

Inhalt

1. Prolog.....	1
1.1 Bemerkungen zu den Zielsetzungen dieses Buches.....	1
1.2 Erinnerung an Skalare, Vektoren und Tensoren.....	5
1.2.1 Beispiel 1: Glasfaseroptik - Einpressen einer Kugellinse in eine Hülse.....	6
1.2.2 Beispiel 2: Verbundwerkstoffe - Thermospannungen um Fasern.....	10
1.2.3 Beispiel 3: Risse.....	12
2. Koordinatentransformationen.....	15
2.1 Eine (persönliche) Vorbemerkung.....	15
2.2 Erste Definitionen und Begriffe in Indexschreibweise.....	15
Übung 2.2.1: <i>Linielement</i>	17
Übung 2.2.2: <i>Metrischer Tensor für Kugelkoordinaten</i>	19
Übung 2.2.3: <i>Linielement in Kugelkoordinaten</i>	21
Übung 2.2.4: <i>Dekoration</i>	22
2.3 Vektorielle Interpretation der Metrik.....	23
Übung 2.3.1: <i>Metrik eines ebenen schiefwinkligen Koordinatensystems</i>	26
Übung 2.3.2: <i>Elliptische Koordinaten</i>	27
2.4 Ko- und kontravariante Komponenten.....	27
Übung 2.4.1: <i>Transformationsformel für ein rechtwinkliges auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene</i>	30
Übung 2.4.2: <i>Kontravariante Metrikkomponenten</i>	31
Übung 2.4.3: <i>Überführen kovarianter in kontravariante Komponenten</i>	31
Übung 2.4.4: <i>Die Komponenten des Metriktensors als ko- und kontravariante Komponenten des Einheitstensors</i>	33
Übung 2.4.5: <i>Die ko- und kontravarianten Komponenten des Ortsvektors in Zylinder- und Kugelkoordinaten</i>	33
Übung 2.4.6: <i>Die ko- und kontravarianten Komponenten des Spannungstensors in Zylinderkoordinaten</i>	34
Übung 2.4.7: <i>Die ko- und kontravarianten Komponenten des Spannungstensors in Kugelkoordinaten</i>	34
2.5 Ko- und kontravariante Darstellung vektoriell betrachtet.....	35
Übung 2.5.1: <i>Basisvektoren für schiefwinklige Koordinaten</i>	36
Übung 2.5.2: <i>Die Spur eines Tensors zweiter Stufe</i>	37
2.6 Physikalische Komponenten von Vektoren und Tensoren.....	37
Übung 2.6.1: <i>Diagonalität des metrischen Tensors für orthogonale Koordinatensysteme</i>	38

Übung 2.6.2:	<i>Die Länge eines Vektors, ausgedrückt in physikalischen Komponenten</i>	39
Übung 2.6.3:	<i>Die physikalischen Komponenten des Spannungstensors in Zylinderkoordinaten</i>	39
Übung 2.6.4:	<i>Die physikalischen Komponenten des Metrikensors</i>	40
Übung 2.6.5:	<i>Die Fließspannungsbedingung nach VON MISES</i>	41
2.7	Ein wenig Differentialgeometrie	42
Übung 2.7.1:	<i>Topologie der Kugeloberfläche</i>	45
Übung 2.7.2	<i>Topologie der Zylinderoberfläche</i>	45
2.8	Would you like to know more?	45
3.	Bilanzen (insbesondere in kartesischen Systemen)	47
3.1	Vorbemerkungen	47
3.2	Massen- und Impulsbilanz	49
Übung 3.2.1:	<i>Die CAUCHYsche Formel</i>	51
3.3	Allgemeine globale Bilanzgleichung	52
3.4	Transporttheorem für Volumina	54
Übung 3.4.1:	<i>Rund um den GAUSSschen Satz</i>	55
Übung 3.4.2:	<i>Eine Darstellung der JACOBI-determinante</i>	61
Übung 3.4.3:	<i>Zur Zeitableitung der JACOBI-determinante (direkter Beweis)</i>	63
3.5	Transporttheoreme für Flächen	65
3.6	Kombination der Bilanzgleichung mit Transporttheoremen	67
3.7	Allgemeine Bilanzen in regulären und singulären Punkten	67
3.8	Konkrete lokale Bilanzgleichungen in regulären Punkten	69
Übung 3.8.1:	<i>Varianten der lokalen Massenbilanz</i>	70
Übung 3.8.2:	<i>Varianten der lokalen Impulsbilanz</i>	71
3.9	Konkrete lokale Bilanzgleichungen in singulären Punkten	74
Übung 3.9.1:	<i>Sprungbilanz für den Impuls im statischen Fall</i>	75
3.10	Would you like to know more?	76
4.	Ortsableitungen von Feldern	77
4.1	Ortsableitungen von Skalaren	77
4.2	Ortsableitungen von Vektoren	78
Übung 4.2.1:	<i>CHRISTOFFELsymbole ausgedrückt durch die Metrik</i>	79
Übung 4.2.2:	<i>CHRISTOFFELsymbole für Zylinderkoordinaten</i>	79
Übung 4.2.3:	<i>CHRISTOFFELsymbole für Kugelkoordinaten</i>	79
Übung 4.2.4:	<i>CHRISTOFFELsymbole für elliptische Koordinaten</i>	79
Übung 4.2.5:	<i>Kovariante Ableitung kovarianter Vektorkomponenten</i>	80
Übung 4.2.6:	<i>Die Divergenz eines Vektorfeldes</i>	81
Übung 4.2.7:	<i>Der LAPLACEoperator</i>	81
4.3	Invariante Schreibweise von Ortsableitungen skalarer Felder	82
Übung 4.3.1:	<i>Der LAPLACEoperator in Zylinderkoordinaten neu gesehen</i>	84

Übung 4.3.2:	<i>Der LAPLACEoperator absolut und indexbezogen geschrieben</i>	84
4.4	Ortsableitungen von Tensoren	84
Übung 4.4.1:	<i>Die kovariante Ableitung des Metrikensors</i>	86
Übung 4.4.2:	<i>Die kovariante Ableitung für gemischte Tensoren zweiter Stufe</i>	87
Übung 4.4.3:	<i>Die kovariante Ableitung für Tensoren beliebiger Stufe</i>	87
4.5	Would you like to know more?	87
5.	Bilanzgleichungen in krummlinigen Koordinatensystemen	89
5.1	Die Massenbilanz in regulären Punkten in einem beliebigen Koordinatensystem	89
5.2	Die Massenbilanz (regulär) in Zylinderkoordinaten	90
Übung 5.2.1:	<i>Die Massenbilanz (regulär) in Kugelkoordinaten</i>	90
5.3	Die Impulsbilanz in regulären Punkten in einem beliebigen Koordinatensystem	91
Übung 5.3.1:	<i>Alternative Schreibweisen der Impulsbilanz (regulär) in beliebigen Koordinaten</i>	91
5.4	Die Impulsbilanz (regulär) in Zylinderkoordinaten	92
Übung 5.4.1:	<i>Die Impulsbilanz (regulär) in physikalischen Zylinderkoordinaten</i>	92
5.5	Impulsbilanz der Statik	92
5.6	Impulsbilanz (regulär) der Statik in Zylinderkoordinaten	93
Übung 5.6.1:	<i>Impulsbilanz (regulär) der Statik in Kugelkoordinaten</i>	93
5.7	Die Energiebilanz in regulären Punkten in einem beliebigen Koordinatensystem	94
Übung 5.7.1:	<i>Die Bilanz der kinetischen Energie (regulär) in beliebigen Koordinaten</i>	97
Übung 5.7.2:	<i>Die Bilanz der inneren Energie (regulär) in beliebigen Koordinaten</i>	98
5.8	Die Bilanzen für Masse, Impuls und Energie in singulären Punkten in einem beliebigen Koordinatensystem	98
5.9	Das Transporttheorem für Volumenintegrale in beliebigen Koordinatensystemen	99
5.10	Globale Bilanzen für Masse, Impuls und Energie	100
5.11	Would you like to know more?	100
6.	Materialgleichungen in beliebigen Koordinatensystemen	103
6.1	Eingangsbemerkungen	103
6.2	Das HOOKESche Gesetz	104
Übung 6.2.1:	<i>LAMÉ-NAVIERsche Gleichungen und der eindimensionale Zugstab</i>	106

Übung 6.2.2:	<i>LAMÉ-NAVIERsche Gleichungen und elementarer Schubversuch</i>	108
Übung 6.2.3:	<i>HOOKESches Gesetz und Verzerrungstensor in kontravarianter und anderen Schreibweisen</i>	109
Übung 6.2.4:	<i>HOOKESches Gesetz und Verzerrungstensor in Zylinderkoordinaten.....</i>	110
Übung 6.2.5:	<i>HOOKESches Gesetz und Verzerrungstensor in Kugelkoordinaten.....</i>	110
Übung 6.2.6:	<i>Linearer Verzerrungstensor und Deformationsgradient</i>	111
6.3	Das NAVIER-STOKES Gesetz	112
Übung 6.3.1:	<i>Das NAVIER-STOKES Gesetz alternativ geschrieben</i>	113
Übung 6.3.2:	<i>NAVIER-STOKES Gesetz und Verzerrungstensor in physikalischen Zylinder- und Kugelkoordinaten.....</i>	113
6.4	Das ideale Gasgesetz	114
6.5	Die innere Energie von Gasen und Festkörpern	117
Übung 6.5.1:	<i>Spezifische Wärme von Gasen bei konstantem Druck</i>	119
Übung 6.5.2:	<i>Spezifische Wärme eines Festkörpers</i>	122
Übung 6.5.3:	<i>Die Adiabatangleichung.....</i>	124
6.6	Die FOURIERSche Wärmeleitungsgleichung.....	124
Übung 6.6.1:	<i>Richtung des Wärmeflusses und des Temperaturgradienten</i>	125
6.7	Would you like to know more?	125
7.	Erste Feldgleichungen.....	127
7.1	Eine Vorbemerkung	127
7.2	Globale Problemstellungen mit Kontrollvolumen	128
Übung 7.2.1:	<i>Versagen der Halterung zwischen zwei Gaskammern</i>	135
7.3	Die NAVIER-LAMÉschen Gleichungen	135
Übung 7.3.1:	<i>Kontra- und kovariante Form der NAVIER-LAMÉschen Gleichungen.....</i>	137
Übung 7.3.2:	<i>Der linear-elastische, kreisförmige Torsionsstab</i>	138
7.4	Die NAVIER-STOKESSchen Gleichungen	139
Übung 7.4.1:	<i>Planparallele Plattenströmung</i>	141
Übung 7.4.2:	<i>Alternative Schreibweisen/Bezeichnungen bei NAVIER-STOKES-Gleichungen</i>	141
Übung 7.4.3:	<i>NAVIER-STOKES-Gleichungen in kontravarianter Schreibweise</i>	142
7.5	Die Wärmeleitungsgleichung	143
Übung 7.5.1:	<i>Wärmeleitung durch eine Wand.....</i>	146
Übung 7.5.2:	<i>Temperaturverteilung um einen Heizdraht.....</i>	147
7.6	Would you like to know more?	147

8.	Beobachterwechsel in der klassischen Kontinuumstheorie	149
8.1	Einführung.....	149
8.2	EUKLIDische Beobachtertransformationen	150
	Übung 8.2.1: <i>Alternativschreibweisen der EUKLIDischen Transformation</i>	152
8.3	Objektive Tensorgrößen und kinematische Anwendungen	155
	Übung 8.3.1: <i>Alternativschreibweisen zum EUKLIDischen Tensor</i>	155
	Übung 8.3.2: <i>Das Kreuzprodukt neu gesehen</i>	159
	Übung 8.3.3: <i>Zentrifugalbeschleunigung und Co. in absoluter Schreibweise</i>	163
8.4	Massenbilanz und EUKLIDische Transformationen	164
8.5	Die Impulsbilanz in bewegten Koordinatensystemen: Ein beinahe philosophischer Exkurs	166
	Übung 8.5.1: <i>Der Spannungstensor als objektive Größe</i>	167
	Übung 8.5.2: <i>Impulsbilanz im bewegten System vektoriell geschrieben</i>	168
	Übung 8.5.3: <i>Drehung um eine feste Achse</i>	174
	Übung 8.5.4: <i>Planung einer Raumstation</i>	175
8.6	Energiebilanzen im rotierenden System	176
	Übung 8.6.1: <i>Die Leistung der Scheinkräfte</i>	176
	Übung 8.6.2: <i>Forminvarianz des ersten Hauptsatzes</i>	178
8.7	Zeitableitungen in bewegten Systemen	178
8.8	Bemerkung zur Forminvarianz von Materialgleichungen	180
8.9	Would you like to know more?	181
9.	Probleme der linearen Elastizitätstheorie	183
9.1	Einführung.....	183
9.2	Die sich drehende Kreisscheibe.....	183
	Übung 9.2.1: <i>Nachlese zur rotierenden Kreisscheibe ohne Innenloch</i>	188
	Übung 9.2.2: <i>Rotierende Kreisscheibe mit Innenloch</i>	188
9.3	Das Pipelineproblem: Ein dickwandiger Hohlzylinder unter Innen- und Außendruck.....	190
	Übung 9.3.1: <i>Vorbereitungen zum „Bratwursteffekt“</i>	192
	Übung 9.3.2: <i>Alternative Herleitung der „Bratwurstgleichungen“</i> ...	193
9.4	Thermospannungen in Faserverbundwerkstoffen.....	193
	Übung 9.4.1: <i>Faserverbundwerkstoffe I</i>	195
	Übung 9.4.2: <i>Faserverbundwerkstoffe II</i>	195
9.5	Umwandlungsverstärkte keramische Werkstoffe	196
	Übung 9.5.1: <i>Verschiebungen und Spannungen im kugelsymmetrischen Fall</i>	200
	Übung 9.5.2: <i>Umwandlungstemperatur eines Zirkoneinschlusses</i>	202
	Übung 9.5.3: <i>Erweitertes HOOKEsches Gesetz</i>	203
9.6	Das Rissmodell von GRIFFITH	204

Übung 9.6.1:	<i>Impulsbilanz in physikalischen elliptischen Koordinaten</i>	207
Übung 9.6.2:	<i>Spannungsfeld um einen GRIFFITHriss I</i>	208
Übung 9.6.3:	<i>Spannungsfeld um einen GRIFFITHriss II</i>	208
Übung 9.6.4:	<i>Bruchzähigkeit</i>	209
9.7	<i>Would you like to know more?</i>	209
10.	Instationäre reibungsbehaftete Fluidmechanik	211
10.1	Problemstellung	211
Übung 10.1.1:	<i>NEWTONsches vs. MAXWELLSches Materialverhalten: Natur der resultierenden Feldgleichungen</i>	213
10.2	Lösung im NAVIER-STOKES-Fall	215
Übung 10.2.1:	<i>Fortsetzung einer Funktion und Lösung für die NAVIER-STOKES Plattenströmung</i>	218
10.3	Lösung im MAXWELL-Fall	219
Übung 10.3.1:	<i>Strömungsfeld eines MAXWELLfluids</i>	225
Übung 10.3.2:	<i>FOURIERreihen zur D'ALEMBERTschen Darstellung des MAXWELLfalles</i>	228
10.4	<i>Would you like to know more?</i>	228
11.	Einführung in die zeitunabhängige Plastizitätstheorie	229
11.1	Ein konkretes Problem	229
11.2	Die radialsymmetrische Lösung	230
Übung 11.2.1:	<i>Lineare Spannungs-Dehnungslösung für unter Druck stehende Hohlkugel</i>	230
Übung 11.2.2:	<i>Eigenspannungsverteilung</i>	237
11.3	Die PRANDTL-REUSS-Gleichungen	237
Übung 11.3.1:	<i>Eindimensionaler plastisch fließender Zugstab</i>	242
Übung 11.3.2:	<i>Plastische Dehnraten für den Fall der Hohlkugel</i>	243
11.4	<i>Would you like to know more?</i>	244
12.	Entropie	247
12.1	Entropie in Bilanzform	247
Übung 12.1.1:	<i>Der integrierende Faktor im Fall des idealen Gases</i>	251
Übung 12.1.2:	<i>Die Entropie des idealen Gases</i>	255
12.2	Die Entropiekonzept als Maß für (Un-) Ordnung und (Ir-) Reversibilität	255
Übung 12.2.1:	<i>Entropiezuwachs nach Durchmischen des Inhalts zweier Druckkammern</i>	260
12.3	Globale Eigenschaften der Entropieungleichung: Die Verfügbarkeit (Availability)	261
12.4	Reduktion der Form der Materialfunktionen für ein viskoses wärmeleitendes Fluid	263
12.5	<i>Would you like to know more?</i>	269

13. Grundlagen der elektrodynamischen Feldtheorie	271
13.1 Vorbemerkungen	271
13.2 Der Erhaltungssatz für den magnetischen Fluss	273
Übung 13.2.1: <i>Der STOKESSche Satz</i>	276
Übung 13.2.2: <i>Transporttheorem für vektorielle Flächendichten</i>	277
13.3 Elektrische Ladungen, Ströme, elektrische Feldstärke und magnetische Induktion	278
Übung 13.3.1: <i>Messverfahren für E und B; elektrische Grundeinheiten</i>	280
13.4 Erhaltungssatz für die Gesamtladung	281
Übung 13.4.1: <i>Die MAXWELLSchen Gleichungen in regulären und in singulären Punkten</i>	286
Übung 13.4.2: <i>Eine Anwendung der Sprungbilanz für das elektrische Feld</i>	287
13.5 Prinzipielle Messung des Ladungs- und Strompotentials	287
Übung 13.5.1: <i>Einheiten und Messverfahren für D und H</i>	290
Übung 13.5.2: <i>Eichung von D und H</i>	291
13.6 Zerlegung der totalen Ladungsdichte, Begriff der Polarisation, Umschreibung des COULOMBSchen Gesetzes	292
13.7 Zerlegung der totalen Ströme, Begriff der Magnetisierung, Umschreibung des ØRSTED-AMPÈRESchen Gesetzes	294
13.8 Die MAXWELL-LORENTZ-Äther Relationen	296
Übung 13.8.1: <i>Die Vakuumlösungen der MAXWELLSchen Gleichungen nach Heinrich HERTZ</i>	297
Übung 13.8.2: <i>Das COULOMBSche Gesetz in traditioneller Form und die Definitionsgleichung des Amperes (BIOT-SAVART-Gesetz)</i>	298
13.9 Transformationsverhalten der elektro-magnetischen Feldgrößen	299
Übung 13.9.1: <i>Das elektrische Feld als nichtobjektiver Vektor</i>	301
Übung 13.9.2: <i>Das Ladungspotential als objektiver und das magnetische Feld als nichtobjektiver Vektor</i>	302
Übung 13.9.3: <i>Transformationsverhalten des Strompotentials in Materie</i>	303
Übung 13.9.4: <i>Zur Invarianz der MAXWELLSchen Gleichungen</i>	303
13.10 Transformationsverhalten der MAXWELL-LORENTZ- Ätherrelationen und der MAXWELLSchen Gleichungen	304
Übung 13.10.1: <i>MAXWELL-LORENTZ-Ätherrelationen in EUKLIDischen Systemen</i>	306
Übung 13.10.2: <i>Beschleunigung und MAXWELL-LORENTZ- Ätherrelationen bei GALILEItransformationen</i>	306
13.11 Viererschreibweise der elektromagnetischen Felder	306
Übung 13.11.1: <i>Vierschreibweise der elektromagnetischen Transformationsgleichungen im EUKLIDischen Fall</i>	309

Übung 13.11.2: <i>MAXWELLSche Gleichungen in Viererschreibweise: Teil I</i>	310
Übung 13.11.3: <i>MAXWELLSche Gleichungen in Viererschreibweise: Teil II</i>	311
Übung 13.11.4: <i>Transformationsgleichung für das vierdimensionale Ladungs-Strompotential</i>	311
13.12 Viererschreibweise der MAXWELL-LORENTZ-Ätherrelationen: Die LORENTZtransformation	312
Übung 13.12.1: <i>Zeit-Raummetrik der EUKLIDISCHEN Transformation</i> ..	313
Übung 13.12.2: <i>Weitere Untersuchungen zur LORENTZtransformation</i> ..	317
Übung 13.12.3: <i>Nachtrag zum MICHELSON-MORLEY-Experiment</i>	320
13.13 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes	322
13.14 Einfachste Materialgleichungen in der Elektrodynamik	324
13.15 Would you like to know more?	327
Bildquellen	329
Literaturverzeichnis	333
Stichwortverzeichnis	339