Inhaltsverzeichnis

A Terme und Gleichungen

Seite

1 Quadratzahlen und Quadratwurzeln 4
2 Ausmultiplizieren und Faktorisieren 5
3 Binomische Formeln 6
4 Faktorisieren von Binomischen Formeln 7
5 Bruchterme 8
6 Lösen von Bruchgleichungen 9

B Gleichungssysteme und Lineare Funktionen

1 Bestimmen von linearen Funktionen 10
2 Gleichungen mit zwei Variablen 11
3 Lineare Gleichungssysteme 12
4 Einsetzungsverfahren 13
5 Gleichsetzungsverfahren 14
6 Additionsverfahren 15

C Rechnen mit Wurzeln

1 Intervallschachtelung von Quadratwurzeln 16
2 Umformen von Quadratwurzeln 17
3 Wurzelgleichungen 18

D Quadratische Funktionen

1 Normalparabel 19
2 Scheitelpunktform von Parabeln 20
3 Normalform von Parabeln 21
4 Lösen von Quadratischen Gleichungen mit der PQ-Formel 22

E Potenzfunktionen

1 Potenzfunktionen 23
2 Hyperbeln 24
3 Wurzelfunktionen 25
4 Potenzrechengesetze 26

F Kombinatorik und Statistik

1 Laplace- und Bernoulli-Experimente 27
2 Kombinatorische Zählverfahren 28
3 Stichprobenversuche 29
4 Arithmetischer Mittelwert 30

G Körperberechnungen und Trigonometrie

1 Kreisfläche und Kreisumfang 31
2 Kreisausschnitt, Kreisbogen und Bogenmaß 32
3 Kreisring 33
4 Oberfläche und Rauminhalt von Prismen 34
5 Zylinder 35
6 Kegel 36
7 Pyramide 37
8 Volumen und Oberfläche der Kugel 38
9 Winkelberechnungen im rechtwinkligen Dreieck 39
10 Sinus und Kosinus am Einheitskreis 40

1 Quadratzahlen und Quadratwurzeln

Quadratzahlen sind Zahlen, die durch Multiplikation einer ganzen Zahl mit sich selbst entstehen. Diesen Rechenschritt nennt man quadrieren („hoch zwei"). Diese Zahlen sind für die Bearbeitung von speziellen mathematischen Problemen besonders wichtig, daher sollten die Quadratzahlen von 1-12 bekannt sein:

$1 \cdot 1 = 1^2 = 1$	**$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$**	**$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$**
$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$	**$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$**	**$6 \cdot 6 = 6^2 = 36$**
$7 \cdot 7 = 7^2 = 49$	**$8 \cdot 8 = 8^2 = 64$**	**$9 \cdot 9 = 9^2 = 81$**
$10 \cdot 10 = 10^2 = 100$	**$11 \cdot 11 = 11^2 = 121$**	**$12 \cdot 12 = 12^2 = 144$**

Die Umkehroperation zum Quadrieren nennt man „Wurzel ziehen". Das bedeutet also, dass die Quadratwurzel einer Quadratzahl eben die Zahl ist, die man quadrieren muss, um die Quadratzahl zu erhalten. Als Beispiel:

Die Quadratzahl von 7 ist 49.
Die Quadratwurzel von 49 ist 7.

Die Quadratwurzel a kann man wie folgt berechnen, wenn die zugehörige Quadratzahl x bekannt ist: $a^2 = x \rightarrow a = \sqrt{x}$ oder $7^2 = 49 \rightarrow 7 = \sqrt{49}$

Achtung! Eine Wurzel zu bestimmen ist nicht leicht, daher ist es sehr wichtig, die Quadratzahlen 1 - 12 auswendig zu können!

1 Jonas
Hast du das mit den Quadratwurzeln und Quadratzahlen verstanden? Ich komme da immer durcheinander. Was sind zum Beispiel die Quadratzahl und Quadratwurzel der Zahl 9?

2 Steffen
Ich komme da auch schnell durcheinander, aber lass uns das mal versuchen.

Bei den Quadratzahlen und Quadratwurzeln musst du darauf achten, welche Rechnung du durchführen willst. Eine Quadratzahl entsteht durch Quadrieren (Multiplikation einer Zahl mit sich selbst).

zum Video

Die Quadratzahl von 9 erhältst du also durch Quadrieren der Zahl 9:

$9 \cdot 9 = 9^2 = 81$

Quadratwurzeln sind die Zahlen, aus denen durch Quadrieren die Quadratzahl entsteht. Wenn du die Quadratwurzel von 9 wissen willst, musst du dir also folgendes überlegen:

$a \cdot a = a^2 = 9 \rightarrow \quad a = \sqrt{9}$

Welche Zahl mit sich selbst multipliziert ergibt also 9?
Du siehst schon, dass du die Wurzel von 9 wissen müsstest. Sie entsteht nämlich, gemäß der Liste (siehe oben), durch Quadrieren der Zahl 3.

$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$

Also ist die Quadratwurzel von 9 die Zahl 3.

Jonas
81 ist die Quadratzahl und 3 ist die Quadratwurzel von 9. Dafür muss man die Quadratzahlen echt gut auswendig können.

Jetzt Du!

1. **Schreibe zu den folgenden Zahlen sowohl die Quadratzahl als auch die Quadratwurzel auf:**
   a) 4 **b)** 1 **c)** 16 **d)** 25
   TIPP: Denk daran, dass du die Quadratwurzeln auswendig kennen musst.
2. **Versuche dir zu überlegen, zwischen welchen ganzen Zahlen die Quadratwurzel der folgenden Zahlen liegen muss:**
   a) 30 **b)** 45 **c)** 70
3. **Jonas möchte ein quadratisches Spielfeld in den Sand zeichnen. Es soll 196 m² Fläche haben. Wie lang muss eine Seite sein?**

2 Ausmultiplizieren und Faktorisieren

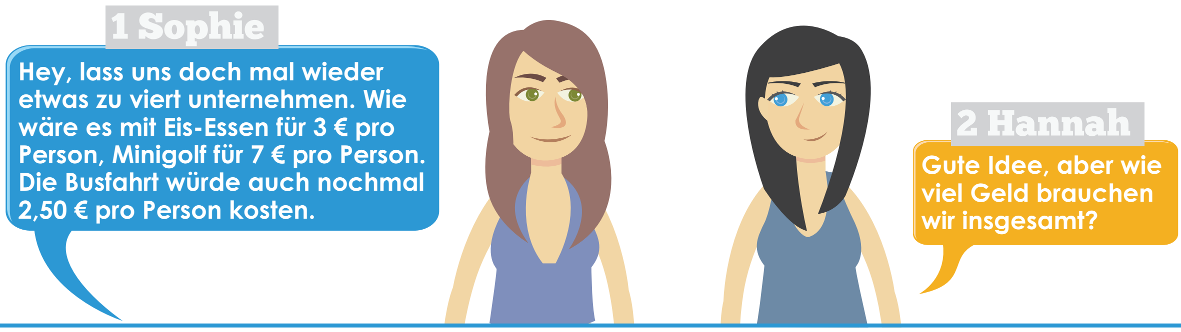
Das Ausmultiplizieren von Klammern mit einem Faktor ist besonders bei der Umformung von Variablen hilfreich. Dabei gelten weiterhin die Regeln:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Wenn man jedoch mit Zahlen rechnen muss, so ist es von Vorteil, einen Term vorab zu faktorisieren, falls es möglich ist. Das Faktorisieren ist der Umkehrschritt zum Ausmultiplizieren. Das bedeutet, dass man aus mehreren Multiplikationen mit demselben Faktor eine Multiplikation des Faktors mit einer Summe in einer Klammer bildet:

$7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 7 \cdot 8 = 7 \cdot (3 + 4 + 8)$

Mit Hilfe des Faktorisierens kann man sich viele einzelne Rechnungen sparen. Will man die linke Seite der Gleichung ausrechnen, so muss man drei Multiplikationen durchführen und anschließend eine Summe bilden. Auf der rechten Seite muss man eine Summe bilden und anschließend nur eine Multiplikation durchführen.



zum Video

Wenn du berechnen möchtest, wie viel Geld insgesamt gebraucht wird, musst du alle einzelnen Preise mal 4 nehmen und dann summieren. Die Gleichung, die du lösen musst, lautet:

$4 \cdot 3\,€ + 4 \cdot 7\,€ + 4 \cdot 2{,}50\,€ = \ ?$

Da die Preise jeweils den gleichen Faktor besitzen, kannst du eine Faktorisierung durchführen. Dafür bildest du aus den Preisen eine Summe, die du anschließend mit dem gemeinsamen Faktor multiplizierst.

$4 \cdot (3\,€ + 7\,€ + 2{,}50\,€) = \ ?$

Mit Hilfe des Faktorisierens wird die Rechnung vereinfacht.

$4 \cdot (12{,}50\,€) = 50\,€$

Zur Überprüfung kann die Rechnung auch normal ausgeführt werden:

$4 \cdot 3\,€ + 4 \cdot 7\,€ + 4 \cdot 2{,}50\,€ = \ ?$

$12\,€ + 28\,€ + 10\,€ = 50\,€$

Jonas: Wir brauchen insgesamt 50 €.

Jetzt Du!

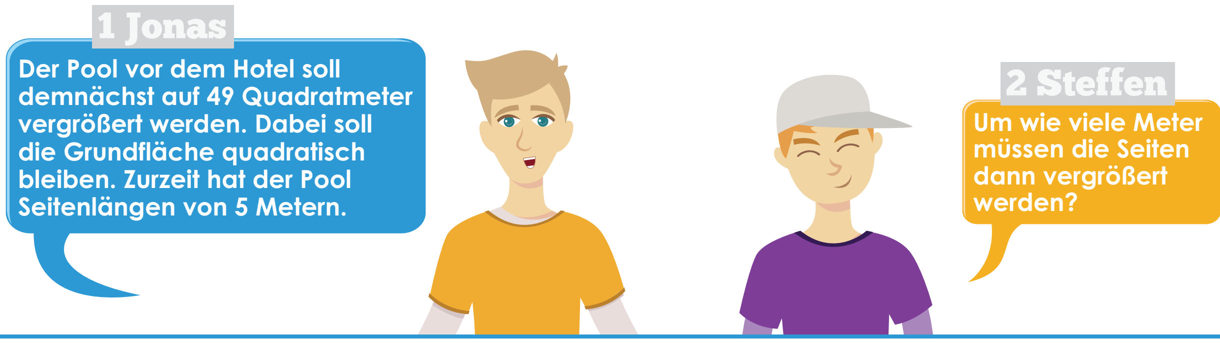
1. **Multipliziere die folgenden Aufgaben aus:**
   a) $7 \cdot (x + 3y + 21)$ b) $(17 - 4x) \cdot (x + 7y)$ c) $(12 - 7) \cdot (87 - 43)$
2. **Fasse folgende Terme mit Hilfe des Faktorisierens zusammen.**
   TIPP: Anstelle einer Zahl kannst du auch eine Variable ausklammern.
   a) $21 \cdot 3 + 21 \cdot 9 + 21 \cdot (-7) - 21 \cdot 6$
   b) $12x + xy + 7x - xz$
3. **Eine Gruppe aus 7 Schülern möchte auf ein Fest gehen. Fünf Schüler sind schon über 14 und müssen daher 5,50 € Eintritt zahlen. Die anderen zwei müssen nur 4,00 € bezahlen. Zusätzlich müssen alle für die Hin- und Rückfahrt 4 € bezahlen. Erstelle dir einen Term, mit dem du den Gesamtpreis berechnen kannst. Versuche anschließend möglichst einfach zu rechnen. Verwende dabei die Regeln des Ausmultiplizierens und Faktorisierens.**

3 Binomische Formeln

Das Ausmultiplizieren von Klammern mit einer bestimmten Struktur kann mit den binomischen Formeln durchgeführt werden. Dafür müssen aber die Zahlen bzw. Variablen innerhalb der Klammern übereinstimmen. Die Vorzeichen innerhalb der Klammern können unterschiedlich sein und es ergeben sich mit verschiedenen Kombinationen die drei binomischen Formeln:

1. $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$
2. $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$
3. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$

Das Multiplizieren einer Klammer mit sich selbst, kann ebenfalls als Quadrat geschrieben werden.



Um die neuen Seitenlängen zu bestimmen, musst du zunächst die Gleichung für den Flächeninhalt eines Quadrats aufstellen. Dieser berechnet sich aus dem Quadrat der Seitenlänge, da alle Seiten gleich lang sind. Die neue Seitenlänge setzt sich dann aus den 5 Metern und der Verlängerung x zusammen. Mathematisch kannst du schreiben: $\mathbf{A_{Pool} = (5+x)\cdot(5+x)}$ oder auch $\mathbf{A_{Pool} = (5+x)^2}$

zum Video

Dabei handelt es sich um die erste binomische Formel:

$$A_{Pool} = (5+x)^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$A_{Pool} = (5+x)^2 = 5^2 + 2\cdot 5\cdot x + x^2 = 25 + 10x + x^2$$

Der Pool soll eine Grundfläche von 49 Quadratmetern besitzen, also kannst du als Gleichung schreiben:

$$A_{Pool} = 25 + 10x + x^2 = 49$$

Diese Gleichung kannst du aber mit den bekannten Rechenschritten nicht auflösen. Du kannst dir aber überlegen, wie groß die beiden Seiten sein müssen, indem du die Quadratwurzel der Zahl 49 berechnest.

Ein Trick hilft dir aber, die Gleichung zu lösen. Du nimmst die ursprüngliche Form der binomischen Formel und ziehst daraus die Wurzel. Dabei verschwindet das Quadrat und du kannst die Gleichung ganz einfach lösen.

$$(5+x)^2 = 49 \quad |\sqrt{}$$
$$5 + x = 7 \quad | -5$$
$$x = 2$$

Steffen

Jede Seite muss also um 2 m verlängert werden, damit eine Grundfläche von 49 Quadratmetern entsteht.

Jetzt Du!

1. **Verwende die binomischen Formeln zum Berechnen der Aufgabe.**
   a) $(7-4)\cdot(7-4)$ b) $(9-4x)\cdot(9+4x)$ c) $(6+5x)\cdot(6+5x)$
2. **Überprüfe, ob es sich um binomische Formeln handelt. Wenn ja, berechne mit den binomischen Formeln, ansonsten multipliziere wie gewohnt.**
   a) $(9-3)\cdot(10-3)$ b) $(17-8)\cdot(17+8)$ c) $(21-13)\cdot(21-13)$
3. **Um die Quadratzahl von 48 zu berechnen, kannst du einen Trick anwenden. Du kannst eine binomische Formel verwenden, um dir die Rechnung zu erleichtern:**
   $\mathbf{48^2 = (50-2)\cdot(50-2)}$
   Berechne mit diesem Trick die Quadratzahlen von:
   a) 48 b) 27 c) 39 d) 57

1 Normalparabel

Eine reinquadratische Funktion ist eine Funktion der Form: $\mathbf{y = x^2 + v}$
Den Funktionsgraphen dieser Funktion nennt man Parabel. Der Parameter v gibt wie bei den Geradengleichungen den y-Achsenabschnitt der Parabel an. Hat die Parabel keinen y-Achsenabschnitt, spricht man von der Normalparabel: $\mathbf{y = x^2}$
Alle Parabeln lassen sich durch verschiedene Umformungen aus der Normalparabel bilden.

Willst du diese Aufgabe graphisch lösen, so musst du zunächst eine Funktionsgleichung aufstellen. Der Flächeninhalt y eines Quadrats berechnet sich aus dem Quadrat der Seitenlängen x.

zum Video

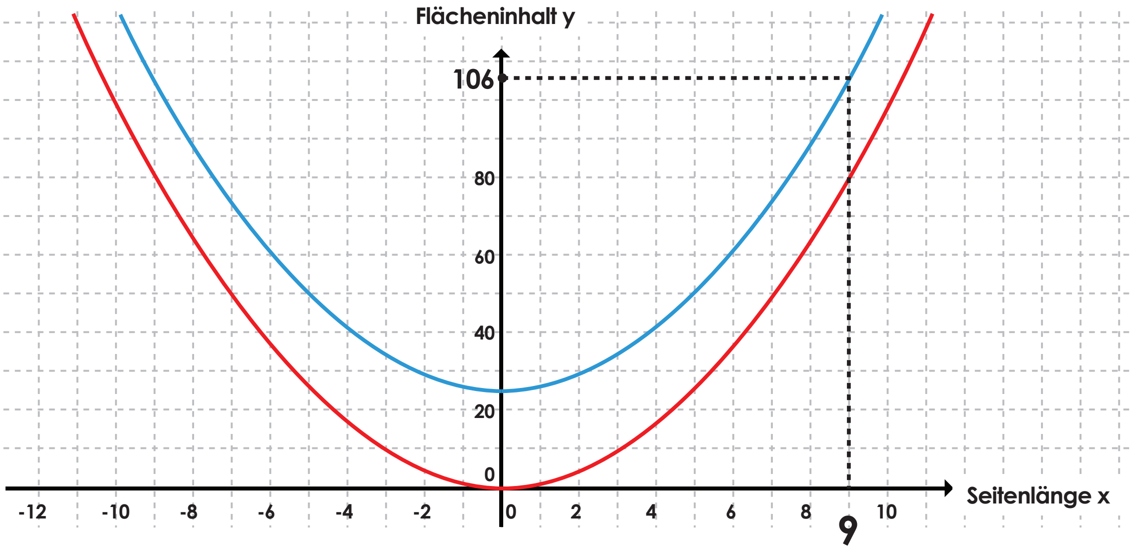
$$y = x^2$$

Bei dieser Funktionsgleichung handelt es sich um die Normalparabel. Steffen hat allerdings gesagt, dass zusätzlich zu dem quadratischen Pool das Kinderbecken mit 25 m² Grundfläche hinzugezählt werden muss. Also kannst du als Gleichung auch schreiben:

$$y = x^2 + 25\text{ m}^2$$

Für beide Gleichungen kannst du ja mal Werte für x eingeben, um anschließend die Graphen darzustellen:

x	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	0	1	4	9	16	25
$y = x^2 + 25$ m²	25	26	29	34	41	50



Im Graphen siehst du nun zum einen die Normalparabel und die um 25 m² nach oben verschobene Parabel, die aus der Normalparabel hervorgeht, indem man zu jedem Funktionswert 25 addiert. Bei dem y-Wert von 106 zieht man eine Gerade nach rechts und bestimmt den x-Wert, an dem die Parabel geschnitten wird.

2 Scheitelpunktform von Parabeln

Parabeln sind im Allgemeinen gemischtquadratische Funktionen. Bei der Normalparabel fällt lediglich die Verschiebung in x-Richtung weg. Die Funktionsgleichung aller Parabeln kann mit Hilfe der Scheitelpunktform aufgestellt werden. Die Scheitelpunktform wird so genannt, da sie direkt Aufschluss über den Scheitelpunkt S (u ; v) gibt.

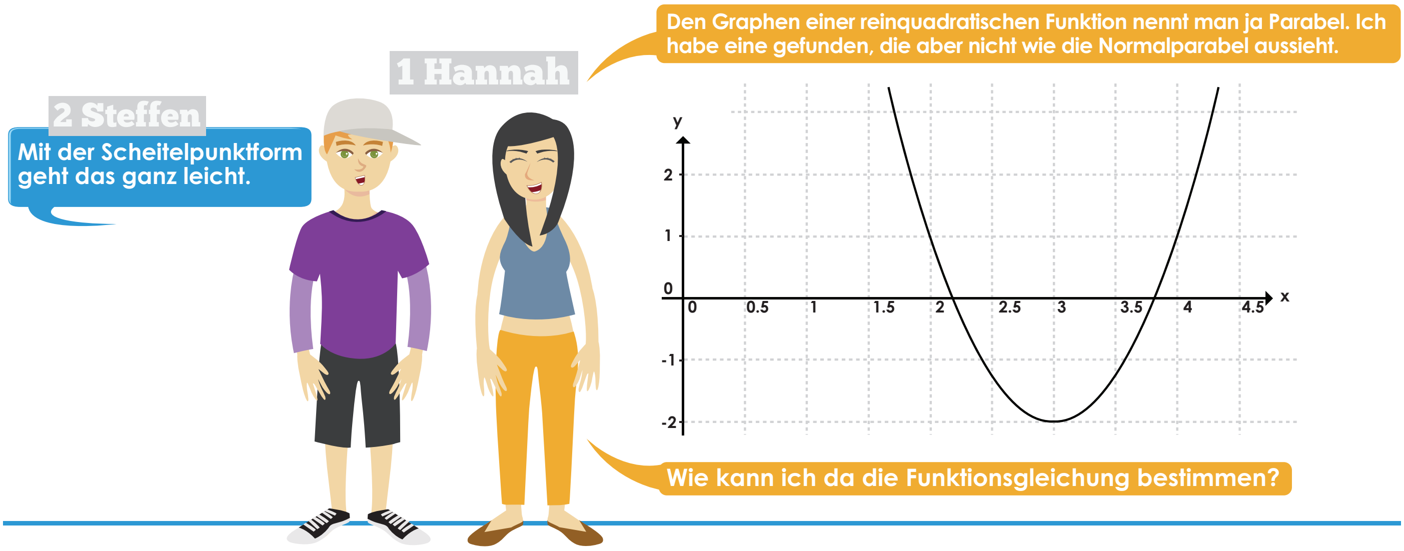
$y = a\,(x - u)^2 + v$

Dabei stellt der Vorfaktor a die Steigung der Parabel dar. Man muss zwei Fälle unterscheiden:

$a < 1$ → Stauchung und **$a > 1$ → Streckung**

Eine weitere Verschiebung kann auf der x-Achse vorliegen. Diese wird mit Hilfe des **u** ausgedrückt. Dabei gibt es wieder zwei Fälle zu beachten.

u positiv → Verschiebung nach rechts
u negativ → Verschiebung nach links



Zur Bestimmung der Funktionsgleichung, musst du am besten jeden Parameter einzeln bestimmen. Am einfachsten sind die beiden Verschiebungen in x und y Richtung. Die Normalparabel hat ihren Scheitelpunkt bei (0 ; 0). Im Beispiel liegt dieser beim Punkt (3 ; -2). Anhand des Scheitelpunkts kannst du also direkt beide Werte ablesen:

zum Video

$u = 3$ und $v = -2$

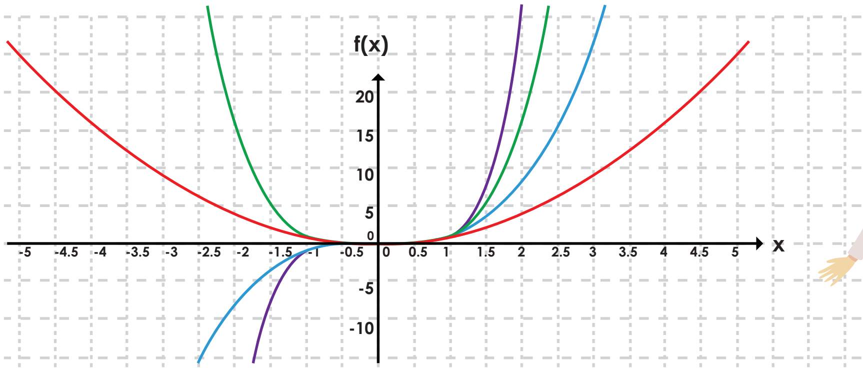
Die Steigung a musst du auch direkt am Scheitelpunkt ablesen. Du gehst zur Bestimmung der Steigung vom Scheitelpunkt eine Einheit nach rechts und schaust dir an, wie viele Einheiten du nach oben bzw. unten gehen musst. Im Beispiel:

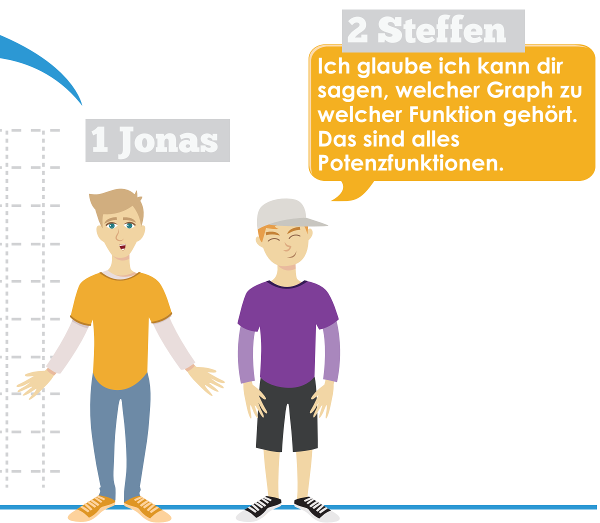
Hier gehst du vom Scheitelpunkt eine Einheit nach rechts, aber 3 nach oben. Daher ist die Steigung positiv: $a = 3$.
Jetzt hast du alle Parameter bestimmt und kannst die Funktionsgleichung aufstellen: **$y = 3\,(x - 3)^2 - 2$**

1 Potenzfunktionen

Quadratische Funktionen sind Potenzfunktionen mit der Potenz zwei. Allgemein kann man für Potenzfunktionen mit positivem Exponenten als Funktionsgleichung schreiben:
$f(x) = x^n$
Bei jeder geraden Potenz entsteht eine Parabel. Je höher die Potenz, desto flacher ist die Steigung am Scheitelpunkt. Danach ist sie allerdings deutlich steiler als bei den niedrigeren Potenzen. Parabeln sind außerdem symmetrisch zur y-Achse.

Bei ungeraden Potenzen liegt ein kubischer Verlauf vor. Es gelten die gleichen Merkmale wie bei Parabeln, aber kubische Funktionen sind punktsymmetrisch.





Bei den von Jonas gezeigten Funktionen handelt es sich, wie Steffen richtig erkannt hat, um Potenzfunktionen. Wenn man die verschiedenen Graphen vergleicht, dann gibt es jeweils zwei Parabeln und zwei kubische Funktionen.

zum Video

Rot und grün sind achsensymmetrisch, also handelt es sich um Parabeln.
Blau und lila sind punktsymmetrisch und daher Funktionen mit ungerader Potenz.

Wenn du dir nun überlegst, was mit den Werten einer x^n-Funktion passiert, so merkst du schnell, dass bei höherem Exponenten, auch die Funktionswerte schneller wachsen. Beispiel Wert 2.

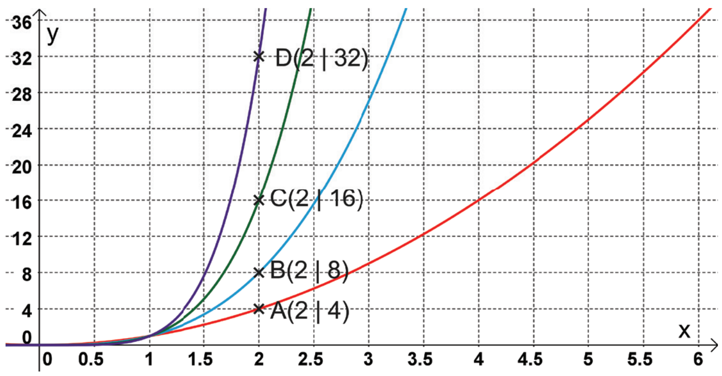
$x^2 = 2^2 = 4$ $\quad$ $x^3 = 2^3 = 8$ $\quad$ $x^4 = 2^4 = 16$ $\quad$ $x^5 = 2^5 = 32$

Bei solchen Graphen kannst du dir am einfachsten die Steigungen ansehen. Wenn du nur die positiven Werte von x und y anschaust, dann siehst du, dass die Graphen in der Reihenfolge: Rot, Blau, Grün, Lila, immer steiler werden. Also steigt auch die Potenz an.

Demnach wird es sich bei diesen Graphen um die Funktionen:

$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = x^4$ $\quad$ $f(x) = x^5$

handeln. Wenn du das überprüfen möchtest, musst du jedoch am besten noch einen Punkt auf der Funktion ablesen und mit einer Rechnung überprüfen.



Hier kannst du die Punkte ablesen und überprüfen:

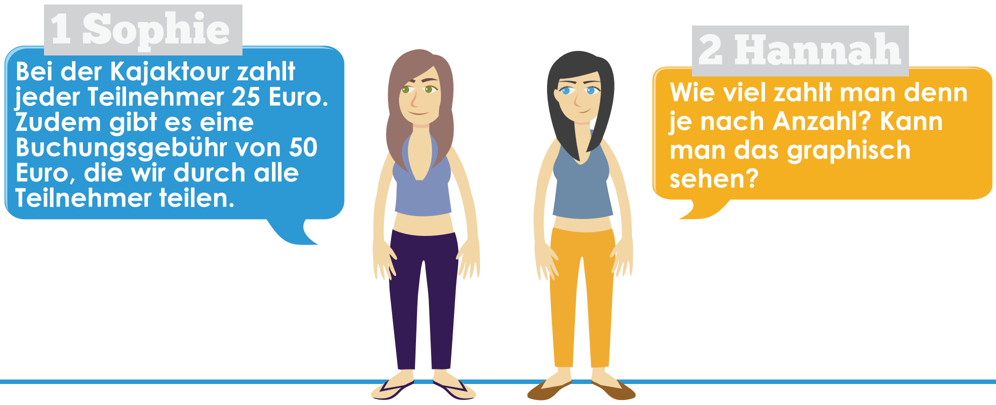
$f(2) = 2^2 = 4$ $\quad$ $f(2) = 2^3 = 8$ $\quad$ $f(2) = 2^4 = 16$ $\quad$ $f(2) = 2^5 = 32$

Also handelt es sich tatsächlich um die genannten Funktionen.

Bei Potenzfunktionen mit negativem Exponenten entstehen sogenannte Hyperbeln. Für negative Exponenten kann man auch schreiben: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Der Verlauf dieser Hyperbeln hängt vom Exponenten n ab. Die Symmetrie-Eigenschaften gelten dabei weiterhin, wie bei allen anderen Potenzfunktionen auch. Gerade Exponenten führen zu Achsensymmetrie und ungerade zu Punktspiegelung. Verschiebungen in x- oder y-Richtung bzw. Stauchung und Streckung können wie beispielsweise bei quadratischen Gleichungen durchgeführt werden.

Achtung! Hyperbeln, die nicht in y-Richtung verschoben sind, besitzen keine Nullstelle. Dafür besitzen alle Hyperbeln eine sogenannte Polstelle. Diese tritt genau bei der Definitionslücke auf. Für große x-Werte nähert sich die Hyperbel dem y-Wert 0 an, sie wird diesen Wert allerdings nie erreichen. Diese Annäherung nennt man Asymptote.



zum Video

Aus der Information, die Sophie dargestellt hat, kannst du dir eine Funktionsgleichung aufschreiben. Dabei ist die Variable x die Anzahl der Teilnehmer.

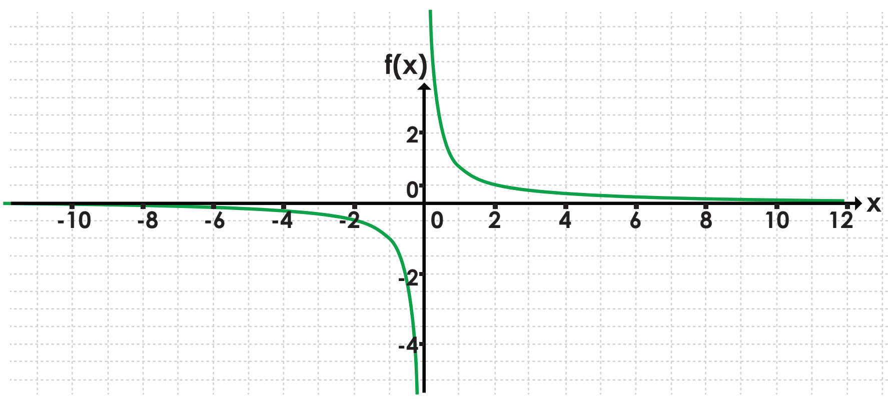
$f(x) = \frac{50}{x} + 25$ oder $f(x) = 50x^{-1} + 25$

Bei dieser Art von Funktionen handelt es sich um eine Hyperbel. Als Erstes kannst du dir am besten einmal die unveränderte Hyperbel

$\frac{1}{x}$ anschauen. Dafür stellst du dir eine Wertetabelle auf. Die Definitionslücke bzw. Polstelle ist bei x = 0, da man nicht durch Null teilen darf.

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$f(x) = x^{-1}$	-0,66	-1	-2	n.D.	2	1	0,66

Nähert man sich der Definitionslücke an, so steigt der Funktionswert ins positive bzw. negative Unendliche, da der Nenner immer kleiner wird und somit der Bruch immer größer. Für positive Werte nahe der Null läuft der Graph gegen + ∞ . Für negative Werte nahe der Null läuft er gegen - ∞ . Für hohe positive oder hohe negative x-Werte nähert sich der Funktionswert asymptotisch der 0 an.



In diesem Graphen siehst du nun den Verlauf der Hyperbel $f(x) = x^{-1}$. Die Hyperbel, die Hannah wiederum aufstellen will, ist um den Faktor 50 gestreckt und um 25 nach oben verschoben. Daraus ergibt sich dann ein neuer Funktionsgraph.