,05 \cdot t})$ – langfristige Wirkstoffmenge; Monotonie; Berechnung eines Zeitpunktes und einer mittleren Wirkstoffmenge; Frage im Sachzusammenhang zu einer Gleichung	39
<b>Ana 2</b>	$g_a(x) = ax^2 + 6x + 1$ ..... Berührung; Ortskurve der Scheitelpunkte	40
<b>Ana 3</b>	$f(t) = 18 - 10 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ ..... <b>Temperaturverlauf</b> – Skalieren der Koordinatenachsen; Durchschnittstemperatur	41
<b>Ana 4</b>	$f(x) = \frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3}$ ..... Definitionsmenge; Nullstelle; Hochpunkt; Monotonie; Tangente; Kegel als Rotationskörper; Nullstellen einer Integralfunktion; Flächeninhalt	41
<b>Ana 5</b>	$g(x) = (\sin(x))^2$ ; $g(x) = a \cdot \cos(bx) + d$ ..... Hochpunkt; Parameterbestimmung	42
<b>Ana 6</b>	<b>Wassertank</b> – grafische Bestimmung von maximaler Zuflussrate .... und Wassermenge; Graph der Höhe des Wasserspiegels	42
<b>Ana 7</b>	$f(x) = 8x \cdot e^{-x}$ ; $g(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$ ..... Zuordnung von Graphen; Schnittpunkte; Flächeninhalt Dreieck; grafische Untersuchung einer Gleichung; Berechnung Flächeninhalt	43
<b>Ana 8</b>	$f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$ ..... Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ ; Ableitung; Wendetangenten; Parallelität; Zuordnung von Graphen; Parameterbestimmung	43
<b>Ana 9</b>	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ ; $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5$ ..... Extrempunkte; grafische Untersuchung einer Gleichung; Verschiebung des Graphen; Punktsymmetrie; Integralberechnung; Integralbestimmung anhand des Graphen; Funktionenschar – Untersuchung auf Tangenten parallel zur x-Achse	44

<b>Ana 10</b>	$h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}; k(x) = \frac{1}{2}x + s + \frac{t}{x+1}$	45
---------------	--	----

**Getränkedose** – h beschreibt die Höhe des Schwerpunkts in Abhängigkeit von der Füllhöhe; grafische Bestimmung von Füllhöhen; Bewegung des Schwerpunkts; geringste Höhe des Schwerpunkts; Berechnung von Füllhöhen; Parameterbestimmung

Lösungsvorschlag	46
------------------	----

### Aufgaben früherer Abiturjahrgänge

<b>2015 A 1</b>	$f(x) = \frac{1}{125}x^4$	61
-----------------	---------------------------	----

**Lastkahn** – Tiefe, Breite und Volumen des Laderaums; Neigung des Bodens; orthogonale Stützen; Breite einer Zwischendecke

<b>2016 A 1.2</b>	$h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$	61
-------------------	--------------------------------------	----

Berührkreis; Koordinaten des Mittelpunkts

<b>2017 A 1.2</b>	$g(x) = x - \frac{1}{x^3}$	61
-------------------	----------------------------	----

Tangente durch vorgegebenen Punkt; Bestimmung des Berührpunktes; kleinster Abstand eines Kurvenpunktes zu einer Geraden

<b>2018 A 1.2</b>	$f_k(x) = k \cdot e^x - 2x \cdot e^x$	62
-------------------	---------------------------------------	----

Nullstelle; Stammfunktion; Flächeninhalt

Lösungsvorschlag	63
------------------	----

### Zusätzliche Übungsaufgaben

<b>A 1</b>	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	69
------------	--------------------------	----

Wendepunkt; Gerade durch Extrempunkte; Verschiebung und Streckung des Graphen; berührende Parabel; Flächeninhalte; Tangente; Anzahl Schnittpunkte des Graphen mit  $y = mx$  in Abhängigkeit von m

<b>A 2</b>	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x; f_a(x) = \frac{1}{4}x^4 - a \cdot x$	69
------------	--	----

Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ ; Schnittwinkel; Monotonie; Nullstellen einer Integralfunktion; Spiegelung an y-Achse; Parameterbestimmung anhand von Graphen; Ortskurve

<b>A 3</b>	$f(x) = \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}$ .....	70
	<b>Damm</b> – Höhe eines Weges; Flächeninhalt und Volumen; Steigung; berührende Parabel; Bestimmung eines Punktes auf einer Normalen mit vorgegebenem Abstand zum Kurvenpunkt	
<b>A 4</b>	$f(t) = -0,04 \cdot (t^3 - 19,5t^2 + 90t)$ .....	71
	<b>Wasserbecken</b> – momentane Änderungsrate; Nullstellen; Extremwerte; Skalieren der Koordinatenachsen; Ergänzen eines Graphen; Aufgabe im Sachzusammenhang zu einer Integralgleichung; Wasservolumen bei Beobachtungsbeginn; Bestimmung einer linearen Funktion	
<b>A 5</b>	$f(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$ .....	71
	Definitionsmenge; Asymptoten; Schnittpunkte mit x-Achse; Monotonie; Zeichnung; Inhalt einer nach rechts offenen Fläche; Tangente; Dreieck; Rotationskegel; Berührung; Bestimmung einer Funktionsgleichung; Nullstellen einer Integralfunktion	
<b>A 6</b>	$f(x) = (2-x) \cdot e^x$ ; $F(x) = (3-x) \cdot e^x$ .....	72
	Asymptote; Hochpunkt; Monotonie; Graph von f; grafische Untersuchung einer Gleichung; Normale; Flächeninhalt; Parabelschar; Tangenten durch einen vorgegebenen Punkt	
<b>A 7</b>	$f(t) = 1000 \cdot (e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,5 \cdot t})$ .....	73
	<b>Fahrzeuge</b> – Interpretation von Flächen und Zeitpunkten an vorgegebenem Geschwindigkeits-Zeitdiagramm; Berechnung der größten Geschwindigkeit sowie von Streckenlängen und Zeitpunkten; Tangente	
<b>A 8</b>	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) + 0,5$ .....	73
	Nullstellen; Integralbestimmung anhand des Graphen; zusammengesetzte Funktion; lokales Minimum	
	Lösungsvorschlag .....	75

---

## Aufgabensammlung zum Wahlteil – Analytische Geometrie

---

### Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

<b>Geo 1</b>	<b>Kunstwerk</b> – Darstellung eines Körpers; Koordinatengleichung einer Ebene; Endpunkt einer Stange; Berührung einer Kugel mit der Stange; Lage einer Holzplatte zur Stange (Schnitt Gerade–Ebene) .....	97
--------------	--	----

<b>Geo 2</b>	<b>Forschungs-U-Boote</b> – Geradengleichung; Parameterintervall; ..... Positionsbestimmung; Geschwindigkeit; windschiefe Geraden; Abstand Punkt – Gerade; Untersuchung der Bahngeraden anhand von Projektionen in Koordinatenebenen	98
<b>Geo 3</b>	<b>Ebene und Geradenschar</b> – Schnittpunkt Gerade – Ebene; ..... orthogonale Geraden; Schnittwinkel Gerade – Ebene; Angabe einer Gleichung zu einem bestimmten Schnittwinkel; Ebene F, in der die Geradenschar liegt; Bestimmung einer Geraden h in der Ebene F, die nicht zur Geradenschar gehört	99
<b>Geo 4</b>	<b>Markise</b> – Koordinatengleichung einer Ebene; Schnittwinkel ..... von Ebenen; Abstandsbestimmung; Schatten der Markise auf der Terrasse; Einfahren der Markise und Lagebestimmung der neuen Endpunkte der Markise	99
	Lösungsvorschlag .....	101

#### **Aufgaben früherer Abiturjahrgänge**

<b>2013 B 1.1</b>	<b>Würfel</b> – Darstellung in einem Koordinatensystem; Winkel; .... Abstand Ebene – Gerade; Ebenenschar; gemeinsame Punkte einer Scharebene mit dem Würfel	111
<b>2013 B 2.1</b>	<b>Ausstellungsraum</b> – Koordinatengleichung einer Ebene; ..... gleichschenkliges Dreieck; Flächeninhalt Dreieck; Abstand Punkt – Ebene; Schnitt Gerade – Ebene	111
<b>2014 B 1.1</b>	<b>Quader in Pyramide</b> – Koordinatengleichung einer Ebene; .. Schnittwinkel von Ebenen; Flächeninhalt Dreieck; Quader in Pyramide; Würfel in Pyramide	112
<b>2014 B 2.1</b>	<b>Rechteckige Platte</b> – Koordinatengleichung einer Ebene; ..... Darstellung in einem Koordinatensystem; Winkel zwischen Gerade und Ebene; Schatten eines Stabes auf der Platte; bewegte Lichtquelle – Kollisionspunkte mit Platte	112
<b>2016 B 1.1</b>	<b>Tribüne</b> – Koordinatengleichung einer Ebene; ..... Schnittwinkel von Ebenen; Flächeninhalt eines Rechtecks; Sicherheitsabstand zwischen Nutzfläche und Dachfläche der Tribüne; Einpassen einer senkrechten Stütze bestimmter Länge zwischen Dach und Nutzfläche	113
<b>2016 B 2.1</b>	<b>Pyramide</b> – Darstellung in einem Koordinatensystem; ..... Berechnung des Umfangs der Schnittfläche der Pyramide mit einer Ebene; Koordinatengleichung der Ebene; Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks; Punkt im Innern der Pyramide mit gleichem Abstand zu zwei Pyramidenflächen und der Ebene	113

<b>2017 B 1</b>	<b>Container</b> – Koordinatengleichung einer Ebene; Nachweis ... für Trapez; Flächeninhalt Trapez; Abstand Punkt–Ebene; Ebenenschar: Parameterbestimmung aus vorgegebenem Schnittwinkel	114
<b>2017 B 2</b>	<b>Flugzeuge</b> – Bestimmung einer Fluggeschwindigkeit; ..... Zeitpunkt für eine bestimmte Höhe; Steigwinkel eines Flug- zeugs; Schnittpunkt der Flugbahnen zweier Flugzeuge; Bedingung für Sicherheitsabstand; Punkte auf der Meeres- oberfläche mit gleichem Abstand zu beiden Flugzeugen	114
<b>2018 B 1</b>	<b>Museum</b> – Nachweis für nicht rechtwinkliges Dreieck; ..... Erläutern einer vorgegebenen Rechnung; Flächeninhalt einer dreieckigen Bodenfläche; Überprüfung der Leistung einer Entfeuchtungsanlage; Position eines Scheinwerfers	115
<b>2018 B 2</b>	<b>Ebene und Ebenenschar</b> – Darstellung einer Ebene; ..... Orthogonalität zweier Ebenen; Schnittgerade zweier Ebenen; Schnitt von Ebenen mit den Koordinatenachsen; Pyramide; Parameterbestimmung für ein bestimmtes Volumen; parallele Ebenen	116
Lösungsvorschlag .....		117

---

## Aufgabensammlung zum Wahlteil – Stochastik

---

### Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

<b>Sto 1</b>	<b>Glücksrad</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; Mindest- ..... anzahl an Drehungen; Verlustwahrscheinlichkeit bei einem Glücks- spiel; Bestimmung von $p$ für maximale Verlustwahrscheinlichkeit	141
<b>Sto 2</b>	<b>Schulfest</b> – Gewinnwahrscheinlichkeiten bei einem Kartenspiel; ..... Glücksrad: Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn über Binomial- verteilung; Bestimmung der Mindestanzahl von Gewinnfeldern über die Trefferwahrscheinlichkeit; Spielautomat: faires Spiel	142
<b>Sto 3</b>	<b>Hotel</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomial- ..... verteilung; maximale Anzahl an Reservierungen; rechtsseitiger Hypothesentest; Interpretation des Fehlers 1. Art	143
<b>Sto 4</b>	<b>Schulabschluss</b> – Interpretation von statistischen Daten; ..... Begründung für Binomialverteilung; Berechnung von Wahrschein- lichkeiten über Binomialverteilung	144

<b>Sto 5</b>	<b>Biathlonwettbewerb</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung; Fragestellung im Sachzusammenhang zu einer vorgegebenen Ungleichung	145
<b>Sto 6</b>	<b>Tanzgruppe</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung	145
	Lösungsvorschlag	146

#### **Aufgaben früherer Abiturjahrgänge**

<b>2016 B 1.2</b>	<b>Idealer Würfel mit vorgegebenem Netz</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten auch mit Binomialverteilung; Anpassung des Würfelnetzes über die Trefferwahrscheinlichkeit; rechtsseitiger Hypothesentest	155
<b>2017 C 1</b>	<b>Autofarben</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung; faires Spiel; rechtsseitiger Hypothesentest	155
<b>2017 C 2</b>	<b>Glücksspielautomat</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit und ohne Binomialverteilung; Mindestanzahl an Spielen; durchschnittlicher Verdienst pro Spiel	156
<b>2018 C 1.1</b>	<b>Kunststoffteile</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung; Mindestanzahl an Kunststoffteilen; linksseitiger Hypothesentest	157
<b>2018 C 2</b>	<b>Affe</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit und ohne Binomialverteilung; Abweichung vom Erwartungswert; Bestimmung der Mindestanzahl an zusätzlichen Zifferntasten einer Tastatur über die Trefferwahrscheinlichkeit; rechtsseitiger Hypothesentest	157
	Lösungsvorschlag	159

#### **Zusätzliche Übungsaufgaben**

<b>S 1</b>	<b>Gefäße</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten auch über Binomialverteilung; faires Spiel; Änderung des Auszahlungsbetrags; Mindestanzahl an Spielen; Bestimmung der Kugelanzahl in einem Gefäß	168
<b>S 2</b>	<b>Bauteile</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung; mittlerer Gewinn; Höchstanzahl an Bauteilen in einer Schachtel; rechtsseitiger Hypothesentest	168



<b>S 3</b>	<b>Tetraeder-Würfel</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; ..... Bestimmung eines Intervalls; nicht faires Glücksspiel; Änderung von Auszahlungsbeträgen	169
<b>S 4</b>	<b>Prüfung</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomial- .... verteilung; Mindestanzahl richtig beantworteter Fragen für das Be- stehen; Bestimmung der Mindestanzahl von zusätzlichen Antworten über die Trefferwahrscheinlichkeit	170
<b>S 5</b>	<b>Schwarzfahrer</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über ..... Binomialverteilung; Höchstanzahl an Schwarzfahrern in einer Gruppe; linksseitiger Hypothesentest	171
<b>S 6</b>	<b>Glücksrad</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; ..... mittlerer Verlust bei einem Spiel; Höchstanzahl an Drehungen; Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem weiteren Spiel	172
	Lösungsvorschlag .....	173

---

## Übungsaufgabensatz im Stil der Prüfung

---

<b>Pflichtteil</b> .....	185
<b>Wahlteil</b>	
Analysis A 1.1 $f(x) = 0,01x^3 - x^2 + 40x + 250$ .....	192
<b>Getränkehersteller</b> – Kostenfunktion; geringster Kosten- zuwachs; grafische Bestimmung von Erlös, Gewinnzone und maximalem Gewinn; Bestimmung eines Verkaufspreises; Verkaufspreise ohne Gewinnzone	
Analysis A 1.2 $h(x) = e^{-x} + x$ ; $h_t(x) = e^{t-x} + x$ .....	192
Inhalt einer nach rechts offenen Fläche; Abstand eines Kurvenpunktes von einer Geraden; Tiefpunkt; Ortskurve der Tiefpunkte	
Analysis A 2.1 $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ .....	198
Definitionsmenge; Schnittpunkt mit x-Achse; Hochpunkt; Krümmung; Flächeninhalt; berührender Kreis; Lage der Schnittpunkte mit einer Geraden	
Analysis A 2.2 <b>Fluss</b> – Interpretation einer Fläche und eines Zeitpunktes ..... im Sachzusammenhang anhand der Graphen von Änderungs- raten; Bestimmung eines Zeitpunktes; Aufgabe zu einer vor- gegebenen Integralgleichung im Sachzusammenhang; Beschreibung eines Lösungsverfahrens	199

Geometrie B 1	<b>Flugzeuge</b> – Geschwindigkeitsbestimmungen; Gleichung . . . . .	204
	für Positionen; zurückgelegte Strecke; Steigwinkel; Positionsbestimmung; Berechnung eines Zeitpunktes	
Geometrie B 2	<b>Ebenenschar und Geraden</b> – Schnittpunkt Gerade–Ebene; . . .	208
	Lage zweier Punkte bezüglich einer Ebene; Schnittwinkel; gleichschenkliges Dreieck; Parallelität und Orthogonalität von Ebene und Koordinatenachsen; Bestimmung eines Punktes, der in keiner Scharebene liegt	
Stochastik C 1	<b>Glücksrad</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ohne . . . .	212
	und mit Binomialverteilung; Höchstanzahl an Drehungen; Glücksspiel: Gewinnerwartungswert, Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für ein faires Spiel	
Stochastik C 2	<b>Raucher</b> – Erwartungswert; Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Binomialverteilung . . . .	216

---

## Offizieller Musteraufgabensatz für 2019 und 2020

---

<b>Pflichtteil</b> . . . . .		MA-1
<b>Wahlteil</b>		
Analysis A 1.1	$f(x) = 6 - 2e^{-x}$ . . . . .	MA-6
	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen; Asymptote; Monotonie; Skizze; Schnittwinkel; Inhalt einer nach rechts offenen Fläche; Spiegelung des Graphen an einer Geraden; berührende Parabel	
Analysis A 1.2	<b>Fahrzeuge</b> – Beschreibung einer Bewegung anhand . . . . .	MA-6
	eines Graphen; Interpretation der Wendestelle; Deutung einer Fläche und Formulierung einer Frage zu einer vorgegebenen Integralgleichung im Sachzusammenhang	
Analysis A 2.1	<b>Wasserbecken</b> – Bestimmung von Wasservolumen, . . . . .	MA-11
	Zeitraum und momentaner Änderungsrate anhand des Graphen; Ausschluss von möglichen Funktionsgleichungen; Beschreibung eines grafischen Lösungsverfahrens; Interpretation einer Gleichung im Sachzusammenhang; Berechnung der maximalen momentanen Änderungsrate $g$ mit $g(t) = 0,4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$ ; Abnahme des Volumens; Volumen zu Beobachtungsbeginn; Zeitpunkt mit gleichem Volumen wie bei Beobachtungsbeginn	
Analysis A 2.2	$h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$ . . . . .	MA-12
	kleinste positive Nullstelle; Flächeninhalt	

Geometrie B 1	<b>Turm</b> – Nachweis für ein Quadrat; Koordinaten- gleichung einer Ebene; Beschreibung eines Verfahrens; Längenverhältnis zweier Balkenabschnitte; Positions- bestimmung für eine Kletterstange	MA-17
Geometrie B 2	Koordinatengleichung einer Ebene; Ergänzung eines rechtwinkligen Dreiecks zu einem Rechteck; Flächeninhalt Rechteck; Pyramidenspitze; Inhalt einer Teilfläche	MA-21
Stochastik C 1	<b>Lampen</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit und ohne Binomialverteilung; Erwartungswert; Maximal- zahl defekter Lampen; mittlerer Gewinn	MA-24
Stochastik C 2	<b>Haushalte</b> – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Binomialverteilung; Mindestanzahl an Haushalten; Näherungswert für Gesamtzahl an Haushalten; rechts- seitiger Hypothesentest	MA-27

---

## Abiturprüfung Haupttermin 2019

---

<b>Pflichtteil</b>		2019-1
<b>Wahlteil</b>		
Analysis A 1.1	<b>Höhe einer Pflanze</b> – Bestimmung von Zeitraum und momentaner Änderungsrate der Höhe anhand des Graphen; Interpretation der Wendestelle; Formulierung einer Frage zu einer vorgegebenen Gleichung im Sachzusammenhang	2019-8
Analysis A 1.2	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$ ; $f_k(x) = \frac{1}{2k}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}kx$ Nachweis für Tiefpunkt; Inhalt einer Fläche zwischen dem Graphen von $f$ und einer Strecke; Verschiebung und Stre- ckung des Graphen; Koordinaten des Tiefpunktes des ent- standenen Graphen; berührender Kreis; Funktionenschar – Tangente an den Graphen von $f_k$ parallel zu einer Geraden	2019-8
Analysis A 2.1	$f(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$ ; $g(t) = 20 \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$ <b>Bakterienentwicklung</b> – Flächeninhalt nach drei Stunden; Verdreifachung des Flächeninhalts; momentane Änderungs- rate; Interpretation eines Integralterms im Sachzusammen- hang; maximaler Flächeninhalt; Zeitpunkt mit gleichem Flächeninhalt wie bei Beobachtungsbeginn; Begründung für eine geometrische Eigenschaft des Graphen von $g$	2019-14
Analysis A 2.2	$f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 8t$ Bestimmung eines $t$ -Wertes; höchster Tiefpunkt; gemeinsame Schnittpunkte aller Graphen $G_t$	2019-15

- Geometrie B 1 **Würfel** – Zeichnen eines Vierecks aus Schnittpunkten . . . . 2019-20  
eines vorgegebenen Würfels mit einer Ebene; Koordinaten-  
gleichung der Ebene; Schnittpunkt mit der  $x_1$ -Achse; Über-  
prüfung der Länge einer Pyramidenhöhe; Geradenschar –  
Nachweis, dass keine Schargerade in einer vorgegebenen  
Ebene liegt; Schnittgerade zweier Ebenen als Schargerade
- Geometrie B 2 **Pyramide** – Darstellung einer Pyramide; Koordinaten- . . . 2019-26  
gleichung einer Ebene; Nachweis eines gleichschenkligen  
Dreiecks; Volumen einer Pyramide; Beschreibung eines  
Verfahrens zur Bestimmung der Länge eines Mastes
- Stochastik C 1 **Werfen dreier Körper** – Berechnung von Wahrschein- . . . 2019-30  
lichkeiten mit und ohne Binomialverteilung; Bestimmung  
der Mindestanzahl an Würfeln; Gewinnerwartungswert bei  
einem Spiel; Bestimmung einer Anzahl von Körpern aus  
einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit
- Stochastik C 2 **Glücksspielautomat** – Berechnung von Wahrscheinlich- . . . 2019-33  
keiten mit und ohne Binomialverteilung; Parameterbestim-  
mung und Beschreiben eines Ereignisses zu einem vorgege-  
benen Term; linksseitiger Hypothesentest; Bestimmung der  
Sektorenanzahl aus einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!  
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter [www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/](http://www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/) finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mit hilfreichen Abbildungen und Erklärungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

#### **Autor**

Dr. Raimund Ordowski, Studiendirektor

(Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung, zusätzliche Übungsaufgaben, Übungsaufgabensatz im Stil der Prüfung sowie Lösungen aller Aufgaben)



# Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

## Das Abitur 2020

Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik erstreckt sich über die Gebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik.

Die Struktur der Aufgaben ab dem Abitur 2019 und der Prüfungsablauf werden unten genauer beschrieben.

Viele Abituraufgaben der Jahre vor 2019 sind vom Inhalt (nicht unbedingt vom Umfang) her als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet. Eine Auswahl sowie viele weitere Muster- und Übungsaufgaben für das Abitur 2019 finden Sie in diesem Buch.

## Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik

Grundlage für das Abitur im Jahr 2020 ist der Bildungsplan 2004 für das achtjährige Gymnasium. Dabei gilt die Einschränkung, dass die folgenden Themen des Bildungsplans **nicht** Gegenstand der schriftlichen Abiturprüfung sein werden:

- Folgen
- Wachstumsprozesse
- Differenzialgleichungen
- Volumen von Rotationskörpern<sup>1</sup>
- Abstand windschiefer Geraden
- Beweise mithilfe von Vektoren
- Stetige Verteilung

Die schriftliche Prüfung ist in einen **Pflichtteil** und einen **Wahlteil** unterteilt.

### Pflichtteil

Seit der Prüfung 2017 umfasst der Pflichtteil ein Drittel der Gesamtprüfung. Es werden darin Grundkompetenzen in Form von mehreren kleinen Aufgaben abgeprüft.

Für den Pflichtteil sind **keinerlei Hilfsmittel** zugelassen.

<sup>1</sup> Elementare Rotationskörper, die man ohne Integralrechnung bestimmen kann, sind weiterhin möglich.

## Wahlteil

Der **Wahlteil** umfasst zwei Drittel der Gesamtprüfung. Er beinhaltet größere Aufgaben zu den drei Teilgebieten mit zusammenhängenden Fragestellungen, wobei verstärkt Transfer, Modellieren von realen Situationen und Entwickeln von Lösungsstrategien gefragt sind.

Beim Wahlteil sind als **Hilfsmittel** – neben einem Nachschlagewerk zur deutschen Rechtschreibung – die **Merkhilfe** sowie ein wissenschaftlicher Taschenrechner (**WTR**) mit dem mitgelieferten Handbuch zugelassen.

## Operatoren

In den Formulierungen der Aufgaben finden sich sogenannte Operatoren wie etwa *berechnen*, *zeichnen*, die den jeweiligen Arbeitsauftrag beschreiben. Ihre Bedeutung entspricht meist – wie etwa bei *deuten*, *interpretieren*, *erläutern*, *zuordnen* – dem üblichen Sprachgebrauch. Dennoch sollte man bei den am häufigsten auftretenden Operatoren wissen, in welchem Umfang und mit welcher Qualität eine Lösung erwartet wird. Dazu dient die folgende Übersicht mit Beispielen aus den offiziellen Musteraufgaben:

Operatoren	Hinweise und <i>Beispiele</i>
angeben nennen	Es werden kein Ansatz und keine Begründung verlangt. <i>Aufgabe A 2.1 a</i>
beschreiben	Es wird keine Begründung verlangt. <i>Aufgabe A 1.2 a</i>
beurteilen begründen nachweisen zeigen	Es wird eine Lösung durch logisches Schließen bzw. Argumentieren erwartet. <i>Aufgabe A 2.1 a</i>
berechnen	Es werden ein mathematischer Ansatz und ein nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg erwartet. <i>Aufgabe A 2.1 c</i>
bestimmen ermitteln untersuchen	Die Art des Vorgehens ist frei wählbar (beispielsweise auch grafisch), sofern nicht anders angegeben (z. B. „Ermitteln Sie rechnerisch ...“). Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar dokumentiert sein. <i>Aufgaben A 2.1 a; A 2.1 c/d</i>
grafisch darstellen zeichnen	Es wird eine möglichst genaue Darstellung erwartet. <i>Aufgabe Geo 1 a</i>
skizzieren	Es genügt die Beschränkung auf charakteristische Eigenschaften (bei Funktionsgraphen z. B. Extrempunkte, Asymptoten, ...). Koordinatensysteme sollten beschriftete und skalierte Achsen haben. <i>Aufgabe A 1.1 a</i>

Verlangt die Aufgabenstellung einen **exakten** Wert, so ist ein mathematisch exakter Ausdruck wie z. B.  $\frac{3}{7}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\ln(3)$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , ... gemeint; die Angabe einer gerundeten Dezimalzahl genügt in diesem Fall nicht.

## Anforderungen an eine Schülerlösung

Erwartet wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation in einer korrekten Fachsprache.

Die Darstellung sollte durch Ergebnissätze und gegebenenfalls durch verbale Beschreibung des Vorgehens übersichtlich strukturiert sein.

Neu eingeführte Bezeichnungen sind zu definieren, dies gilt insbesondere für Zufallsvariablen in der Stochastik.

Die Lösung sollte keine Angabe über Tastenfolgen von WTR-Eingaben enthalten.

### Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

- Der\*die **Lehrer\*in** erhält

für den <b>Pflichtteil</b>	<b>1</b> Aufgabensatz bestehend aus mehreren kleinen Aufgaben. Insgesamt sind <b>20</b> Verrechnungspunkte dafür vorgesehen. Eine Wahlmöglichkeit hat der*die Lehrer*in hier nicht!
für den <b>Wahlteil</b>	<b>2</b> Aufgabenvorschläge <b>A 1</b> und <b>A 2</b> aus der <b>Analysis</b> mit jeweils <b>20</b> Verrechnungspunkten. Der*die Lehrer*in wählt <b>einen</b> Vorschlag aus.
	<b>2</b> Aufgabenvorschläge <b>B 1</b> und <b>B 2</b> aus der <b>Geometrie</b> mit jeweils <b>10</b> Verrechnungspunkten. Der*die Lehrer*in wählt <b>einen</b> Vorschlag aus.
	<b>2</b> Aufgabenvorschläge <b>C 1</b> und <b>C 2</b> aus der <b>Stochastik</b> mit jeweils <b>10</b> Verrechnungspunkten. Der*die Lehrer*in wählt <b>einen</b> Vorschlag aus.

- Der\*die **Schüler\*in**

erhält <b>alle</b> von der Lehrkraft ausgewählten Aufgaben ohne Hilfsmittel und bearbeitet	
die <b>Pflichtteilaufgaben</b> <u>ohne</u> Hilfsmittel.	die drei <b>Wahlteilaufgaben</b> aus der Analysis, Geometrie und Stochastik. <b>Erst nach Abgabe des Pflichtteils erhält er*sie die Hilfsmittel WTR und Merkhilfe!</b>
Maximal kann er*sie im Pflichtteil <b>20 Verrechnungspunkte</b> erzielen.	Maximal kann er*sie im Wahlteil <b>40 Verrechnungspunkte</b> erzielen.
Insgesamt kann er*sie in der Prüfungsarbeit maximal <b>60 Verrechnungspunkte</b> erzielen.	

- Die **Prüfungszeit** beträgt **270 Minuten**.





**Aufgabe A 2.1**

In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

**Versuchsreihe 1**

Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion  $f$  mit

$$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} \quad (t \text{ in Stunden nach Beobachtungsbeginn, } f(t) \text{ in mm}^2).$$

- a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat. Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

3,5 VP

- b) Berechnen Sie  $\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t) dt$ .

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

3,5 VP

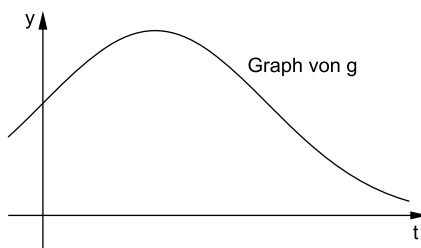
**Versuchsreihe 2**

Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugebt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion  $g$  beschrieben mit

$$g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} - 0,005 \cdot t^2$$

( $t$  in Stunden nach Beobachtungsbeginn,  $g(t)$  in  $\text{mm}^2$ ).

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion  $g$ .



- c) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an. Berechnen Sie diesen Wert. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.
- d) Betrachtet wird die Funktion  $h$  mit  $h(t) = g(t + 10)$ . Für jede reelle Zahl  $t$  gilt:  $h(-t) = h(t)$ . Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von  $g$  damit begründet werden kann.

5 VP

2 VP



### Aufgabe A 2.1

Versuchsreihe 1: Der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche wird durch die Funktion  $f$  mit  $f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$ ,  $0 \leq t \leq 12$  beschrieben ( $t$  in Stunden seit Beobachtungsbeginn,  $f(t)$  in  $\text{mm}^2$ ).

#### a) Flächeninhalt nach 3 Stunden:

$$\text{Es gilt: } f(3) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 3} = 20 \cdot e^{0,3} \approx 27,00$$

Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn nehmen die Bakterien eine Fläche mit einem Inhalt von **ca. 27  $\text{mm}^2$**  ein.

#### Verdreifachung des Flächeninhalts:

Der Ansatz  $f(t) = 3 \cdot f(0)$  führt auf die Gleichung:

$$20 \cdot e^{0,1 \cdot t} = 3 \cdot 20 \cdot e^0$$

$$e^{0,1 \cdot t} = 3$$

$$0,1 \cdot t = \ln(3)$$

$$t = \frac{\ln(3)}{0,1} = 10 \cdot \ln(3) \approx 10,99$$

Ungefähr **11 Stunden** nach Beobachtungsbeginn hat sich der Flächeninhalt verdreifacht.

#### Momentane Änderungsrate nach 2 Stunden:

$$\text{Für die Ableitung von } f \text{ gilt: } f'(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} \cdot 0,1 = 2 \cdot e^{0,1 \cdot t}$$

$$\text{Damit ergibt sich: } f'(2) = 2 \cdot e^{0,1 \cdot 2} = 2 \cdot e^{0,2} \approx 2,44$$

Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts **ca. 2,4  $\text{mm}^2$  pro Stunde**.

#### b) Berechnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t) \, dt &= \frac{1}{4} \cdot \int_5^9 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} \, dt = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{20}{0,1} \cdot e^{0,1 \cdot t} \right]_5^9 = \frac{1}{4} \cdot \left[ 200 \cdot e^{0,1 \cdot t} \right]_5^9 \\ &= 50 \cdot (e^{0,9} - e^{0,5}) \\ &\approx \mathbf{40,54} \quad (\text{oder WTR 3}) \end{aligned}$$

#### Interpretation:

Der berechnete Ausdruck ist der Mittelwert der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[5; 9]$ .

Somit gilt im Sachzusammenhang:

Im Zeitraum zwischen 5 und 9 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt der Flächeninhalt **im Mittel etwa 40,5  $\text{mm}^2$** .

Versuchsreihe 2 mit Antibiotikum: Der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche wird jetzt durch die Funktion  $g$  mit  $g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$  beschrieben ( $t$  in Stunden seit Beobachtungsbeginn,  $g(t)$  in  $\text{mm}^2$ ). Der Graph von  $g$  ist (ohne Skalierung der Achsen) vorgegeben.

c) **Maximaler Flächeninhalt:**

Für die Ableitung von  $g$  gilt:

$$g'(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} \cdot (0,1 - 0,01t) = 20 \cdot (0,1 - 0,01t) \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$$

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle liefert:

$$g'(t) = 0$$

$$20 \cdot (0,1 - 0,01t) \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} = 0 \quad | : 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} \neq 0$$

$$0,1 - 0,01t = 0$$

$$t = \frac{0,1}{0,01} = 10$$

Da die Ableitung nur diese eine Nullstelle hat, muss dort das (in der Aufgabenstellung vorausgesetzte) Maximum von  $g$  liegen.

$$\text{Damit erhält man: } g(10) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 10 - 0,005 \cdot 100} = 20 \cdot e^{1 - 0,5} = 20 \cdot e^{0,5} \approx 32,97$$

Der maximale Flächeninhalt beträgt **ca. 33  $\text{mm}^2$** .

**Gleicher Flächeninhalt wie zu Beobachtungsbeginn:**

Der Ansatz  $g(t) = g(0)$  führt auf die Gleichung:

$$20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} = 20 \cdot e^0$$

$$e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} = e^0$$

$$0,1t - 0,005t^2 = 0$$

$$t \cdot (0,1 - 0,005t) = 0$$

$$\text{Die von 0 verschiedene Lösung ist } t = \frac{0,1}{0,005} = 20.$$

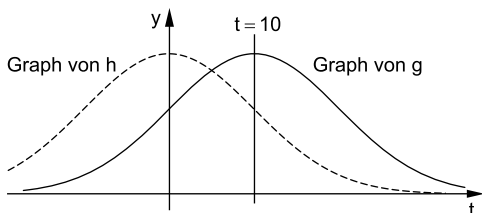
Nach **20 Stunden** ist der Flächeninhalt wieder so groß wie zu Beobachtungsbeginn.

d) **Geometrische Eigenschaft des Graphen von  $g$ :**

Für die Funktion  $h$  mit  $h(t) = g(t+10)$  gilt für jede reelle Zahl  $t$ :  $h(-t) = h(t)$

Der Graph von  $h$  ist daher achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.

Da er durch Verschiebung um  $-10$  in  $t$ -Richtung aus dem Graphen von  $g$  entsteht, ist der Graph von  $g$  achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung  $t = 10$ .





© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**