2020

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Gymnasium Wü berg

Mathematik

+ *Offizielle Musteraufgaben*
+ *Merkhilfe*
+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

STARK

Inhaltsverzeichnis

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Hilfsmittel

Aufgabensammlung zum Pflichtteil

Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

Aufgaben früherer Abiturjahrgänge

Zusätzliche Übungsaufgaben

Aufgabensammlung zum Wahlteil – Analytische Geometrie

Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

Aufgaben früherer Abiturjahrgänge

Aufgabensammlung zum Wahlteil – Stochastik

Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

Aufgaben früherer Abiturjahrgänge

Zusätzliche Übungsaufgaben

Übungsaufgabensatz im Stil der Prüfung

Offizieller Musteraufgabensatz für 2019 und 2020

Abiturprüfung Haupttermin 2019

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autor
Dr. Raimund Ordowski, Studiendirektor
(Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung, zusätzliche Übungsaufgaben, Übungsaufgabensatz im Stil der Prüfung sowie Lösungen aller Aufgaben)

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Das Abitur 2020

Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik erstreckt sich über die Gebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik.
Die Struktur der Aufgaben ab dem Abitur 2019 und der Prüfungsablauf werden unten genauer beschrieben.
Viele Abituraufgaben der Jahre vor 2019 sind vom Inhalt (nicht unbedingt vom Umfang) her als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet. Eine Auswahl sowie viele weitere Muster- und Übungsaufgaben für das Abitur 2019 finden Sie in diesem Buch.

Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik

Grundlage für das Abitur im Jahr 2020 ist der Bildungsplan 2004 für das achtjährige Gymnasium. Dabei gilt die Einschränkung, dass die folgenden Themen des Bildungsplans **nicht** Gegenstand der schriftlichen Abiturprüfung sein werden:

- Folgen
- Wachstumsprozesse
- Differenzialgleichungen
- Volumen von Rotationskörpern[1]
- Abstand windschiefer Geraden
- Beweise mithilfe von Vektoren
- Stetige Verteilung

Die schriftliche Prüfung ist in einen **Pflichtteil** und einen **Wahlteil** unterteilt.

Pflichtteil

Seit der Prüfung 2017 umfasst der Pflichtteil ein Drittel der Gesamtprüfung. Es werden darin Grundkompetenzen in Form von mehreren kleinen Aufgaben abgeprüft.

Für den Pflichtteil sind **keinerlei Hilfsmittel** zugelassen.

1 Elementare Rotationskörper, die man ohne Integralrechnung bestimmen kann, sind weiterhin möglich.

Wahlteil

Der **Wahlteil** umfasst zwei Drittel der Gesamtprüfung. Er beinhaltet größere Aufgaben zu den drei Teilgebieten mit zusammenhängenden Fragestellungen, wobei verstärkt Transfer, Modellieren von realen Situationen und Entwickeln von Lösungsstrategien gefragt sind.

Beim Wahlteil sind als **Hilfsmittel** – neben einem Nachschlagewerk zur deutschen Rechtschreibung – die **Merkhilfe** sowie ein wissenschaftlicher Taschenrechner (**WTR**) mit dem mitgelieferten Handbuch zugelassen.

Operatoren

In den Formulierungen der Aufgaben finden sich sogenannte Operatoren wie etwa *berechnen*, *zeichnen*, die den jeweiligen Arbeitsauftrag beschreiben. Ihre Bedeutung entspricht meist – wie etwa bei *deuten, interpretieren, erläutern, zuordnen* – dem üblichen Sprachgebrauch. Dennoch sollte man bei den am häufigsten auftretenden Operatoren wissen, in welchem Umfang und mit welcher Qualität eine Lösung erwartet wird. Dazu dient die folgende Übersicht mit Beispielen aus den offiziellen Musteraufgaben:

Operatoren	**Hinweise und *Beispiele***
angeben nennen	Es werden kein Ansatz und keine Begründung verlangt. *Aufgabe A 2.1 a*
beschreiben	Es wird keine Begründung verlangt. *Aufgabe A 1.2 a*
beurteilen begründen nachweisen zeigen	Es wird eine Lösung durch logisches Schließen bzw. Argumentieren erwartet. *Aufgabe A 2.1 a*
berechnen	Es werden ein mathematischer Ansatz und ein nachvollziehbar dokumentierter rechnerischer Lösungsweg erwartet. *Aufgabe A 2.1 c*
bestimmen ermitteln untersuchen	Die Art des Vorgehens ist frei wählbar (beispielsweise auch grafisch), sofern nicht anders angegeben (z. B. „Ermitteln Sie rechnerisch …“). Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar dokumentiert sein. *Aufgaben A 2.1 a; A 2.1 c/d*
grafisch darstellen zeichnen	Es wird eine möglichst genaue Darstellung erwartet. *Aufgabe Geo 1 a*
skizzieren	Es genügt die Beschränkung auf charakteristische Eigenschaften (bei Funktionsgraphen z. B. Extrempunkte, Asymptoten, …). Koordinatensysteme sollten beschriftete und skalierte Achsen haben. *Aufgabe A 1.1 a*

Verlangt die Aufgabenstellung einen **exakten** Wert, so ist ein mathematisch exakter Ausdruck wie z. B. $\frac{3}{7}$, $\sqrt{7}$, $\ln(3)$, $\frac{\pi}{2}$, … gemeint; die Angabe einer gerundeten Dezimalzahl genügt in diesem Fall nicht.

Anforderungen an eine Schülerlösung

Erwartet wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation in einer korrekten Fachsprache.
Die Darstellung sollte durch Ergebnissätze und gegebenenfalls durch verbale Beschreibung des Vorgehens übersichtlich strukturiert sein.
Neu eingeführte Bezeichnungen sind zu definieren, dies gilt insbesondere für Zufallsvariablen in der Stochastik.
Die Lösung sollte keine Angabe über Tastenfolgen von WTR-Eingaben enthalten.

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

- Der*die **Lehrer*in** erhält

<table>
<tr><td>für den Pflichtteil</td><td>1 Aufgabensatz bestehend aus mehreren kleinen Aufgaben.
Insgesamt sind 20 Verrechnungspunkte dafür vorgesehen.
Eine Wahlmöglichkeit hat der*die Lehrer*in hier nicht!</td></tr>
<tr><td rowspan="3">für den Wahlteil</td><td>2 Aufgabenvorschläge A 1 und A 2 aus der Analysis mit jeweils 20 Verrechnungspunkten.
Der*die Lehrer*in wählt einen Vorschlag aus.</td></tr>
<tr><td>2 Aufgabenvorschläge B 1 und B 2 aus der Geometrie mit jeweils 10 Verrechnungspunkten.
Der*die Lehrer*in wählt einen Vorschlag aus.</td></tr>
<tr><td>2 Aufgabenvorschläge C 1 und C 2 aus der Stochastik mit jeweils 10 Verrechnungspunkten.
Der*die Lehrer*in wählt einen Vorschlag aus.</td></tr>
</table>

- Der*die **Schüler*in**

<table>
<tr><td colspan="2">erhält alle von der Lehrkraft ausgewählten Aufgaben ohne Hilfsmittel und bearbeitet</td></tr>
<tr><td>die Pflichtteilaufgaben <u>ohne</u> Hilfsmittel.</td><td>die drei Wahlteilaufgaben aus der Analysis, Geometrie und Stochastik.
Erst nach Abgabe des Pflichtteils erhält er*sie die Hilfsmittel WTR und Merkhilfe!</td></tr>
<tr><td>Maximal kann er*sie im Pflichtteil
20 Verrechnungspunkte erzielen.</td><td>Maximal kann er*sie im Wahlteil
40 Verrechnungspunkte erzielen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Insgesamt kann er*sie in der Prüfungsarbeit maximal 60 Verrechnungspunkte erzielen.</td></tr>
</table>

- Die **Prüfungszeit** beträgt **270 Minuten**.

Wahlteil: Analysis A 2

Aufgabe A 2.1

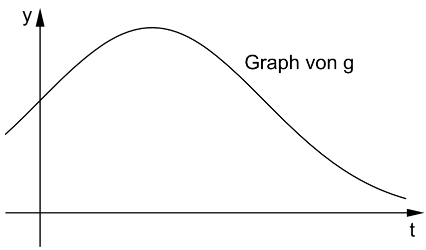
In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

Versuchsreihe 1
Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit
$f(t) = 20 \cdot e^{0{,}1 \cdot t}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, f(t) in mm^2).

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.
Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn. 3,5 VP

b) Berechnen Sie $\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t)\,dt$.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 3,5 VP

Versuchsreihe 2
Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit
$g(t) = 20 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}005 \cdot t^2}$
(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, g(t) in mm^2).
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g.



c) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an. Berechnen Sie diesen Wert.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn. 5 VP

d) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(t) = g(t + 10)$.
Für jede reelle Zahl t gilt: $h(-t) = h(t)$.
Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann. 2 VP

Aufgabe A 2.1

Versuchsreihe 1: Der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche wird durch die Funktion f mit $f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$, $0 \leq t \leq 12$ beschrieben (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, f(t) in mm^2).

a) **Flächeninhalt nach 3 Stunden:**

Es gilt: $f(3) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 3} = 20 \cdot e^{0,3} \approx 27,00$

Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn nehmen die Bakterien eine Fläche mit einem Inhalt von **ca. 27 mm²** ein.

Verdreifachung des Flächeninhalts:

Der Ansatz $f(t) = 3 \cdot f(0)$ führt auf die Gleichung:

$$20 \cdot e^{0,1 \cdot t} = 3 \cdot 20 \cdot e^0$$

$$e^{0,1 \cdot t} = 3$$

$$0,1 \cdot t = \ln(3)$$

$$t = \frac{\ln(3)}{0,1} = 10 \cdot \ln(3) \approx 10,99$$

Ungefähr **11 Stunden** nach Beobachtungsbeginn hat sich der Flächeninhalt verdreifacht.

Momentane Änderungsrate nach 2 Stunden:

Für die Ableitung von f gilt: $f'(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} \cdot 0,1 = 2 \cdot e^{0,1 \cdot t}$

Damit ergibt sich: $f'(2) = 2 \cdot e^{0,1 \cdot 2} = 2 \cdot e^{0,2} \approx 2,44$

Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts **ca. 2,4 mm² pro Stunde**.

b) **Berechnung:**

$$\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t)\,dt = \frac{1}{4} \cdot \int_5^9 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}\,dt = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{20}{0,1} \cdot e^{0,1 \cdot t}\right]_5^9 = \frac{1}{4} \cdot \left[200 \cdot e^{0,1 \cdot t}\right]_5^9$$

$$= 50 \cdot (e^{0,9} - e^{0,5})$$

$$\approx \mathbf{40,54} \qquad \text{(oder WTR 3)}$$

Interpretation:

Der berechnete Ausdruck ist der Mittelwert der Funktion f über dem Intervall [5; 9].

Somit gilt im Sachzusammenhang:
Im Zeitraum zwischen 5 und 9 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt der Flächeninhalt **im Mittel etwa 40,5 mm²**.

Versuchsreihe 2 mit Antibiotikum: Der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche wird jetzt durch die Funktion g mit $g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$ beschrieben (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, g(t) in mm^2).
Der Graph von g ist (ohne Skalierung der Achsen) vorgegeben.

c) **Maximaler Flächeninhalt:**

Für die Ableitung von g gilt:

$g'(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} \cdot (0,1 - 0,01t) = 20 \cdot (0,1 - 0,01t) \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle liefert:

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ 20 \cdot (0,1 - 0,01t) \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} &= 0 \qquad \Big| : 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} \neq 0 \\ 0,1 - 0,01t &= 0 \\ t &= \frac{0,1}{0,01} = 10 \end{aligned}$$

Da die Ableitung nur diese eine Nullstelle hat, muss dort das (in der Aufgabenstellung vorausgesetzte) Maximum von g liegen.

Damit erhält man: $g(10) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 10 - 0,005 \cdot 100} = 20 \cdot e^{1 - 0,5} = 20 \cdot e^{0,5} \approx 32,97$

Der maximale Flächeninhalt beträgt **ca. 33 mm²**.

Gleicher Flächeninhalt wie zu Beobachtungsbeginn:

Der Ansatz $g(t) = g(0)$ führt auf die Gleichung:

$$\begin{aligned} 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} &= 20 \cdot e^0 \\ e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} &= e^0 \\ 0,1t - 0,005t^2 &= 0 \\ t \cdot (0,1 - 0,005t) &= 0 \end{aligned}$$

Die von 0 verschiedene Lösung ist $t = \dfrac{0,1}{0,005} = 20.$

Nach **20 Stunden** ist der Flächeninhalt wieder so groß wie zu Beobachtungsbeginn.

d) **Geometrische Eigenschaft des Graphen von g:**

Für die Funktion h mit $h(t) = g(t + 10)$ gilt für jede reelle Zahl t: $h(-t) = h(t)$
Der Graph von h ist daher achsensymmetrisch zur y-Achse.

Da er durch Verschiebung um –10 in t-Richtung aus dem Graphen von g entsteht, ist der Graph von g achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $t = 10$.