3 Terme faktorisieren und Binomische Formeln

Terme faktorisieren

Fachlicher Inhalt

Faktorisieren ist die Umwandlung einer Summe oder Differenz in ein Produkt, also die Umkehrung des Ausmultiplizierens.

Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Ausklammern einer gemeinsamen Variablen oder Zahl
- Ausklammern eines Terms
- Anwendung der binomischen Formeln

Didaktisch-methodische Hinweise

- Gemeinsamer Faktor a wird ausgeklammert:
  $a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$
- In der Analysis spielt das Faktorisieren z.B. bei der Suche nach Nullstellen von Funktionen eine Rolle, denn nach der Faktorregel wird ein faktorisierter Funktionsterm genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

  Beispiel:

  $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0$

  Ein Produkt wird genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist:

  $L = \{0; 2; -2\}$
- Ausklammen von –1:
  Oftmals ist es rechnerisch zweckmäßig aus einem Term –1 auszuklammern.

  Beispiel:

  $3x - 1 = -1(-3x + 1) = -(1 - 3x)$

<u>Hilfestellungen:</u>

- Häufig wird beim Lösen von Gleichungen der Art $x^2 = -2x$ fehlerhaft so weitergerechnet:

  $x^2 = -2x \quad | : x$

  $x = -2$

  Richtig: Durch x darf nur geteilt werden, wenn $x \neq 0$ ist. Es ist also zu prüfen, ob $x = 0$ auch eine Lösung ist. Und dies trifft zu. Also: $L = \{0; -2\}$

  Noch geschickter:

  $x^2 = -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2.$
- Das Faktorisieren erfordert ein geschultes Auge.

  Beispiele:

  Hier muss man erkennen, dass man den Faktor $e^{0,5x}$ ausklammern kann:

  $(0,5x^{0,5x} - 0,5x + 1) \cdot e^{0,5x} \cdot 0,5 + (x - 0,5)\, e^{0,5x} = e^{0,5x} \cdot ((0,5x^2 - 0,5x + 1) \cdot 0,5 + (x - 0,5))$

  Hier muss man erkennen, dass nicht faktorisiert werden kann: $3x - 12x^2 - 2$

<u>Hinweise:</u>

- Das Anlegen einer Lernkartei ist hilfreich und schafft Wissen im Überblick.
- Abwechslungsreich und motivierend kann das Faktorisieren auch mit Lernspielen eingeübt werden.
- Vorlagen für **Lernspiele** in [1].

Binomische Formeln

Fachlicher Inhalt

Binomische Formeln helfen, bestimmte Terme – rasch und ohne viel Rechenarbeit – zu vereinfachen. Es gilt:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Didaktisch-methodische Hinweise

Für die Schüler ist nicht immer einsichtig, warum folgende Schreibweise falsch ist:
$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Die Erfahrung zeigt, dass bei dieser Schreibweise gerne das doppelte Produkt vergessen wird.

Hinweise:

- Das Anlegen einer Lernkartei ist hilfreich.
- Abwechslungsreich und spielerisch kann mit **Übungsspielen** das routinierte Umgehen mit den binomischen Formeln eingeübt werden.
- Vorlagen für Übungsspiele in [1].

Literatur

[1] Czech, W.: 66 Spielideen Mathematik. Auer Verlag (Bestell-Nr. 07755)

Grundlagen Terme

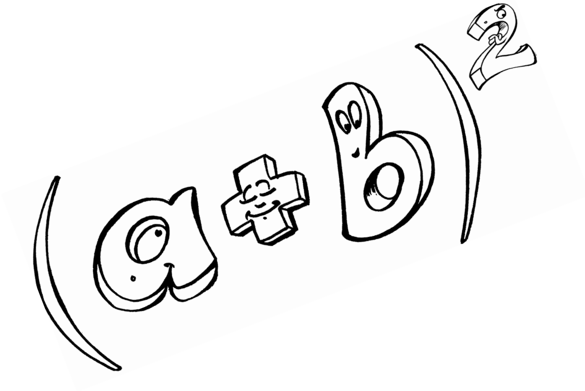
1. Prüfen Sie, ob mithilfe einer binomischen Formel faktorisiert werden kann und geben Sie gegebenenfalls die Faktorzerlegung an.

a) $x^2 - 4$

b) $4x^2 - 12x + 9$

c) $4x^2 + 4x + 1$

d) $x^2 + \frac{2}{5}xy + \frac{1}{25}y^2$



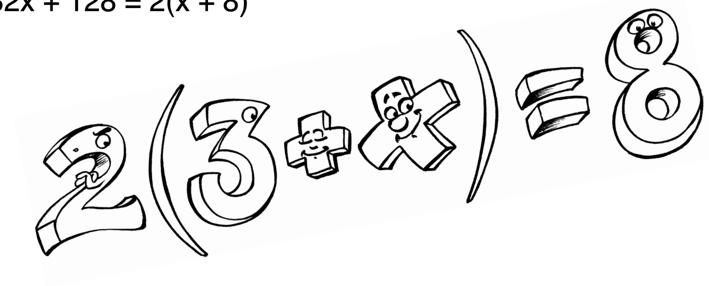
Grundlagen Terme

2. Entscheiden Sie: wahr oder falsch?

a) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$

b) $2x^2 + 32x + 128 = (2x + 8)^2$

c) $2x^2 + 32x + 128 = 2(x + 8)^2$



Grundlagen Terme

3. Faktorisieren Sie so weit wie möglich.

a) $6ab - 3ac + 3a$

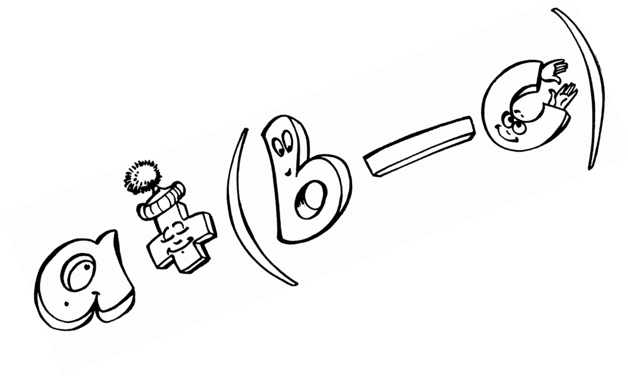
b) $a^2(x + 4) - x - 4$

c) $x^2 + x + 1 + x$

d) $1 - 27x^2$

e) $x^3 - x^2 - 2x + 2$

f) $81x^4 - 1$



Grundlagen Terme

4. Achtung Fallen!
Vergleichen Sie jeweils folgende Paare ähnlich aussehender Terme und entscheiden Sie, ob und wie jeder Term bearbeitet werden kann.

a) $(2x + 3y) \cdot 2 =$ ____________
$(2x \cdot 3y) \cdot 2 =$ ____________

b) $x^2 - 2xy + y^2 =$ ____________
$x^2 + 2xy - y^2 =$ ____________

c) $(3x)^2 =$ ____________
$(3 - x)^2 =$ ____________

d) $x^3 + x^3 =$ ____________
$x^3 \cdot x^3 =$ ____________

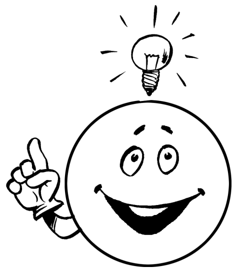
Terme in der Oberstufe

5. Ermitteln Sie die Nullstellen des Funktionsterms durch Faktorisieren.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 + x\sqrt{2}$

b) $f(x) = 20x^3 - 5x$

c) $f(x) = \ln x + \ln^2 x$



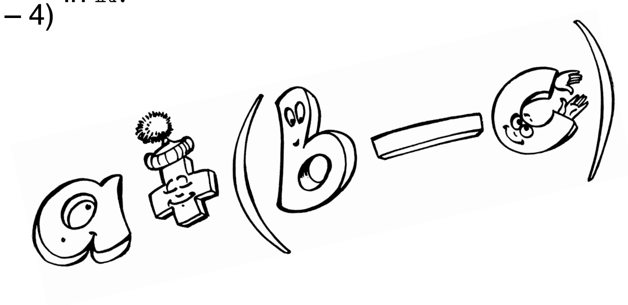
Terme in der Oberstufe

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

$8(2 - x) - 6(2 - x) = 2 - x;\ x \in \mathbb{R}$

7. Ermitteln Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}$ des Terms

$\frac{x - 1}{2(x + 1)(2x - 4)}$ in $\mathbb{R}$.



Terme in der Oberstufe

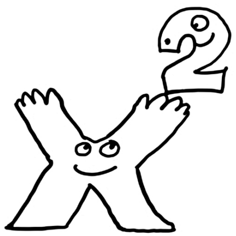
8. Gegeben sind die Funktionen f und g mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und

$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 4x$

bzw.

$g(x) = -x^2 + 2x$.

Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte ihrer Graphen.



Terme in der Oberstufe

9. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

$$\frac{(4x + 1)(x + 1)^2 - (2x^2 + x) \cdot 2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^4}$$

10. Gegeben sind die Funktionen f und g mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ und

$f(x) = 1 + \ln x$

bzw.

$g(x) = \ln^2 x + \ln x$.

Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte ihrer Graphen.

9. 1: $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$ 2: $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$ 3: $\frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$
4: $\frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\,\%$ 5: $\frac{1}{32} = 0{,}03125 = 3{,}125\,\%$ 6: $\frac{1}{32} = 0{,}03125 = 3{,}125\,\%$

10. Lara irrt sich.
Preis (P) nach Senkung um 20 %: $P \cdot 0{,}8$
Preis nach Erhöhung um 20 %: $(P \cdot 0{,}8) \cdot 1{,}2 = P \cdot 0{,}96$
Preissenkung um 20 % mit nachfolgender Preiserhöhung um 20 % führen nicht zum alten Preis.

11. ursprünglicher Preis: x
Dann gilt: $x + 0{,}15x = 27{,}60$ € $\Leftrightarrow 1{,}15x = 27{,}60$ €, also $x = 24$ €.

12. ursprünglicher Preis: x
Dann gilt: $075x = 146{,}25$ €, also $x = 195$ €.

13. A: 676 € + 676 € · 0,19 = 804,44 €; 804,44 € – 804,44 · 0,2 = 643,55 €
oder kürzer: 676 € · 1,19 · 0,8 = 643,55 €

B: 676 € – 676 € · 0,2 = 540,8 €; 540,8 € + 540,8 € · 0,19 = 643,55 €
oder kürzer: 676 € · 0,8 · 1,19 = 643,55 €

C: 676 € · 0,96 = 648,96 €

Händler A und B machen beide das günstigste Angebot.

3 Terme faktorisieren und Binomische Formeln

Grundlagen Terme — Seite 17

1. a) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ b) $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$
c) $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$ d) $x^2 + \frac{2}{5}xy + \frac{1}{25}y^2 = \left(x + \frac{1}{5}y\right)^2$

2. a) wahr b) falsch c) wahr

3. a) $6ab - 3ac + 3a = 3a(2b - c + 1)$
b) $a^2(x+4) - x - 4 = a^2(x+4) - (x+4) = (x+4)(a^2-1) = (x+4)(a+1)(a-1)$
c) $x^2 + x + 1 + x = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
d) $1 - 27x^2 = \left(1 - 3\sqrt{3}x\right)\left(1 + 3\sqrt{3}x\right)$
e) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = x^2(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x^2-2)$
f) $81x^4 - 1 = (9x^2-1)(9x^2+1) = (3x-1)(3x+1)(9x^2+1)$

4. a) $(2x + 3y) \cdot 2 = 4x + 6y$ $(2x \cdot 3y) \cdot 2 = 12xy$
b) $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ $x^2 + 2xy - y^2 = x^2 + 2xy - y^2$
c) $(3x^2) = 9x^2$ $(3-x)^2 = 9 - 6x + x^2$
d) $x^3 + x^3 = 2x^3$ $x^3 \cdot x^3 = x^6$

Anwendungen von Termen in der Oberstufe — Seite 18

5. a) $0{,}5x^2 + x\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left(0{,}5x + \sqrt{2}\right) = 0$, also $x = 0 \vee x = -2\sqrt{2}$
b) $20x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x(4x^2 - 1) = 0$, also $x = 0 \vee x = -5 \vee x = 0{,}5$
c) $\ln x + \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x \cdot (1 + \ln x) = 0$, also $x = 1 \vee x = \frac{1}{e}$

6. $8(2-x) - 6(2-x) = 2 - x \Leftrightarrow x = 2$, also $\mathbb{L} = \{2\}$

7. $2(x+1)(2x-4) = 0$, also $x = -1 \vee x = 2$ und $\mathbb{D} = \mathbb{R}/\{-1; 2\}$

8. $0{,}5x^3 - 3x^2 + 4x = -x^2 + 2x \Leftrightarrow 0{,}5x^3 - 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x(x^2 - 4x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow 0{,}5x(x-2)^2 = 0$, also $x = 0 \vee x = 2$; gemeinsame Punkte: $S_1(0|0)$; $S_2(2|0)$

9. $\dfrac{(4x+1)(x+1)^2 - (2x^2+x) \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{(4x+1)(x+1) - (4x^2+2x)}{(x+1)^3} = \dfrac{3x+1}{(x+1)^3}$

10. $1 + \ln x = \ln^2 x + \ln x \Leftrightarrow 1 = \ln^2 x \Leftrightarrow \ln x = 1 \vee x = \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e \vee x = \dfrac{1}{e}$
gemeinsame Punkte: $S_1\left(\dfrac{1}{e}\middle|0\right)$; $S_2(e|2)$

Grundlagen Binomische Formeln Seite 19

1. a) $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$

b) $\left(\sqrt{2x} - 1\right)^2 = 2x - 2\sqrt{2x} + 1$

c) $\left(\frac{1}{2x} - x\right)^2 = \frac{1}{4x^2} - 1 + x^2$

2. $x^2 + 5x + 6{,}25 = (x + 2{,}5)^2$

3. $(x+1)(x-1) - x(2x-1) + (x-0{,}5)^2 = x^2 - 1 - 2x^2 + x + x^2 - x + 0{,}25 = -0{,}75$

4. $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = \frac{x^2}{4} + x + 1 - \frac{x^2}{4} + x - 1 = 2x$

Binomische Formeln in der Oberstufe Seite 20

5. Nullstellen: 4; –4 maximaler Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

6. $h(x) = \frac{2}{4} \cdot (x+1)^2 - \frac{4}{8} \cdot (\frac{1}{2} - x)^2 = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{8} = 1{,}5x + 0{,}375$

7. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2} = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = (x-2)(x^2+2x+1) \Leftrightarrow x^3 + 2 = x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2$
$\Leftrightarrow 2 = -3x - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$, also $\mathbb{L} = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

8. $f(2+h) = (2+h)^2 - 4(2+h) + 3 = 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 3 = h^2 - 1$
$f(2-h) = (2-h)^2 - 4(2-h) + 3 = 4 - 4h + h^2 - 8 + 4h + 3 = h^2 - 1$

9. a) Zur Funktion f gehört der Graph, der die x-Achse in den Punkten $(-2|0)$ und $(2|0)$ schneidet.

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+2} = \dfrac{12x^2}{(x^2+2)^2} - 2 \quad |\cdot (x^2+2)^2 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+2) = 12x^2 - 2(x^2+2)^2$
$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 12x^2 - 2x^4 - 8x^2 - 8 \Leftrightarrow 3x^4 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x^2 - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$; Schnittpunkte: $S_1(0|-2)$, $S_2(-\sqrt{2}|-0{,}5)$, $S_3(\sqrt{2}|-0{,}5)$

4 Bruchterme und Bruchgleichungen

Bruchterme kürzen und zusammenfassen Seite 23

1. $(-1|2)$ liegt nicht auf dem Graphen G_f.