

Inhaltsverzeichnis

Teil I

1 Ein-Perioden-Wertpapiermärkte	3
1.1 Ein-Perioden-Modelle	4
1.2 Portfolios	7
1.3 Optionen und Forward-Kontrakte	9
1.3.1 Optionen	10
1.3.2 Forward-Kontrakte	12
1.4 Die Bewertung von Auszahlungsprofilen	14
1.4.1 Die Transformation deterministischer Zahlungsströme ..	15
1.4.2 Die Transformation zustandsabhängiger Zahlungsströme	16
1.4.3 Die Bewertung von Auszahlungsprofilen mit Hilfe von Replikation	18
1.5 Replikation und das „Law of One Price“	25
1.6 Arbitrage	32
1.6.1 Der Fundamentalsatz der Preistheorie	36
1.6.2 Der Nachweis der Arbitragefreiheit	43
1.6.3 Replizierbarkeit und Vollständigkeit	44
1.6.4 Interpretation von ψ und d	45
1.6.5 Preise als diskontierte Erwartungswerte	47
1.7 Das Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell	55
1.8 Partial-Hedging	59
1.9 Wertgrenzen für Call- und Put-Optionen	62
1.10 Das diskontierte Marktmodell	63
1.11 Zusammenfassung	67
1.12 Weitere Aufgaben	69
2 Portfoliotheorie	73
2.1 Rendite und Risiko	73
2.1.1 Die erwartete Rendite	74
2.1.2 Risiko, Varianz und Volatilität	74

2.1.3 Rationale Investoren	76
2.1.4 Das $\mu\text{-}\sigma$ -Diagramm	76
2.2 Portfolioanalyse	76
2.2.1 Rendite und erwartete Rendite eines Portfolios	77
2.2.2 Varianz und Standardabweichung eines Portfolios	79
2.2.3 Relative Risikobeträge	82
2.2.4 Interpretation der Kovarianz	83
2.2.5 Die Korrelation	84
2.2.6 Diversifikation	87
2.2.7 Die klassische Darstellung des CAPM	91
2.2.8 Systematisches und spezifisches Risiko	100
2.3 Minimum-Varianz-Portfolio-Analyse	104
2.3.1 Die Zustandsdichte	105
2.3.2 CAPM und das Minimum-Varianz-Optimierungsproblem	112
2.3.3 Anwendungsbeispiel für den Fall $\mathcal{L} \in \text{Im } D^T$	121
2.3.4 Der Fall $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^K$ beliebig	122
2.4 Weitere Aufgaben	132
3 Mehr-Perioden-Modelle	135
3.1 Modellierung der Informationszunahme	136
3.1.1 Informationsbäume,.....	136
3.1.2 Algebren und Partitionen	141
3.2 Stochastische Prozesse und Messbarkeit	146
3.2.1 Die natürliche Filtration	151
3.3 Das Marktmodell	156
3.4 Die Bewertung von Auszahlungsprofilen	162
3.4.1 Lokalisierung	164
3.4.2 Ein-Perioden-Teilmodelle	164
3.4.3 Konstruktion einer replizierenden Handelsstrategie.....	165
3.5 Das Law of One Price	170
3.6 Arbitragefreiheit und der Fundamentalsatz	174
3.6.1 Die Diskontierung von Zahlungsströmen	177
3.7 Der Diskontierungsoperator	185
3.7.1 Definition und Eigenschaften	185
3.7.2 Direktes und rekursives Verfahren zur Bestimmung der Preise von Auszahlungsprofilen	192
3.7.3 Darstellung der Preise als Erwartungswerte	195
3.7.4 Festverzinsliche Handelsstrategien	196
3.7.5 Der Diskontierungsoperator wird zur bedingten Erwartung	202
3.7.6 Preisprozesse werden zu Martingalen	205
3.8 Wertgrenzen für Call- und Put-Optionen	206
3.9 Die Zinsstrukturkurve	207
3.10 Das diskontierte Marktmodell	212
3.11 Zusammenfassung	220

3.12 Weitere Aufgaben	226
4 Optionen, Futures und andere Derivate	229
4.1 Das Mehr-Perioden-Binomialbaum-Modell	230
4.2 Rekombinierende Binomialbäume	233
4.2.1 Das direkte und das rekursive Bewertungsverfahren ..	237
4.3 Kalibrierung der Parameter des Binomialbaums	239
4.3.1 Bestimmung des Zinssatzes r_n pro Periode.....	239
4.3.2 Die Modellierung der Aktienkurse	239
4.3.3 Binomialbäume und Binomialverteilung	243
4.3.4 Die Bestimmung der Parameter u_n und p_n	245
4.3.5 Näherungslösungen für u_n und p_n	247
4.4 Die Bewertung europäischer Standard-Derivate	250
4.4.1 Das direkte Bewertungsverfahren	250
4.4.2 Das rekursive Bewertungsverfahren	256
4.5 Die Berücksichtigung von Dividendenzahlungen	257
4.5.1 Die Modellierung von Aktienkursen mit Dividendenzahlungen	257
4.5.2 Die Bewertung im Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell ..	261
4.5.3 Dividenden im Mehr-Perioden-Modell	265
4.5.4 Algorithmen zur Bewertung europäischer Auszahlungen mit Dividenden	269
4.6 Amerikanische Optionen	272
4.6.1 Die Bewertung amerikanischer Optionen ohne Dividendenzahlungen	272
4.6.2 Ein Algorithmus zur Berechnung amerikanischer Auszahlungen ohne Dividendenzahlung	276
4.7 Amerikanische Optionen mit Dividendenzahlungen	278
4.7.1 Ein Algorithmus zur Berechnung von amerikanischen Optionen mit Dividendenzahlung	278
4.8 Die Black-Scholes-Formeln	280
4.8.1 Bewertungsformeln im Binomialbaum-Modell	281
4.8.2 Die Konvergenz der Bewertungsformeln des Binomialbaum-Modells gegen die Black-Scholes-Formeln	284
4.8.3 Die analytische Bewertung von Standard-Optionen im Black-Scholes-Modell	286
4.8.4 Implementierung der Black-Scholes-Formeln	286
4.9 Present Value und die Bewertung von Zahlungsströmen	293
4.10 Swaps	296
4.11 Forward-Preise	296
4.12 Futures	299
4.13 Bonds	306
4.13.1 Die Bewertung von Bonds	306
4.13.2 Interne Renditen	307
4.13.3 Duration	308

XIV Inhaltsverzeichnis

4.13.4 Konvexität	310
4.14 Forward-Start-Optionen	310
4.15 Forward-Start-Performance-Optionen	312
4.16 Ein strukturiertes Produkt	313
4.17 Weitere Aufgaben	315
5 Value at Risk und kohärente Risikomaße	317
5.1 Verteilungsfunktionen	317
5.2 Konstruktion einer Zufallsvariablen mit vorgegebener Verteilungsfunktion	320
5.3 Quantile	326
5.4 Definition des Value at Risk	329
5.4.1 Darstellung des Value at Risk mit Hilfe der Renditeverteilung eines Portfolios	333
5.5 Normalverteilte Portfoliorenditen	334
5.5.1 Zeitliche Skalierung	335
5.5.2 Die Portfoliorendite als Linearkombination normalverteilter Renditen	340
5.6 Die Delta-Normal-Methode	343
5.6.1 Das Differential eines Finanzinstrumentes	344
5.6.2 Der Value at Risk nach der Delta-Normal-Methode ..	346
5.6.3 Berechnung der modifizierten Sensitivitäten	348
5.6.4 Component VaR	355
5.6.5 Directional VaR	356
5.7 Diskussion: Value at Risk als Risikomaß	358
5.8 Kohärente Risikomaße	358
5.9 Expected Shortfall	365
5.9.1 Der Nachweis der Kohärenz des Expected Shortfall ..	366
5.9.2 Weitere Eigenschaften und Schätzung des Expected Shortfall	369
5.10 Weitere Aufgaben	372

Teil II

6 Diskrete Stochastische Analysis	375
6.1 Bedingte Erwartung und Martingale	376
6.1.1 Die bedingte Erwartung als Projektion	382
6.2 Unabhängigkeit	384
6.3 Martingale	387
6.4 Die Doob-Zerlegung	390
6.5 Kovariations-Prozesse	393
6.6 Orthogonale Martingale	396
6.7 Das diskrete stochastische Integral	397
6.8 Stochastische Integrale und Kovariations-Prozesse	398

6.9	Die Itô-Formel	400
6.10	Stochastische Exponentiale	401
6.11	Der Martingal-Darstellungssatz	404
6.12	Der Satz von Girsanov	405
6.12.1	Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte	405
6.12.2	Der Satz von Girsanov	406
6.13	Martingalmaße und Maßwechsel	408
6.13.1	Die Existenz von Martingalmaßen	411
6.14	Stoppzeiten	413
6.15	Weitere Aufgaben	417
7	Stochastische Finanzmathematik in diskreter Zeit	419
7.1	Das Black-Scholes-Modell	419
7.1.1	Schritt 1: Modellierung der Dynamik der Wertpapiere, das Black-Scholes-Modell	421
7.1.2	Schritt 2: Konstruktion eines Martingalmaßes	422
7.1.3	Schritt 3: Definition des Preises von c_T als Erwartungswert	425
7.1.4	Schritt 4: Konstruktion einer die Endauszahlung c_T replizierenden selbstfinanzierenden Handelsstrategie	425
7.1.5	Vollständigkeit und Arbitragefreiheit binomialer Marktmodelle	427
7.2	Die Binomialbaum-Formeln	428
7.3	Die Black-Scholes-Formeln	431
7.4	Amerikanische Optionen	435
7.5	Aufgaben	437
8	Einführung in die stetige Finanzmathematik	439
8.1	Das Black-Scholes-Modell	439
8.1.1	Schritt 1: Modellierung der Dynamik der Wertpapiere, das Black-Scholes-Modell	441
8.1.2	Schritt 2: Konstruktion eines Martingalmaßes	442
8.1.3	Schritt 3: Definition des Preises von c_T als Erwartungswert	443
8.1.4	Schritt 4: Konstruktion einer die Endauszahlung c_T replizierenden selbstfinanzierenden Handelsstrategie	444
8.2	Die Black-Scholes-Formeln	445
8.3	Elemente der stochastischen Analysis	446
8.3.1	Bedingte Erwartung und Martingale	446
8.3.2	Brown'sche Bewegung und Wienermaße	447
8.3.3	Das Itô-Integral	448
8.3.4	Itô-Prozesse und Itô-Formel	457
8.3.5	Der Satz von Girsanov	460
8.3.6	Der Martingal-Darstellungssatz	461

XVI Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis 463

Sachverzeichnis 467