

2020

Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Gymnasium Eichendorffschule Berlin

Mathematik

- + Offizielle Musteraufgaben
 - + Merkhilfe
 - + Online-Glossar



STARK

Inhaltsverzeichnis

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Das Abitur 2020	I
Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik	I
Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung	III
Bewertung der Prüfungsarbeiten	IV
Der Aufbau des Buches	IV
Einsatz eines WTR am Beispiel des TI-30X Plus MathPrint	VI

Hilfsmittel

Merkhilfe Mathematik	M-1
----------------------------	-----

Aufgabensammlung zum Pflichtteil

Pflichtteil 2013	1
Pflichtteil 2014	3
Pflichtteil 2015	4
Pflichtteil 2016	6
Pflichtteil 2017	8
Pflichtteil 2018	9
Lösungsvorschlag	11

Aufgabensammlung zum Wahlteil – Analysis

Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

- Ana 1** Medikament – grafische Bestimmung von Wirkstoffmenge, 39
momentaner Änderungsrate und mittlerer Wirkstoffmenge;
 $g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0.05 \cdot t})$ – langfristige Wirkstoffmenge; Monotonie;
Berechnung eines Zeitpunktes und einer mittleren Wirkstoffmenge;
Frage im Sachzusammenhang zu einer Gleichung
- Ana 2** $g_a(x) = ax^2 + 6x + 1$ 40
Berührung; Ortskurve der Scheitelpunkte
- Ana 3** $f(t) = 18 - 10\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ 41
Temperaturverlauf – Skalieren der Koordinatenachsen;
Durchschnittstemperatur
- Ana 4** $f(x) = \frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3}$ 41
Definitionsmenge; Nullstelle; Hochpunkt; Monotonie; Tangente;
Kegel als Rotationskörper; Nullstellen einer Integralfunktion;
Flächeninhalt
- Ana 5** $g(x) = (\sin(x))^2$; $g(x) = a \cdot \cos(bx) + d$ 42
Hochpunkt; Parameterbestimmung
- Ana 6** Wassertank – grafische Bestimmung von maximaler Zuflussrate 42
und Wassermenge; Graph der Höhe des Wasserspiegels
- Ana 7** $f(x) = 8x \cdot e^{-x}$; $g(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$ 43
Zuordnung von Graphen; Schnittpunkte; Flächeninhalt Dreieck;
grafische Untersuchung einer Gleichung; Berechnung Flächeninhalt
- Ana 8** $f_k(x) = k^2 x^3 - 6kx^2 + 9x$ 43
Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$; Ableitung; Wendetangenten; Parallelität;
Zuordnung von Graphen; Parameterbestimmung
- Ana 9** $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$; $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5$ 44
Extrempunkte; grafische Untersuchung einer Gleichung; Verschiebung des Graphen; Punktsymmetrie; Integralberechnung; Integralbestimmung anhand des Graphen; Funktionenschar – Untersuchung auf Tangenten parallel zur x-Achse

Ana 10 $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$; $k(x) = \frac{1}{2}x + s + \frac{t}{x+1}$ 45

Getränkendose – h beschreibt die Höhe des Schwerpunkts in Abhängigkeit von der Füllhöhe; grafische Bestimmung von Füllhöhen; Bewegung des Schwerpunkts; geringste Höhe des Schwerpunkts; Berechnung von Füllhöhen; Parameterbestimmung

Lösungsvorschlag 46

Aufgaben früherer Abiturjahrgänge

2015 A 1 $f(x) = \frac{1}{125}x^4$ 61

Lastkahn – Tiefe, Breite und Volumen des Laderraums; Neigung des Bodens; orthogonale Stützen; Breite einer Zwischendecke

2016 A 1.2 $h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$ 61

Berührkreis; Koordinaten des Mittelpunkts

2017 A 1.2 $g(x) = x - \frac{1}{x^3}$ 61

Tangente durch vorgegebenen Punkt; Bestimmung des Berührpunktes; kleinster Abstand eines Kurvenpunktes zu einer Geraden

2018 A 1.2 $f_k(x) = k \cdot e^x - 2x \cdot e^x$ 62

Nullstelle; Stammfunktion; Flächeninhalt

Lösungsvorschlag 63

Zusätzliche Übungsaufgaben

A 1 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 69

Wendepunkt; Gerade durch Extrempunkte; Verschiebung und Streckung des Graphen; berührende Parabel; Flächeninhalte; Tangente; Anzahl Schnittpunkte des Graphen mit $y = mx$ in Abhängigkeit von m

A 2 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$; $f_a(x) = \frac{1}{4}x^4 - a \cdot x$ 69

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$; Schnittwinkel; Monotonie; Nullstellen einer Integralfunktion; Spiegelung an y -Achse; Parameterbestimmung anhand von Graphen; Ortskurve

A 3	$f(x) = \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}$	70
	Damm – Höhe eines Weges; Flächeninhalt und Volumen; Steigung; berührende Parabel; Bestimmung eines Punktes auf einer Normalen mit vorgegebenem Abstand zum Kurvenpunkt	
A 4	$f(t) = -0,04 \cdot (t^3 - 19,5t^2 + 90t)$	71
	Wasserbecken – momentane Änderungsrate; Nullstellen; Extremwerte; Skalieren der Koordinatenachsen; Ergänzen eines Graphen; Aufgabe im Sachzusammenhang zu einer Integralgleichung; Wasservolumen bei Beobachtungsbeginn; Bestimmung einer linearen Funktion	
A 5	$f(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$	71
	Definitionsmenge; Asymptoten; Schnittpunkte mit x-Achse; Monotonie; Zeichnung; Inhalt einer nach rechts offenen Fläche; Tangente; Dreieck; Rotationskegel; Berührung; Bestimmung einer Funktionsgleichung; Nullstellen einer Integralfunktion	
A 6	$f(x) = (2-x) \cdot e^x; F(x) = (3-x) \cdot e^x$	72
	Asymptote; Hochpunkt; Monotonie; Graph von f; grafische Untersuchung einer Gleichung; Normale; Flächeninhalt; Parabelschar; Tangenten durch einen vorgegebenen Punkt	
A 7	$f(t) = 1000 \cdot (e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,5 \cdot t})$	73
	Fahrzeuge – Interpretation von Flächen und Zeitpunkten an vorgegebenem Geschwindigkeits-Zeitdiagramm; Berechnung der größten Geschwindigkeit sowie von Streckenlängen und Zeitpunkten; Tangente	
A 8	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right) + 0,5$	73
	Nullstellen; Integralbestimmung anhand des Graphen; zusammengesetzte Funktion; lokales Minimum	
Lösungsvorschlag		75

Aufgabensammlung zum Wahlteil – Analytische Geometrie

Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

Geo 1	Kunstwerk – Darstellung eines Körpers; Koordinatengleichung einer Ebene; Endpunkt einer Stange; Berührung einer Kugel mit der Stange; Lage einer Holzplatte zur Stange (Schnitt Gerade – Ebene)	97
-------	--	----

Geo 2	Forschungs-U-Boote – Geradengleichung; Parameterintervall; Positionsbestimmung; Geschwindigkeit; windschiefe Geraden; Abstand Punkt – Gerade; Untersuchung der Bahngeraden anhand von Projektionen in Koordinatenebenen	98
Geo 3	Ebene und Geradenschar – Schnittpunkt Gerade – Ebene; orthogonale Geraden; Schnittwinkel Gerade – Ebene; Angabe einer Gleichung zu einem bestimmten Schnittwinkel; Ebene F, in der die Geradenschar liegt; Bestimmung einer Geraden h in der Ebene F, die nicht zur Geradenschar gehört	99
Geo 4	Markise – Koordinatengleichung einer Ebene; Schnittwinkel von Ebenen; Abstandsbestimmung; Schatten der Markise auf der Terrasse; Einfahren der Markise und Lagebestimmung der neuen Endpunkte der Markise	99
	Lösungsvorschlag	101

Aufgaben früherer Abiturjahrgänge

2013 B 1.1	Würfel – Darstellung in einem Koordinatensystem; Winkel; Abstand Ebene – Gerade; Ebenenschar; gemeinsame Punkte einer Scharebene mit dem Würfel	111
2013 B 2.1	Ausstellungsraum – Koordinatengleichung einer Ebene; gleichschenkliges Dreieck; Flächeninhalt Dreieck; Abstand Punkt – Ebene; Schnitt Gerade – Ebene	111
2014 B 1.1	Quader in Pyramide – Koordinatengleichung einer Ebene; Schnittwinkel von Ebenen; Flächeninhalt Dreieck; Quader in Pyramide; Würfel in Pyramide	112
2014 B 2.1	Rechteckige Platte – Koordinatengleichung einer Ebene; Darstellung in einem Koordinatensystem; Winkel zwischen Gerade und Ebene; Schatten eines Stabes auf der Platte; bewegte Lichtquelle – Kollisionspunkte mit Platte	112
2016 B 1.1	Tribüne – Koordinatengleichung einer Ebene; Schnittwinkel von Ebenen; Flächeninhalt eines Rechtecks; Sicherheitsabstand zwischen Nutzfläche und Dachfläche der Tribüne; Einpassen einer senkrechten Stütze bestimmter Länge zwischen Dach und Nutzfläche	113
2016 B 2.1	Pyramide – Darstellung in einem Koordinatensystem; Berechnung des Umfangs der Schnittfläche der Pyramide mit einer Ebene; Koordinatengleichung der Ebene; Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks; Punkt im Innern der Pyramide mit gleichem Abstand zu zwei Pyramidenflächen und der Ebene	113

2017 B 1	Container – Koordinatengleichung einer Ebene; Nachweis für Trapez; Flächeninhalt Trapez; Abstand Punkt–Ebene; Ebenenschar: Parameterbestimmung aus vorgegebenem Schnittwinkel	114
2017 B 2	Flugzeuge – Bestimmung einer Fluggeschwindigkeit; Zeitpunkt für eine bestimmte Höhe; Steigungswinkel eines Flugzeugs; Schnittpunkt der Flugbahnen zweier Flugzeuge; Bedingung für Sicherheitsabstand; Punkte auf der Meeresoberfläche mit gleichem Abstand zu beiden Flugzeugen	114
2018 B 1	Museum – Nachweis für nicht rechtwinkliges Dreieck; Erläutern einer vorgegebenen Rechnung; Flächeninhalt einer dreieckigen Bodenfläche; Überprüfung der Leistung einer Entfeuchtungsanlage; Position eines Scheinwerfers	115
2018 B 2	Ebene und Ebenenschar – Darstellung einer Ebene; Orthogonalität zweier Ebenen; Schnittgerade zweier Ebenen; Schnitt von Ebenen mit den Koordinatenachsen; Pyramide; Parameterbestimmung für ein bestimmtes Volumen; parallele Ebenen	116
Lösungsvorschlag		117

Aufgabensammlung zum Wahlteil – Stochastik

Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

Sto 1	Glücksrad – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; Mindestanzahl an Drehungen; Verlustwahrscheinlichkeit bei einem Glücksspiel; Bestimmung von p für maximale Verlustwahrscheinlichkeit	141
Sto 2	Schulfest – Gewinnwahrscheinlichkeiten bei einem Kartenspiel; Glücksrad: Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn über Binomialverteilung; Bestimmung der Mindestanzahl von Gewinnfeldern über die Trefferwahrscheinlichkeit; Spielautomat: faires Spiel	142
Sto 3	Hotel – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung; maximale Anzahl an Reservierungen; rechtsseitiger Hypothesentest; Interpretation des Fehlers 1. Art	143
Sto 4	Schulabschluss – Interpretation von statistischen Daten; Begründung für Binomialverteilung; Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung	144

Sto 5	Biathlonwettbewerb – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	145
	über Binomialverteilung; Fragestellung im Sachzusammenhang	
	zu einer vorgegebenen Ungleichung	
Sto 6	Tanzgruppe – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über	145
	Binomialverteilung	
	Lösungsvorschlag	146

Aufgaben früherer Abiturjahrgänge

2016 B 1.2	Idealer Würfel mit vorgegebenem Netz – Berechnung	155
	von Wahrscheinlichkeiten auch mit Binomialverteilung;	
	Anpassung des Würfelnetszes über die Trefferwahrscheinlichkeit; rechtsseitiger Hypothesentest	
2017 C 1	Autofarben – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	155
	über Binomialverteilung; faires Spiel; rechtsseitiger Hypothesentest	
2017 C 2	Glücksspielautomat – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit und ohne Binomialverteilung; Mindestanzahl an Spielen; durchschnittlicher Verdienst pro Spiel	156
2018 C 1.1	Kunststoffteile – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	157
	über Binomialverteilung; Mindestanzahl an Kunststoffteilen; linksseitiger Hypothesentest	
2018 C 2	Affe – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit und	157
	ohne Binomialverteilung; Abweichung vom Erwartungswert; Bestimmung der Mindestanzahl an zusätzlichen Zifferntasten einer Tastatur über die Trefferwahrscheinlichkeit; rechtsseitiger Hypothesentest	
	Lösungsvorschlag	159

Zusätzliche Übungsaufgaben

S 1	Gefäße – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten auch über	168
	Binomialverteilung; faires Spiel; Änderung des Auszahlungsbetrags;	
	Mindestanzahl an Spielen; Bestimmung der Kugelanzahl in einem Gefäß	
S 2	Bauteile – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomial-	168
	verteilung; mittlerer Gewinn; Höchstanzahl an Bauteilen in einer Schachtel; rechtsseitiger Hypothesentest	

S 3	Tetraeder-Würfel – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; Bestimmung eines Intervalls; nicht faires Glücksspiel; Änderung von Auszahlungsbeträgen	169
S 4	Prüfung – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung; Mindestanzahl richtig beantworteter Fragen für das Bestehen; Bestimmung der Mindestanzahl von zusätzlichen Antworten über die Trefferwahrscheinlichkeit	170
S 5	Schwarzfahrer – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten über Binomialverteilung; Höchstanzahl an Schwarzfahrern in einer Gruppe; linksseitiger Hypothesentest	171
S 6	Glücksrad – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; mittlerer Verlust bei einem Spiel; Höchstanzahl an Drehungen; Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem weiteren Spiel	172
	Lösungsvorschlag	173

Übungsaufgabensatz im Stil der Prüfung

Pflichtteil	185
Wahlteil	
Analysis A 1.1 $f(x) = 0,01x^3 - x^2 + 40x + 250$	192
Getränkehersteller – Kostenfunktion; geringster Kostenzuwachs; grafische Bestimmung von Erlös, Gewinnzone und maximalem Gewinn; Bestimmung eines Verkaufspreises; Verkaufspreise ohne Gewinnzone	
Analysis A 1.2 $h(x) = e^{-x} + x$; $h_t(x) = e^{t-x} + x$	192
Inhalt einer nach rechts offenen Fläche; Abstand eines Kurvenpunktes von einer Geraden; Tiefpunkt; Ortskurve der Tiefpunkte	
Analysis A 2.1 $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$	198
Definitionsmenge; Schnittpunkt mit x-Achse; Hochpunkt; Krümmung; Flächeninhalt; berührender Kreis; Lage der Schnittpunkte mit einer Geraden	
Analysis A 2.2 Fluss – Interpretation einer Fläche und eines Zeitpunktes im Sachzusammenhang anhand der Graphen von Änderungsraten; Bestimmung eines Zeitpunktes; Aufgabe zu einer vorgegebenen Integralgleichung im Sachzusammenhang; Beschreibung eines Lösungsverfahrens	199

Geometrie B 1	Flugzeuge – Geschwindigkeitsbestimmungen; Gleichung für Positionen; zurückgelegte Strecke; Steigungswinkel; Positionsbestimmung; Berechnung eines Zeitpunktes	204
Geometrie B 2	Ebenenschar und Geraden – Schnittpunkt Gerade–Ebene; Lage zweier Punkte bezüglich einer Ebene; Schnittwinkel; gleichschenkliges Dreieck; Parallelität und Orthogonalität von Ebene und Koordinatenachsen; Bestimmung eines Punktes, der in keiner Scharebene liegt	208
Stochastik C 1	Glücksrad – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ohne und mit Binomialverteilung; Höchstanzahl an Drehungen; Glücksspiel: Gewinnerwartungswert, Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für ein faires Spiel	212
Stochastik C 2	Raucher – Erwartungswert; Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Binomialverteilung	216

Offizieller Musteraufgabensatz für 2019 und 2020

Pflichtteil	MA-1
Wahlteil		
Analysis A 1.1	$f(x) = 6 - 2e^{-x}$	MA-6
	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen; Asymptote; Monotonie; Skizze; Schnittwinkel; Inhalt einer nach rechts offenen Fläche; Spiegelung des Graphen an einer Geraden; berührende Parabel	
Analysis A 1.2	Fahrzeuge – Beschreibung einer Bewegung anhand eines Graphen; Interpretation der Wendestelle; Deutung einer Fläche und Formulierung einer Frage zu einer vorgegebenen Integralgleichung im Sachzusammenhang	MA-6
Analysis A 2.1	Wasserbecken – Bestimmung von Wasservolumen, Zeitraum und momentaner Änderungsrate anhand des Graphen; Ausschluss von möglichen Funktionsgleichungen; Beschreibung eines grafischen Lösungsverfahrens; Interpretation einer Gleichung im Sachzusammenhang; Berechnung der maximalen momentanen Änderungsrate g mit $g(t) = 0,4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$; Abnahme des Volumens; Volumen zu Beobachtungsbeginn; Zeitpunkt mit gleichem Volumen wie bei Beobachtungsbeginn	MA-11
Analysis A 2.2	$h_c(x) = c \cdot \sin(cx)$	MA-12
	kleinste positive Nullstelle; Flächeninhalt	

- Geometrie B 1 **Turm** – Nachweis für ein Quadrat; Koordinaten- MA-17
gleichung einer Ebene; Beschreibung eines Verfahrens;
Längenverhältnis zweier Balkenabschnitte; Positions-
bestimmung für eine Kletterstange
- Geometrie B 2 Koordinatengleichung einer Ebene; Ergänzung eines MA-21
rechteckigen Dreiecks zu einem Rechteck; Flächeninhalt
Rechteck; Pyramiden spitze; Inhalt einer Teilfläche
- Stochastik C 1 **Lampen** – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit MA-24
und ohne Binomialverteilung; Erwartungswert; Maximal-
zahl defekter Lampen; mittlerer Gewinn
- Stochastik C 2 **Haushalte** – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten MA-27
mit Binomialverteilung; Mindestanzahl an Haushalten;
Näherungswert für Gesamtzahl an Haushalten; rechts-
seitiger Hypothesentest

Abiturprüfung Haupttermin 2019

- Pflichtteil** 2019-1
- Wahlteil**
- Analysis A 1.1 **Höhe einer Pflanze** – Bestimmung von Zeitraum und 2019-8
momentaner Änderungsrate der Höhe anhand des Graphen;
Interpretation der Wendestelle; Formulierung einer Frage
zu einer vorgegebenen Gleichung im Sachzusammenhang
- Analysis A 1.2 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$; $f_k(x) = \frac{1}{2k}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}kx$ 2019-8
Nachweis für Tiefpunkt; Inhalt einer Fläche zwischen dem
Graphen von f und einer Strecke; Verschiebung und Stre-
ckung des Graphen; Koordinaten des Tiefpunktes des ent-
standenen Graphen; berührender Kreis; Funktionenschar –
Tangente an den Graphen von f_k parallel zu einer Geraden
- Analysis A 2.1 $f(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$; $g(t) = 20 \cdot e^{0,1t} - 0,005t^2$ 2019-14
Bakterienentwicklung – Flächeninhalt nach drei Stunden;
Verdreibefachung des Flächeninhalts; momentane Änderungs-
rate; Interpretation eines Integralterms im Sachzusammen-
hang; maximaler Flächeninhalt; Zeitpunkt mit gleichem
Flächeninhalt wie bei Beobachtungsbeginn; Begründung
für eine geometrische Eigenschaft des Graphen von g
- Analysis A 2.2 $f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 8t$ 2019-15
Bestimmung eines t-Wertes; höchster Tiefpunkt;
gemeinsame Schnittpunkte aller Graphen G_t

- Geometrie B 1 **Würfel** – Zeichnen eines Vierecks aus Schnittpunkten 2019-20
eines vorgegebenen Würfels mit einer Ebene; Koordinaten-
gleichung der Ebene; Schnittpunkt mit der x_1 -Achse; Über-
prüfung der Länge einer Pyramidenhöhe; Geradenschar –
Nachweis, dass keine Schaggerade in einer vorgegebenen
Ebene liegt; Schnittgerade zweier Ebenen als Schaggerade
- Geometrie B 2 **Pyramide** – Darstellung einer Pyramide; Koordinaten- 2019-26
gleichung einer Ebene; Nachweis eines gleichschenkligen
Dreiecks; Volumen einer Pyramide; Beschreibung eines
Verfahrens zur Bestimmung der Länge eines Mastes
- Stochastik C 1 **Werfen dreier Körper** – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit und ohne Binomialverteilung; Bestimmung der Mindestanzahl an Würfen; Gewinnerwartungswert bei einem Spiel; Bestimmung einer Anzahl von Körpern aus einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit
- Stochastik C 2 **Glücksspielautomat** – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit und ohne Binomialverteilung; Parameterbestimmung und Beschreiben eines Ereignisses zu einem vorgegebenen Term; linksseitiger Hypothesentest; Bestimmung der Sektorenanzahl aus einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mit hilfreichen Abbildungen und Erklärungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autor

Dr. Raimund Ordowski, Studiendirektor
(Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung, zusätzliche Übungsaufgaben, Übungsaufgabensatz im Stil der Prüfung sowie Lösungen aller Aufgaben)

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Das Abitur 2020

Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik erstreckt sich über die Gebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik.

Die Struktur der Aufgaben ab dem Abitur 2019 und der Prüfungsablauf werden unten genauer beschrieben.

Viele Abituraufgaben der Jahre vor 2019 sind vom Inhalt (nicht unbedingt vom Umfang) her als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet. Eine Auswahl sowie viele weitere Muster- und Übungsaufgaben für das Abitur 2019 finden Sie in diesem Buch.

Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik

Grundlage für das Abitur im Jahr 2020 ist der Bildungsplan 2004 für das achtjährige Gymnasium. Dabei gilt die Einschränkung, dass die folgenden Themen des Bildungsplans **nicht** Gegenstand der schriftlichen Abiturprüfung sein werden:

- Folgen
- Wachstumsprozesse
- Differenzialgleichungen
- Volumen von Rotationskörpern¹
- Abstand windschiefer Geraden
- Beweise mithilfe von Vektoren
- Stetige Verteilung

Die schriftliche Prüfung ist in einen **Pflichtteil** und einen **Wahlteil** unterteilt.

Pflichtteil

Seit der Prüfung 2017 umfasst der Pflichtteil ein Drittel der Gesamtprüfung. Es werden darin Grundkompetenzen in Form von mehreren kleinen Aufgaben abgeprüft.

Für den Pflichtteil sind **keinerlei Hilfsmittel** zugelassen.

¹ Elementare Rotationskörper, die man ohne Integralrechnung bestimmen kann, sind weiterhin möglich.

Wahlteil

Der **Wahlteil** umfasst zwei Drittel der Gesamtprüfung. Er beinhaltet größere Aufgaben zu den drei Teilgebieten mit zusammenhängenden Fragestellungen, wobei verstärkt Transfer, Modellieren von realen Situationen und Entwickeln von Lösungsstrategien gefragt sind.

Beim Wahlteil sind als **Hilfsmittel** – neben einem Nachschlagewerk zur deutschen Rechtschreibung – die **Merkhilfe** sowie ein wissenschaftlicher Taschenrechner (**WTR**) mit dem mitgelieferten Handbuch zugelassen.

Operatoren

In den Formulierungen der Aufgaben finden sich sogenannte Operatoren wie etwa *berechnen*, *zeichnen*, die den jeweiligen Arbeitsauftrag beschreiben. Ihre Bedeutung entspricht meist – wie etwa bei *deuten*, *interpretieren*, *erläutern*, *zuordnen* – dem üblichen Sprachgebrauch. Dennoch sollte man bei den am häufigsten auftretenden Operatoren wissen, in welchem Umfang und mit welcher Qualität eine Lösung erwartet wird. Dazu dient die folgende Übersicht mit Beispielen aus den offiziellen Musteraufgaben:

Operatoren	Hinweise und Beispiele
angeben nennen	Es werden kein Ansatz und keine Begründung verlangt. <i>Aufgabe A 2.1 a</i>
beschreiben	Es wird keine Begründung verlangt. <i>Aufgabe A 1.2 a</i>
beurteilen begründen nachweisen zeigen	Es wird eine Lösung durch logisches Schließen bzw. Argumentieren erwartet. <i>Aufgabe A 2.1 a</i>
berechnen	Es werden ein mathematischer Ansatz und ein nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg erwartet. <i>Aufgabe A 2.1 c</i>
bestimmen ermitteln untersuchen	Die Art des Vorgehens ist frei wählbar (beispielsweise auch grafisch), sofern nicht anders angegeben (z. B. „Ermitteln Sie rechnerisch ...“). Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar dokumentiert sein. <i>Aufgaben A 2.1 a; A 2.1 c/d</i>
grafisch darstellen zeichnen	Es wird eine möglichst genaue Darstellung erwartet. <i>Aufgabe Geo 1 a</i>
skizzieren	Es genügt die Beschränkung auf charakteristische Eigenschaften (bei Funktionsgraphen z. B. Extrempunkte, Asymptoten, ...). Koordinatensysteme sollten beschriftete und skalierte Achsen haben. <i>Aufgabe A 1.1 a</i>

Verlangt die Aufgabenstellung einen **exakten** Wert, so ist ein mathematisch exakter Ausdruck wie z. B. $\frac{3}{7}$, $\sqrt{7}$, $\ln(3)$, $\frac{\pi}{2}$, ... gemeint; die Angabe einer gerundeten Dezimalzahl genügt in diesem Fall nicht.

Anforderungen an eine Schülerlösung

Erwartet wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation in einer korrekten Fachsprache.

Die Darstellung sollte durch Ergebnissätze und gegebenenfalls durch verbale Beschreibung des Vorgehens übersichtlich strukturiert sein.

Neu eingeführte Bezeichnungen sind zu definieren, dies gilt insbesondere für Zufallsvariablen in der Stochastik.

Die Lösung sollte keine Angabe über Tastenfolgen von WTR-Eingaben enthalten.

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

- Der*die Lehrer*in erhält

für den Pflichtteil	1 Aufgabensatz bestehend aus mehreren kleinen Aufgaben. Insgesamt sind 20 Verrechnungspunkte dafür vorgesehen. Eine Wahlmöglichkeit hat der*die Lehrer*in hier nicht!
für den Wahlteil	2 Aufgabenvorschläge A 1 und A 2 aus der Analysis mit jeweils 20 Verrechnungspunkten . Der*die Lehrer*in wählt einen Vorschlag aus.
	2 Aufgabenvorschläge B 1 und B 2 aus der Geometrie mit jeweils 10 Verrechnungspunkten . Der*die Lehrer*in wählt einen Vorschlag aus.
	2 Aufgabenvorschläge C 1 und C 2 aus der Stochastik mit jeweils 10 Verrechnungspunkten . Der*die Lehrer*in wählt einen Vorschlag aus.

- Der*die Schüler*in

erhält alle von der Lehrkraft ausgewählten Aufgaben ohne Hilfsmittel und bearbeitet	
die Pflichtteilaufgaben ohne Hilfsmittel.	die drei Wahlteilaufgaben aus der Analysis, Geometrie und Stochastik. Erst nach Abgabe des Pflichtteils erhält er*sie die Hilfsmittel WTR und Merkhilfe!
Maximal kann er*sie im Pflichtteil 20 Verrechnungspunkte erzielen.	Maximal kann er*sie im Wahlteil 40 Verrechnungspunkte erzielen.
Insgesamt kann er*sie in der Prüfungsarbeit maximal 60 Verrechnungspunkte erzielen.	

- Die Prüfungszeit beträgt **270 Minuten**.

Aufgabe A 2.1

In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

Versuchsreihe 1

Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} \quad (t \text{ in Stunden nach Beobachtungsbeginn}, f(t) \text{ in } \text{mm}^2).$$

- a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.
Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

3,5 VP

b) Berechnen Sie $\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t) dt$.

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

3,5 VP

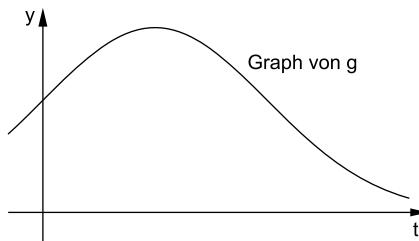
Versuchsreihe 2

Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit

$$g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} - 0,005 \cdot t^2$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ in mm^2).

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g .



- c) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an. Berechnen Sie diesen Wert.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

5 VP

- d) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(t) = g(t+10)$.

Für jede reelle Zahl t gilt: $h(-t) = h(t)$.

Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann.

2 VP

Aufgabe A 2.1

Versuchsreihe 1: Der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche wird durch die Funktion f mit $f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$, $0 \leq t \leq 12$ beschrieben (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in mm^2).

a) Flächeninhalt nach 3 Stunden:

$$\text{Es gilt: } f(3) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 3} = 20 \cdot e^{0,3} \approx 27,00$$

Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn nehmen die Bakterien eine Fläche mit einem Inhalt von **ca. 27 mm^2** ein.

Verdreifachung des Flächeninhalts:

Der Ansatz $f(t) = 3 \cdot f(0)$ führt auf die Gleichung:

$$20 \cdot e^{0,1 \cdot t} = 3 \cdot 20 \cdot e^0$$

$$e^{0,1 \cdot t} = 3$$

$$0,1 \cdot t = \ln(3)$$

$$t = \frac{\ln(3)}{0,1} = 10 \cdot \ln(3) \approx 10,99$$

Ungefähr **11 Stunden** nach Beobachtungsbeginn hat sich der Flächeninhalt verdreifacht.

Momentane Änderungsrate nach 2 Stunden:

Für die Ableitung von f gilt: $f'(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} \cdot 0,1 = 2 \cdot e^{0,1 \cdot t}$

Damit ergibt sich: $f'(2) = 2 \cdot e^{0,1 \cdot 2} = 2 \cdot e^{0,2} \approx 2,44$

Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts **ca. 2,4 mm^2 pro Stunde**.

b) Berechnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t) dt &= \frac{1}{4} \cdot \int_5^9 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} dt = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{20}{0,1} \cdot e^{0,1 \cdot t} \right]_5^9 = \frac{1}{4} \cdot \left[200 \cdot e^{0,1 \cdot t} \right]_5^9 \\ &= 50 \cdot (e^{0,9} - e^{0,5}) \\ &\approx \mathbf{40,54} \quad (\text{oder WTR 3}) \end{aligned}$$

Interpretation:

Der berechnete Ausdruck ist der Mittelwert der Funktion f über dem Intervall $[5; 9]$.

Somit gilt im Sachzusammenhang:

Im Zeitraum zwischen 5 und 9 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt der Flächeninhalt **im Mittel etwa 40,5 mm^2** .

Versuchsreihe 2 mit Antibiotikum: Der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche wird jetzt durch die Funktion g mit $g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$ beschrieben (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $g(t)$ in mm^2).
Der Graph von g ist (ohne Skalierung der Achsen) vorgegeben.

c) **Maximaler Flächeninhalt:**

Für die Ableitung von g gilt:

$$g'(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} \cdot (0,1 - 0,01t) = 20 \cdot (0,1 - 0,01t) \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$$

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle liefert:

$$g'(t) = 0$$

$$20 \cdot (0,1 - 0,01t) \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} = 0 \quad | : 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} \neq 0$$

$$0,1 - 0,01t = 0$$

$$t = \frac{0,1}{0,01} = 10$$

Da die Ableitung nur diese eine Nullstelle hat, muss dort das (in der Aufgabenstellung vorausgesetzte) Maximum von g liegen.

Damit erhält man: $g(10) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 10 - 0,005 \cdot 100} = 20 \cdot e^{1 - 0,5} = 20 \cdot e^{0,5} \approx 32,97$

Der maximale Flächeninhalt beträgt **ca. 33 mm²**.

Gleicher Flächeninhalt wie zu Beobachtungsbeginn:

Der Ansatz $g(t) = g(0)$ führt auf die Gleichung:

$$20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} = 20 \cdot e^0$$

$$e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} = e^0$$

$$0,1t - 0,005t^2 = 0$$

$$t \cdot (0,1 - 0,005t) = 0$$

Die von 0 verschiedene Lösung ist $t = \frac{0,1}{0,005} = 20$.

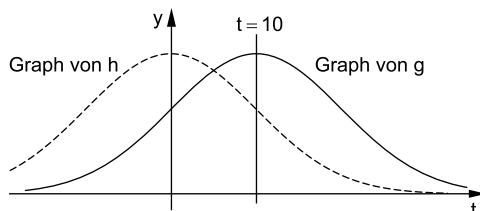
Nach **20 Stunden** ist der Flächeninhalt wieder so groß wie zu Beobachtungsbeginn.

d) **Geometrische Eigenschaft des Graphen von g :**

Für die Funktion h mit $h(t) = g(t+10)$ gilt für jede reelle Zahl t : $h(-t) = h(t)$

Der Graph von h ist daher achsensymmetrisch zur y -Achse.

Da er durch Verschiebung um -10 in t -Richtung aus dem Graphen von g entsteht, ist der Graph von g achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $t=10$.





© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK