2020

Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR
ERFAHREN

Gymnasium ... RW

Mathematik

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives Training

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2018

Abiturprüfung 2019

Im Downloadbereich zu diesem Buch finden Sie alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2014 bis 2019** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind.
Außerdem finden Sie dort Lernvideos zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS beim Lösen von Abituraufgaben im Prüfungsteil B.

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **Interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind.
Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Grundkurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2020** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2020 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Die schriftliche Abiturprüfung besteht seit 2017 aus folgenden beiden Teilen:

  Prüfungsteil A: Aufgaben **ohne Hilfsmittel**
  Prüfungsteil B: Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematische Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben**, die diese Struktur der schriftlichen Abiturprüfung abbilden, sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2019**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online**:
  – **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs.
  – **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2014 bis 2019**, die nicht im Buch abgedruckt sind, zum Download.

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Trotz der **geänderten fachlichen Vorgaben** für das Zentralabitur ab 2017 können Sie die Original-Abituraufgaben der früheren Jahrgänge bis auf wenige Ausnahmen zur inhaltlichen Vorbereitung auf den Prüfungsteil B einsetzen.
Der graue Balken am linken Rand bei den Aufgaben früherer Jahrgänge (im Downloadbereich) zeigt Ihnen an, welche Aufgaben nicht mehr prüfungsrelevant für das Abitur sind.
Bei den nachfolgend aufgelisteten Teilaufgaben bezieht sich die Kennzeichnung allerdings nur auf den zweiten Teil der Aufgabenstellung. Eine Parameterform sollen Sie in der Abiturprüfung weiterhin angeben können:
2016 – Aufgabe 3 (WTR/CAS): Analytische Geometrie – Teilaufgabe b (1)
2015 – Aufgabe 3 (WTR/CAS): Analytische Geometrie – Teilaufgabe b (3)
2014 – Aufgabe 3 (WTR/CAS): Analytische Geometrie – Teilaufgabe b (1)

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2020 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!
Ihr Stark Verlag

Autoren:

Georg Breitenfeld
Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A – Aufgabenserie 1: c, d; Aufgabenserie 2: c, d; Aufgabenserie 3: c, d; Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung ab 2017 – Prüfungsteil A: c, d; Prüfungsteil B: B4, B5; Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: d; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B4 (GTR/CAS), B5 (GTR/CAS); Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B4 (GTR/CAS), B5 (GTR/CAS); Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B4 (GTR/CAS), B5 (GTR/CAS); Download: 2014 – 2 (CAS), 4 (WTR), 4 (CAS), 5 (WTR/CAS); 2015 – 1 (CAS), 4 (WTR), 4 (CAS), 5 (WTR/CAS); 2016 – 2 (WTR), 2 (CAS), 4 (WTR), 4 (CAS), 5 (WTR/CAS); 2017 – B1 (CAS); 2018 – B1 (CAS); 2019 – B1 (CAS)

Herbert Kompernaß
Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A – Aufgabenserie 1: a, b; Aufgabenserie 2: a, b; Aufgabenserie 3: a, b; Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung ab 2017 – Prüfungsteil A: a, b; Prüfungsteil B: B1, B2, B3; Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: a, b, c; Prüfungsteil B: B2 (CAS), B3 (GTR/CAS); Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B2 (GTR/CAS), B3 (GTR/CAS); Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B2 (CAS), B3 (GTR/CAS); Download: 2014 – 1 (WTR), 1 (CAS), 2 (WTR), 3 (WTR/CAS); 2015 – 1 (WTR), 2 (WTR), 2 (CAS), 3 (WTR/CAS); 2016 – 1 (WTR), 1 (CAS), 3 (WTR/CAS); 2017 – B2 (GTR); 2019 – B2 (GTR)

Hinweise und Tipps zum Abitur 2020

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.

Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik setzt sich seit dem Abitur 2017 aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitenden Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**, zusammen.

Viele Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial für den Prüfungsteil B weiterhin gut geeignet. Eine Auswahl finden Sie im Downloadbereich zu diesem Buch.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Grundkurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Diese sind verbindlich zu bearbeiten, d. h., es findet keine Auswahl durch die Fachlehrkraft statt. Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.

– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet 2 Analysisaufgaben, 1 Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und 2 Stochastikaufgaben, dabei eine mit dem Schwerpunkt stochastische Matrizen.

  Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
  Der Prüfungsteil B wird aus **2 Aufgaben** gebildet, wobei eine Analysisaufgabe zu wählen ist.

  Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:
  - GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
  - Mathematische Formelsammlung
  - Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen Ihnen im Grundkurs insgesamt **180 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit für den Prüfungsteil A, der von Ihnen zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 45 Minuten. Sobald Sie mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel. Sollten Sie den Prüfungsteil A schneller bearbeiten können, dürfen Sie auch schon früher mit dem Prüfungsteil B beginnen. Sie haben dann für diesen entsprechend mehr Zeit.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2020

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Grundkurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2020** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	Beispiele
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2019 – Aufgabe B1 (GTR)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Untersuchung von ganzrationalen Funktionen	2018 – Aufgabe B2 (GTR/CAS)
– Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei p(x) ein Polynom höchstens zweiten Grades ist	2018 – Aufgabe B1 (GTR)
– Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben	2017 – Aufgabe B1 (GTR)
– Interpretation und Bestimmungen von Parametern von ganzrationalen Funktionen	2019 – Aufgabe B2 (CAS), Teilaufgabe a
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2017 – Aufgabe B2 (CAS), Teilaufgabe b
• Integralrechnung	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe a
Analytische Geometrie und Lineare Algebra	
• lineare Gleichungssysteme	2017 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte	2019 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Lagebeziehungen	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe c
• Skalarprodukt	2018 – Aufgabe B3 (GTR/CAS), Teilaufgabe b

Stochastik • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen • Binomialverteilung • stochastische Prozesse	 2017 – Aufgabe B5 (GTR/CAS) 2018 – Aufgabe B5 (GTR/CAS) 2019 – Aufgabe B4 (GTR/CAS)

3 Leistungsanforderung und Bewertung

Im Grundkurs beläuft sich die Höchstpunktzahl für den Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) auf 24 Punkte und für den Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) auf 80 Punkte (2 Aufgaben zu je 40 Punkten).

Die Bewertung der Klausuraufgaben erfolgt auf der Grundlage eines der Aufgabenstellung beigefügten Bewertungsschemas. Darin sind Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Das Bewertungsschema ist Grundlage der Beurteilung. Von der Modelllösung abweichende Lösungen werden entsprechend bewertet, die für die Aufgabenstellung vorgesehene Höchstpunktzahl kann aber nicht überschritten werden. Ferner können nur ganze Punktzahlen vergeben werden. Ausschlaggebend ist hier die fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit.

Ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium ist die Darstellungsleistung, in welche der richtige Einsatz der Fachsprache und die Strukturiertheit der Ausführungen einfließen. Die Bewertung der Darstellungsleistung wird in die Bewertung der inhaltlichen Leistungen integriert. Punktabzug aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (Rechtschreibung und Grammatik) kann im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen erfolgen.

Das seitliche Profil einer Wasserrutsche in einem Freibad kann durch den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = (x+1) \cdot e^{1-x}, \quad 0 \leq x \leq 5$[1]

modelliert werden (x und f(x) in Metern). Das Schwimmbecken wird im Bereich der Rutsche auf der linken Seite durch den negativen Teil der y-Achse begrenzt und der obere Beckenrand befindet sich auf Höhe der x-Achse. Für den Wasserspiegel der Wasseroberfläche wird angenommen, dass er 20 cm unterhalb des Beckenrandes liegt. Der Sachverhalt ist in Abbildung 1 veranschaulicht.

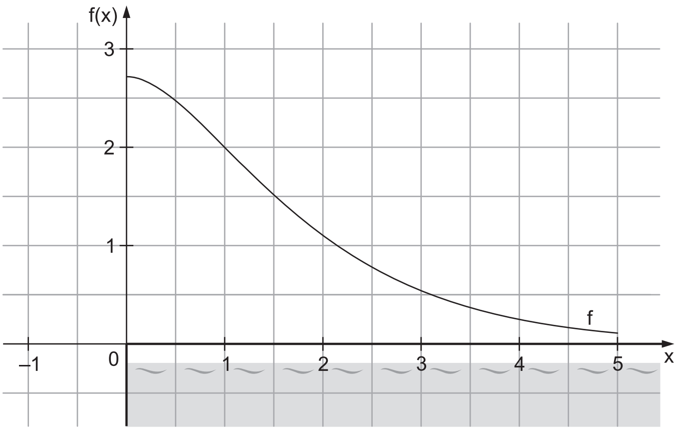


Abbildung 1

a) (1) Ermitteln Sie, in welcher Höhe über der Wasseroberfläche das Ende der Rutsche liegt.

(2) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Profillinie der Rutsche auf der gesamten Länge fällt, und bestimmen Sie das durchschnittliche Gefälle der Rutsche.

(3) Bestimmen Sie durch Rechnung denjenigen Punkt auf der Profillinie der Rutsche, in dem das Gefälle am größten ist.
Aus Sicherheitsgründen darf der Neigungswinkel der Rutsche an keiner Stelle 60° überschreiten.
Überprüfen Sie, ob die Rutsche dieser Norm gerecht wird.

1 Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $0 \leq x \leq 5$ zur Modellierung verwendet.

Lösung

a) (1) Da die Wasseroberfläche 20 cm = 0,2 m unterhalb des Beckenrandes liegt, muss zum Funktionswert f(5) noch der Wert 0,2 addiert werden:
$f(5) + 0{,}2 \approx 0{,}31$

GTR/CAS

$f(x) := (x+1)\cdot e^{1-x}$	*Fertig*
$f(5)+0.2$	0.309894

Das Ende der Rutsche liegt ca. 0,31 m (= 31 cm) über der Wasseroberfläche.

(2) Die Profillinie der Rutsche fällt auf der gesamten Länge, wenn der Graph der Funktion f im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend ist.
Dies ist der Fall, wenn $f'(x) < 0$ ist für $0 < x < 5$. (Die Ränder des Definitionsbereichs können bei der Untersuchung auf Monotonie vernachlässigt werden.)

Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die 1. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot e^{1-x} + (x+1)\cdot e^{1-x}\cdot(-1) \\ &= e^{1-x} - (x+1)\cdot e^{1-x} \\ &= e^{1-x} - x\cdot e^{1-x} - e^{1-x} \\ &= -x\cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

CAS

$a1f(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$-x\cdot e^{1-x}$

Für $x > 0$ gilt folgende Abschätzung:

$$f'(x) = \underbrace{-x}_{<0}\cdot\underbrace{e^{1-x}}_{>0} < 0$$

Der Graph der Funktion f ist streng monoton fallend für $x > 0$. Die Profillinie der Rutsche fällt daher auf der gesamten Länge.

Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche entspricht der mittleren Steigung des Funktionsgraphen von f im Definitionsbereich $0 \le x \le 5$.

$$m = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \approx -0{,}52$$

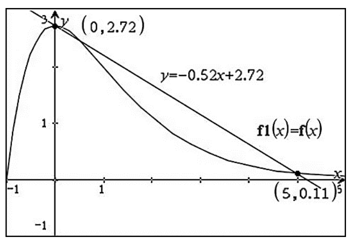
GTR/CAS

$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}$	-0.521678

Alternativ:
Die mittlere Steigung m kann auch grafisch anhand der Gleichung der Sekante durch die Punkte $P(0\,|\,f(0))$ und $Q(5\,|\,f(5))$ ermittelt werden.

Das durchschnittliche Gefälle der Rutsche beträgt ca. 0,52 m je Meter in horizontaler Richtung.

GTR/CAS



(3) Das Gefälle der Rutsche wird durch die 1. Ableitung $f'(x)$ beschrieben. Das größte Gefälle liegt an der Minimalstelle der Funktion $f'(x)$ vor. Dafür infrage kommen die Nullstellen der 2. Ableitung $f''(x)$ oder die Randstellen des Definitionsbereichs.

Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich für die 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot e^{1-x} + (-x) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= -e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \\ &= (x-1) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

CAS

$a2f(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	Fertig
$a2f(x)$	$(e \cdot x - e) \cdot e^{-x}$

Notwendige Bedingung für eine Minimalstelle der Funktion $f'(x)$: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot e^{1-x} &= 0 \quad &&|: e^{1-x} \neq 0 \\ x - 1 &= 0 &&|+1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Berechnung des Funktionswertes der Funktion $f'(x)$:
$f'(1) = -1$

Zu überprüfen sind noch die Randstellen:
$f'(0) = 0$
$f'(5) \approx -0{,}09$

GTR/CAS

$a1f(x) := -x \cdot e^{1-x}$	Fertig
$a1f(1)$	-1
$a1f(0)$	0.
$a1f(5)$	-0.091578
$f(1)$	2

Das größte Gefälle besitzt die Rutsche nach 1 Meter in horizontaler Richtung. Mit $f(1) = 2$ lauten die Koordinaten des zugehörigen Punktes $(1|2)$.

Der Winkel α, der zu diesem Gefälle gehört, berechnet sich durch:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= -1 \\ \alpha &= \tan^{-1}(-1) \\ \alpha &= -45° \end{aligned}$$

GTR/CAS

$\tan^{-1}(-1)$	-45.

Da Neigungswinkel immer zwischen 0° und 90° angegeben werden, beträgt der zugehörige Neigungswinkel 45°. Die Rutsche wird der Norm daher gerecht.

b) (1) Die zu verkleidende Fläche auf einer Seite der Rutsche setzt sich aus der Fläche zwischen der Profillinie der Rutsche und dem oberen Beckenrand (x-Achse) sowie der rechteckigen Fläche zwischen dem Beckenrand und der Wasseroberfläche im Bereich $0 \le x \le 5$ zusammen. Da beide Seiten der Rutsche verkleidet werden sollen, wird mit 2 multipliziert.

$$A = 2 \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + 5 \cdot 0{,}2 \right) \approx 12{,}62\,[m^2]$$

GTR/CAS

$a := 2 \cdot \left(\int_0^5 f(x)\,dx + 5 \cdot 0.2 \right)$	12.6167

Abiturprüfung 2018 Mathematik Grundkurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil B – Stochastik B5 (GTR/CAS)

Punkte

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Zufallsvariable X: „Anzahl fehlerhafter Teile“ unter zufällig ausgewählten Teilen kann als binomialverteilt angenommen werden.
800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt.

(1) Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft.“
B: „Mindestens 25 der Teile sind fehlerhaft.“ 5

(2) Bestimmen Sie die zu erwartende Anzahl fehlerhafter Teile und die Standardabweichung von X. 4

(3) Ermitteln Sie, wie viele Kunststoffteile mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit davon mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein Teil fehlerhaft ist. 5

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um die Vermutung zu überprüfen, werden in einer neuen Stichprobe wiederum 800 Teile ausgewählt. Sind in der Stichprobe höchstens 22 Teile fehlerhaft, so möchte der Produktionsleiter das neue Granulat weiter verwenden.

(4) Zeigen Sie, dass unter der Annahme $p = 0{,}04$ die Wahrscheinlichkeit für höchstens 22 fehlerhafte Teile unter 5 % liegt. 2

Pro Kunststoffteil möchte das Unternehmen einen durchschnittlichen Gewinn von 1 Euro machen. Dabei belaufen sich die Herstellungskosten auf 0,50 Euro pro Kunststoffteil. Der Verkaufspreis v wird vom Unternehmen festgesetzt, wobei fehlerhafte Teile nicht verkauft werden.

(5) Begründen Sie, dass mithilfe der Gleichung
$0{,}04 \cdot (-0{,}5) + 0{,}96 \cdot (v - 0{,}5) = 1$
der Verkaufspreis bestimmt werden kann. 4

(6) Das neue Granulat wird nun verwendet und verursacht in Wirklichkeit nur noch 2 % fehlerhafte Teile. Die Herstellungskosten wurden durch den Wechsel des Granulats nicht beeinflusst.
Ermitteln Sie den prozentualen Preisnachlass, den das Unternehmen beim Verkaufspreis nun gewähren kann. 5

Lösung

a) Die Zufallsvariable X, die die Anzahl fehlerhafter Teile unter 800 zufällig ausgewählten Kunststoffteilen angibt, ist binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0{,}04$.

(1) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft“ beträgt:

$P(A) = P(X = 30) \approx 0{,}0693 = 6{,}93\ \%$

```
binomPdf(800,0.04,30)        0.069276
```

Das Ereignis B: „Mindestens 25 der Teile sind fehlerhaft“ bedeutet, dass 25 oder mehr Teile fehlerhaft sind. Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gilt:

$$P(B) = P(X \geq 25) = P(25 \leq X \leq 800) \approx 0{,}9163 = 91{,}63\ \%$$

```
binomCdf(800,0.04,25,800)        0.916277
```

Alternativ:

$$P(B) = P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 0{,}9163 = 91{,}63\ \%$$

```
1-binomCdf(800,0.04,0,24)        0.916277
```

(2) Der Erwartungswert der binomialverteilten Zufallsvariable X beträgt:

$E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}04 = 32$

Für die Standardabweichung von X gilt:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{800 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 5{,}54$$

```
800· 0.04                32.
√(800· 0.04· 0.96)       5.54256
```

Zu erwarten sind 32 fehlerhafte Teile und die Standardabweichung von X beträgt ungefähr 5,54.

(3) In dieser Aufgabenstellung ist die Größe n der Stichprobe gesucht, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein Teil in der Stichprobe fehlerhaft ist.

$$\begin{aligned}
& P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}95 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^n \geq 0{,}95 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - 0{,}96^n \geq 0{,}95 \qquad \big| -0{,}95 + 0{,}96^n \\
\Leftrightarrow\quad & 0{,}05 \geq 0{,}96^n \\
\Leftrightarrow\quad & 0{,}96^n \leq 0{,}05 \\
\Leftrightarrow\quad & n \geq 73{,}39
\end{aligned}$$

Es müssen mindestens 74 Kunststoffteile zufällig ausgewählt werden.

```
nSolve((0.96)^n=0.05,n)        73.3853
```

CAS

```
solve((0.96)^n≤0.05,n)        n≥73.3853
```

Alternativ:

Die Größe n der Stichprobe kann durch systematisches Probieren ermittelt werden.

$n = 50$: $P(X \geq 1) \approx 0{,}8701 = 87{,}01\ \%$

$n = 60$: $P(X \geq 1) \approx 0{,}9136 = 91{,}36\ \%$

$n = 70$: $P(X \geq 1) \approx 0{,}9426 = 94{,}26\ \%$

$n = 73$: $P(X \geq 1) \approx 0{,}9492 = 94{,}92\ \%$

$n = 74$: $P(X \geq 1) \approx 0{,}9512 = 95{,}12\ \%$

binomCdf(50,0.04,1,50)	0.870114
binomCdf(60,0.04,1,60)	0.913648
binomCdf(70,0.04,1,70)	0.94259
binomCdf(73,0.04,1,73)	0.949207
binomCdf(74,0.04,1,74)	0.951239

Es müssen mindestens 74 Kunststoffteile zufällig ausgewählt werden.

(4) Es gilt:
$P(X \leq 22) \approx 0{,}0377 < 0{,}05$

binomCdf(800,0.04,0,22)	0.037705

Die Berechnung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für höchstens 22 fehlerhafte Teile unter $0{,}05 = 5\ \%$ liegt.

(5) Mit einer Wahrscheinlichkeit von $4\ \% = 0{,}04$ ist das Kunststoffteil fehlerhaft und wird nicht verkauft. Es entstehen Herstellungskosten in Höhe von 0,50 €, was einem negativen Gewinn entspricht.

Mit der Gegenwahrscheinlichkeit von $96\ \% = 0{,}96$ ist das Kunststoffteil fehlerfrei und kann verkauft werden. Das Unternehmen macht in diesem Fall einen Gewinn, der der Differenz zwischen Verkaufspreis und Herstellungskosten entspricht. Der Gewinn beträgt also $(v - 0{,}50)$ €.

Gewichtet man beide Größen mit den Wahrscheinlichkeiten und addiert sie, soll sich der angestrebte, durchschnittliche Gewinn von 1 € pro Stück ergeben. Ohne Einheiten entspricht dies der angegebenen Gleichung:

$0{,}04 \cdot (-0{,}50) + 0{,}96 \cdot (v - 0{,}50) = 1$

(6) Mit der Gleichung aus Teilaufgabe a(5) wird der Verkaufspreis v beim alten Granulat berechnet:

$0{,}04 \cdot (-0{,}5) + 0{,}96 \cdot (v - 0{,}5) = 1$

$\Rightarrow \quad v \approx 1{,}56\,[€]$

nSolve(0.04· -0.5+0.96· (ν−0.5)=1,ν)
1.5625
nSolve(0.02· -0.5+0.98· (ν−0.5)=1,ν)
1.53061

CAS

solve(0.04· -0.5+0.96· (ν−0.5)=1,ν)
ν=1.5625
solve(0.02· -0.5+0.98· (ν−0.5)=1,ν)
ν=1.53061

Mit dem gleichen Ansatz kann der neue Verkaufspreis v_{neu} unter den veränderten Bedingungen berechnet werden. Dazu wird in der Gleichung der Anteil der fehlerhaften Teile auf 2 % und der Anteil der fehlerfreien Teile auf 98 % abgeändert:

$0{,}02 \cdot (-0{,}5) + 0{,}98 \cdot (v_{neu} - 0{,}5) = 1$

$\Rightarrow \quad v_{neu} \approx 1{,}53\,[€]$