Beispiel (Gewinnschwelle):

Die Fixkosten eines Unternehmens betragen 500 GE. Die variablen Kosten eines Produktes sind 0,35 Geldeinheiten/Mengeneinheit. Das Unternehmen verkauft das Produkt zu einem Stückpreis von 0,75 Geldeinheiten.

a) Stellen Sie die Kosten- und Erlösfunktion auf.

b) Bei welcher Produktionsmenge (Gewinnschwelle) werden die Gesamtkosten durch die Erlöse gedeckt? Wie hoch sind bei dieser Produktionsmenge die Kosten? ($x \in (0; 2000)$)

c) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion. Überprüfen Sie anhand der Gewinnfunktion die unter b) errechnete Gewinnschwelle.

d) Stellen Sie Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in einem Schaubild dar.

Lösung:

a) K sei die Kostenfunktion, die sich aus den variablen Kosten K_v und den fixen Kosten K_f in Abhängigkeit der Stückzahl x zusammensetzt.

$K(x) = K_f + K_v(x)$

$\mathbf{K(x) = 500 + 0{,}35x}$; $x \in [0; 2000]$

E ist die Erlösfunktion, die den Erlös als Produkt aus dem Marktpreis p = 0,75 und der Stückzahl x angibt.

$\mathbf{E(x) = 0{,}75 \cdot x}$

b) Durch Gleichsetzen der Terme von K(x) und E(x) wird der Wert für die „kostenneutrale“ Stückzahl x_G berechnet.

$K(x_G) = E(x_G)$

$500 + 0{,}35x_G = 0{,}75x_G \Rightarrow x_G = \underline{1250}$

Man bezeichnet diese Stückzahl x_G auch als **Gewinnschwelle.**

Die Kosten berechnet man mit Hilfe der Kostenfunktion K. Es sind 937,50 GE.

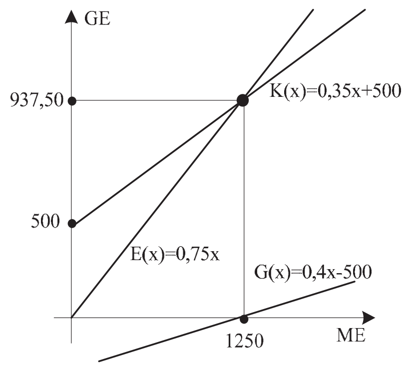
$K(1250) = 0{,}35 \cdot 1250 + 500 = \underline{937{,}50}$

c) Es gilt: Gewinn = Erlös – Kosten

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 0{,}75x - (0{,}35x + 500)$

$\underline{G(x) = 0{,}4x - 500}$



Übung

Ein Betrieb arbeitet mit einer Kostenfunktion K mit $K(x) = 2{,}5x + 15$; $x \in (0; 25]$. Das Produkt wird am Markt zu einem Stückpreis von 3,5 GE abgesetzt.

a) Berechnen Sie die Gewinnschwelle für dieses Produkt.

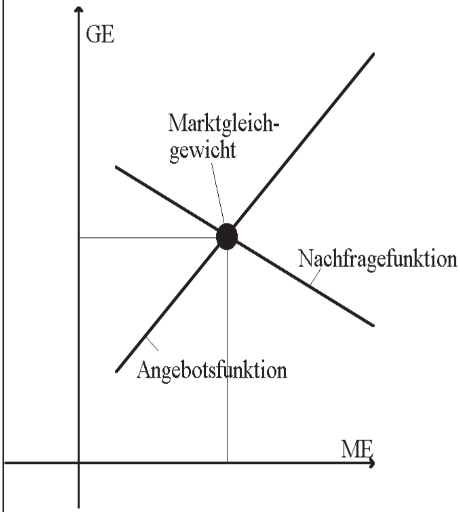
b) Überprüfen Sie mit Hilfe der Gewinnfunktion die unter a) berechnete Gewinnschwelle.

c) Ermitteln Sie, ob der Betrieb bei der abgesetzten Menge von 20 ME einen Gewinn erzielen kann? Wie hoch ist dieser Gewinn?

d) Veranschaulichen Sie sich die Situation in einem Schaubild.

b) Marktpreisbildung

In einer Marktwirtschaft bieten die Anbieter (Produzenten) meistens umso mehr von einem Gut an, je höher der Gewinn und damit in der Regel auch sein Preis ist. Dagegen werden die Nachfrager (Konsumenten) eine Ware umso mehr nachfragen, je niedriger der Preis ist. Wird zu einem gegebenen Preis mehr nachgefragt als angeboten, so werden die Anbieter den Preis so lange anheben, bis Angebots- und Nachfragemenge gleich sind. Ist umgekehrt das Angebot größer als die Nachfrage, so hat das so lange fallende Preise zur Folge, bis sich ebenfalls beide Mengen ausgleichen. Der Marktpreis, der sich bei diesem Wechselspiel von Angebot und Nachfrage ergibt, heißt **Gleichgewichtspreis.**
Auch der Staat kann aus politischen, sozialen, fiskalischen oder sonstigen Gründen in das Marktpreisgeschehen eingreifen und so eine Änderung des Marktpreises bewirken. Der Eingriff des Staates kann durch eine Festlegung von Mindest- und Höchstpreisen das Wechselspiel zwischen Angebot und Nachfrage beeinflussen.



Beispiel (Marktgleichgewicht):

Auf einem Markt gelten für ein bestimmtes Produkt die Angebotsfunktion mit der Gleichung: $p_A(x) = 0,5x + 2$ und Nachfragefunktion: $p_N(x) = -x + 6$. Es gilt für beide Funktionen: $x \in [1; 5]$.

a) Berechnen Sie das Marktgleichgewicht M_G.
b) Zu welchem Preis fragen die Konsumenten eine Menge von 4 ME nach?
c) Welche Menge wird bei einem Preis von 3 GE angeboten?
d) Der Staat garantiert einen Mindestpreis von 4 GE/ME. Dabei entsteht ein Angebotsüberschuss. Berechnen Sie diesen. Welche Konsequenz hat dies für den Staat?
e) Der Staat legt einen Höchstpreis von 3 GE fest. Daraus entsteht ein Nachfrageüberschuss. Berechnen Sie diesen. Welche Konsequenz hat dies für den Staat?
f) Veranschaulichen Sie sich die Teilaufgaben in einem Schaubild.

<u>Lösung:</u>

a) Gleichsetzen der Terme von p_A und p_N, um zunächst die Gleichgewichtsmenge x_G zu berechnen. Durch Einsetzen von x_G in z. B. p_N ergibt sich der Gleichgewichtspreis p_G. Die Koordinaten des Schnittpunktes geben das Marktgleichgewicht an **(M_G (2,67 | 3,33))**. Bei einer Menge von 2,67 ME und einem Preis von 3,33 GE gleichen sich Angebot und Nachfrage aus.

$p_A(x) = p_G(x)$

$0,5x + 2 = -x + 6 \Rightarrow x_G \approx \underline{2,67}$

Gleichgewichtsmenge

$p_G = p_N(2,67) \approx -2,67 + 6 = \underline{3,33}$

Gleichgewichtspreis

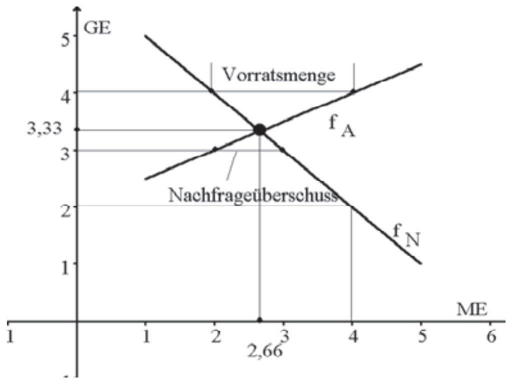
b) Für x_A wird 4 in den Term der Nachfragefunktion eingesetzt.

$p_N(4) = -4 + 6 = \underline{2\ (GE)}$

c) Man setzt den Term der Angebotsfunktion gleich 3 und löst nach x auf.

$p_A(x) = 3$

$0{,}5x + 2 = 3 \Rightarrow x = \underline{2\ (ME)}$



d) Der Mindestpreis liegt über dem Gleichgewichtspreis, sodass eine bestimmte Menge nicht auf dem Markt verkauft werden kann. Die Menge von 2 ME lagert der Staat auf Vorrat ein.

$4 = p_N(x_N)$ und $4 = p_A(x_A)$

$4 = -x_N + 6 \Rightarrow x_N = 2$

$4 = 0{,}5x_A + 2 \Rightarrow x_A = 4$

Angebotsüberschuss:

$x_A - x_N = 4 - 2 = \underline{2\ (ME)}$

f) Der Marktpreis liegt unter dem Gleichgewichtspreis, sodass mehr nachgefragt als angeboten wird. Der Staat muss für eine gerechte Verteilung des Produktes sorgen.

$3 = p_N(x_N) = p_A(x_A)$

$3 = -x_N + 6 \Rightarrow x_N = 3$

$3 = 0{,}5x_A + 2 \Rightarrow x_A = 2$

Nachfrageüberschuss:

$x_N - x_A = 3 - 2 = \underline{1\ (ME)}$

Übung

Für ein landwirtschaftliches Produkt werden die Nachfrage und das Angebot durch folgende Funktionen beschrieben: $p_N(x) = -0{,}75x + 10$ sowie $p_A(x) = x + 5;\ x \in [1; 5]$.

a) Bestimmen Sie rechnerisch das Marktgleichgewicht.
b) Zu welchem Preis werden 6 ME nachgefragt?
c) Wie viel ME können zu einem Stückpreis von 6 GE abgesetzt werden?
d) Der Staat gewährt zum Schutz der Landwirtschaft einen Mindestpreis von 9 GE. Wie hoch ist der dadurch bedingte Angebotsüberschuss, der vom Staat eingelagert werden muss?
e) Welcher Nachfrageüberhang wäre bei einer Höchstpreisfestsetzung von 6 GE durch den Staat zu erwarten?
f) Veranschaulichen Sie sich die Teilaufgaben in einem Schaubild.

c) Lineares Wachstum

Lineares Wachstum heißt, dass in gleichen Zeitspannen die Werte um den gleichen Betrag zunehmen. Da Wachstumsprozesse, und das gilt auch für lineare Wachstumsprozesse, häufig von mehreren Faktoren abhängen, ist es im Allgemeinen schwierig, sie in ein bestimmtes mathematisches Modell – lineares Modell – einzuordnen. Ziel bei linearen Wachstumsprozessen – insbesondere bei statistischen Erhebungen – ist es, eine Funktion aufzustellen, aus der Zwischenwerte berechnet und Prognosen aufgestellt werden können. Zu linearen Wachstumsprozessen gehören.

Bevölkerungswachstum in bestimmten Zeitabschnitten

Säulenwachstum in Tropfsteinhöhlen

Zunahme der **Erdtemperatur** mit steigender Tiefe

Zunahme der **Arbeitslosigkeit** von 1999 bis 2003

Abnahme von **Neugeborenen** in den Industrienationen Europas (negatives Wachstum)

Reaktionsfähigkeit von Menschen bei Alkoholeinfluss

Beispiel:

In der Tabelle ist die **Reaktionszeit** von Menschen abhängig vom **Alkoholgehalt** im Blut angegeben (Durchschnittswerte).

Alkoholgehalt in ‰	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Reaktionszeit in s	0,13	0,16	0,18	0,21	0,24	0,27	0,30	0,33	0,36

a) Ermitteln Sie die Differenz d zweier aufeinander folgender Messergebnisse.
b) Geben Sie eine lineare Funktion an, die die Abhängigkeit zwischen Alkoholgehalt und Reaktionszeit angenähert wiedergibt.
c) Welche Reaktionszeit ist in etwa bei einem Alkoholgehalt von 0, 8 ‰ bzw. 1,5 ‰ im Blut zu erwarten?

Lösung:

a) Man erkennt, dass die Differenz d zweier aufeinander folgender Werte mit einer Ausnahme (d zwischen 0,4 und 0,3 wird vernachlässigt) konstant ist.

$$\begin{aligned} d &= 0{,}16 - 0{,}13 = 0{,}21 - 0{,}18 \\ &= 0{,}24 - 0{,}21 = 0{,}27 - 0{,}24 \\ &= 0{,}32 - 0{,}29 = 0{,}35 - 0{,}32 \Rightarrow \underline{d = 0{,}03} \end{aligned}$$

b) Zu ermitteln ist die Funktion mit der Gleichung f(x) = mx + b. Für den Alkoholgehalt gilt die Variable x und für die Reaktionszeit f(x). Die Steigung m wird berechnet, indem man zwei gemessene Punkte der Tabelle wählt und die Werte in die Steigungsformel einsetzt. Es ergibt sich ein Steigungswert von m = 0,3. Mit einem beliebigen Punkt auf der Geraden, z. B. $P_1(0{,}24|0{,}6)$, lässt sich der y-Achsenabschnitt b berechnen.

$f(x) = mx + b$ x: Alkohohlgehalt
f(x): Reaktionszeit

Berechnung der **Steigung** mit
P(0,6|0,24) und Q(0,7|0,27)

$$m = \frac{0{,}27 - 0{,}24}{0{,}7 - 0{,}6} = 0{,}3$$

Berechnung von **b:**

$0{,}24 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + b \Rightarrow b = 0{,}06$

$\underline{f(x) = 0{,}3x + 0{,}06}$

c) Die Reaktionszeit bei z. B. 0,8 ‰ bzw. 1,5 ‰ Alkohol im Blut beträgt ca. 0,3 s bzw. 0,51 s. In der Zeit von 0,51 s ist ein Auto mit 50 km/h ca. 7,08 m weit gefahren.

$f(0{,}8) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}06 = 0{,}3$ (s)
$f(1{,}5) = 0{,}3 \cdot 1{,}5 + 0{,}06 = 0{,}51$ (s)

Übung

In den Höhlen eines Kalkgebirges entstehen durch die Kalkbestandteile des tropfenden Wassers Steinsäulen – sogenannte Stalagmiten bzw. Stalaktiten –. Man geht dabei von einem Wachstum von 1 mm in 10 Jahren aus.
a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für das Wachstum der Steinsäulen auf.
b) Welche Höhe erreicht ein Stalagmit nach 1 000 Jahren?
c) Wie alt ist ein 2 m langer herabhängender Stalaktit?

Aufgaben 4.2

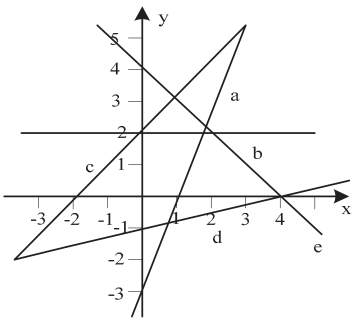
Lineare Funktionen

1. Gegeben sind die linearen Funktionen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = -0{,}5x + 1$.
a) Zeichnen Sie die Graphen im Intervall $x \in [-2; 2]$.
b) Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Punkte P, Q,...auf dem Graphen von f bzw. g liegen: $P(1 \mid 3)$; $Q(-3 \mid 2{,}5)$; $R(2{,}5 \mid 4{,}5)$; $S(3 \mid -0{,}5)$; $T(-1{,}5 \mid 1)$.
c) Der Punkt $P(3 \mid f(3))$ liegt auf dem Graphen von f, wie groß ist f(3)?
d) Der Punkt $P(x_1 \mid 6)$ liegt auf dem Graphen von f und g, wie groß ist jeweils x_1?

2. Ermitteln Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse, zeichnen Sie das Steigungsdreieck und dann den Graphen von f.
a) $f(x) = 0{,}5x$ b) $f(x) = -\frac{3}{4}x$ c) $f(x) = \frac{5}{3}x + 1$ d) $f(x) = -4 + \frac{7}{4}x$

3. Gegeben sind die beiden Graphenpunkte P_1 und P_2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
a) $P_1(1 \mid 3)$; $P_2(-4 \mid -2)$ b) $P_1(-1 \mid -1)$; $P_2(3 \mid -5)$ c) $P_1(0 \mid 4)$; $P_2(3 \mid 1)$
d) $P_1(0{,}5 \mid 0)$; $P_2(-2 \mid 1{,}25)$ e) $P_1(4 \mid 4)$; $P_2(-4 \mid 4)$; f) $P_1(-1 \mid 1)$; $P_2(0 \mid 6)$

4. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Geraden.



5. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f mit den Koordinatenachsen und zeichnen Sie den Graphen. Wie groß sind der Steigungswert und der Steigungswinkel?
a) $f(x) = 1 - x$ b) $f(x) = 0{,}5x - 2$ c) $f(x) = 4 - 3x$ d) $f(x) = 2 - 0{,}25x$

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}5x - 2$. Eine Parallele zum Graphen von f verläuft durch den Punkt $P(2|3)$. Eine weitere Parallele durch den Punkt $(-2|-4)$.
a) Skizzieren Sie die beiden Sachverhalte.
b) Bestimmen Sie die Funktionsterme der beiden Parallelen.
c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Parallelen mit den Koordinatenachsen.

7. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden f und g.
a) $f(x) = 2x + 2$; $g(x) = 2 - 2x$ b) $f(x) = -0{,}5x + 1$; $g(x) = 3$
c) $f(x) = 3 - 0{,}25x$; $g(x) = 4x + 0{,}25$ d) $f(x) = -x$; $g(x) = -0{,}5x + 3$
e) $f(x) = -1 + 2x$; $g(x) = 0{,}5x + 2$ f) $f(x) = 10x + 15$; $g(x) = 12 - 12x$

8. Gegeben sind:
1. die Punkte $P_1(4|0)$ und $P_2(0|2)$ einer Geraden f und die Funktionsgleichung der Geraden g mit $g(x) = 0{,}5x + 1$ und
2. die Punkte $P_1(0|-4)$ und $P_2(1|2)$ einer Geraden f und die Funktionsgleichung der Geraden g mit $g(x) = 1 - 0{,}5x$.

a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Geraden von f.
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Geraden mit den Koordinatenachsen.
c) Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.

9. Gegeben sind die Funktion $f(x) = 0{,}5x-2$ und die Punkte $P_1(1|-2)$ und $P_2(-3|1)$.
a) Wie lautet die Funktionsgleichung der Geraden g durch die Punkte P_1 und P_2?
b) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem ein.
c) Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen.
d) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen mit den Achsen.

10. Prüfen Sie, ob sich die Geraden von f und g schneiden. Berechnen Sie, falls vorhanden, den Schnittpunkt. (Bestimmen Sie in c), d) und e) zuerst die Funktionsgleichung.)
a) $f(x) = x - 5$; $g(x) = -x + 1$
b) $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = 2x - 5$
c) $f(x) = -x + 3$; der Graph von g geht durch $P_1(1|0)$ und $P_2(3|0{,}\overline{3})$.
d) Die Gerade von f hat den Steigungswinkel von $\alpha = 45^0$. Die Gerade von g geht durch die Punkte $P_1(-1|3)$ und $P_2(2|0)$.
e) Der Graph von f hat die gleiche Steigung wie die Gerade, die durch die Punkte $P_1(2|1)$ und $P_2(0|4)$ geht. Der Graph von f geht durch den Punkt $P_1(0|4)$.

Anwendungen

11. Lohnt es sich, einen **„Diesel“ oder einen „Benziner“** zu fahren? Die festen Kosten für ein Dieselauto betragen im Jahr ca. 5 000 € (Abschreibung, Wartung,...). Die Treibstoffkosten werden bei einem Verbrauch von 6,5 Litern auf 100 km mit 1,05 €/l angenommen. Bei einem Auto mit Bezinmotor „Super bleifrei“ betragen die jährlichen Fixkosten ca. 4 500 €. Die Treibstoffkosten bei einem Verbrauch von 10 Litern auf 100 km werden mit 1,20 €/l angenommen.
a) Ermitteln Sie die beiden Kostenfunktionen und zeichnen Sie ihre Graphen.
b) Bei welcher Kilometerzahl sind die Kosten gleich?
c) Wie hoch sind die Kosten beider Fahrzeuge bei 10 000 km bzw. 30 000 km jährlicher Fahrleistung?

12. Zwei Busunternehmen bieten folgende Tarife für einen Schulausflug an:

Tarif A: Grundgebühr 40,00 €; km-Gebühr 1,50 €/km.

Tarif B: Grundgebühr 10,00 €; km-Gebühr 2,00 €/km.

a) Erstellen Sie für beide Unternehmen eine Tabelle von 10 bis 80 km mit x: Entfernung in km und y: Fahrpreis in € und lesen Sie ab, bei welcher Entfernung die Schüler gleich viel bezahlen müssen?
b) Geben Sie die Funktionsgleichungen an, mit denen für jede km-Leistung der Fahrpreis berechnet werden kann.
c) Zeichnen Sie die Graphen.
d) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, welches Busunternehmen bei einer Entfernung von 90 km günstiger ist. Prüfen Sie das rechnerisch nach. Bestimmen Sie auch den Preisunterschied bei dieser Entfernung.

13. Ein Betrieb verkauft eines seiner Produkte:

1. Zu einem Stückpreis von 3,5 GE/ME, dabei betragen die fixen Kosten 275 GE und die variablen Kosten 1,25 GE/ME.
2. Zu einem Stückpreis von 12 GE/ME, dabei betragen die fixen Kosten 1 250 GE und die variablen Kosten 9 GE/ME.

a) Ermitteln Sie Kosten- und Erlösfunktion.
b) Skizzieren Sie die beiden Funktionen in ein Koordinatensystem.
c) Ermitteln Sie die Gewinnschwelle.
d) Wie groß ist der Gewinn bei einer verkauften Menge von erstens 200 ME und zweitens 1 000 ME?

14. Eine Winzergenossenschaft berechnet für die Auslieferung ihrer Kisten 0,80 € pro Kiste, bei einem monatlichen Fixkostenanteil von 750 €. Würde ein Logistikunternehmen die Auslieferung der Kisten übernehmen, so würde es der Genossenschaft 1,10 € pro Kiste zahlen.

a) Geben Sie die Kostenfunktion der Genossenschaft an.
b) Um welchen Betrag lassen sich die Kosten bei einer monatlichen Auslieferung von 2 800 Kisten senken? Bei welcher Kistenzahl verbilligt sich die Auslieferung um 500€?
c) Fertigen Sie eine Zeichnung an.

15. Aufgrund von Marktuntersuchungen hat man festgestellt, dass das Verhalten von Anbietern und Konsumenten auf dem Markt für ein bestimmtes Gut durch folgende Funktionen annähernd beschrieben werden kann:

1. $p_N(x) = 50 - 0{,}1x$ und $p_A(x) = 0{,}25x + 15$; $x \in [20; 200]$

2. $p_N(x) = 250 - 25x$ und $p_A(x) = 15x + 50$; $x \in [2; 60]$

a) Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht.
b) Wie viel ME werden abgesetzt bei einem Preis von **1.** 48 GE/ME und **2.** 200 GE/ME?
c) Der Höchstpreis wird auf **1.** 35 GE/ME und **2.** 100 GE/ME festgesetzt. Berechnen Sie den Nachfrageüberschuss.
d) Der Staat garantiert einen Preis von **1.** 45 GE/ME und **2.** 150 GE/ME. Wie hoch ist die vom Staat aufzukaufende Menge?
e) Stellen Sie die Fälle 1. und 2. grafisch dar.

16. In den westlichen Industrienationen kommen auf 800 000 Neugeborene ca. 1 Million Sterbefälle. Diese Statistik gilt ungefähr ab dem Jahr 1990. Im Jahr 2005 hatten die beobachteten Industrienationen eine Einwohnerzahl von ca. 250 Mio. Einwohnern.

a) Ermitteln Sie den negativen Wert für m und stellen Sie eine Funktion auf, aus der man für jedes Jahr nach 1980 die Einwohnerzahl berechnen kann.

b) Wie groß war die Bevölkerungszahl im Jahr 2000 und wie groß wird sie im Jahre 2020 sein, wenn sich diese Entwicklung fortsetzt?

17. Die Erdtemperatur nimmt um ca. 2^0 C je 100 m Tiefe zu. In 50 m Tiefe herrscht eine Temperatur von ca. 12^0 C in Europa. Welche Temperatur herrscht in 1 km Tiefe bzw. in 100 km Tiefe? Aus welcher Tiefe kommt das ca. 80^0 C warme Wasser der Geysire in Island?

18. Die Einwohnerzahl einer Industriestadt wuchs in den Jahren 1960 – 1970 von 250 000 auf ca. 299 500 Einwohner nahezu linear an.

a) Berechnen Sie den jährlichen Zuwachs und geben Sie die lineare Wachstumsfunktion an.

b) Welche Einwohneranzahl (theoretisch) berechnen Sie für 1975?

4.3 Quadratische Funktionen

Einführungsbeispiel:

Die Bremswegformel, die man in der Fahrschule lernt, gibt den funktionalen Zusammenhang zwischen der gefahrenen Geschwindigkeit v als Ausgangsgröße und dem Bremsweg s als zu berechnende Größe an.

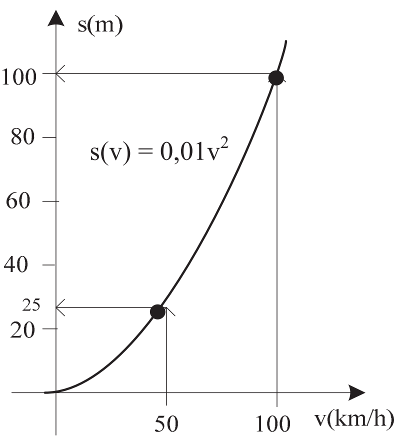
$s = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ bzw. $\mathbf{s = 0{,}01v^2}$

Gegeben sind die Geschwindigkeiten v in (km/h) von z . B. v = {0, 10, 30, 50, 80, 100}.

Erstellen Sie eine Wertetafel und tragen Sie die berechneten Punkte in ein Koordinatensystem ein. Auf der x-Achse (Abzisse) soll die gefahrene Geschwindigkeit v und auf der y-Achse (Ordinate) der Bremsweg s aufgetragen.

v in km/h	0	10	30	50	80	100
s in m	0	1	9	25	64	100

Verbindet man die Punkte, so stellt man fest, dass ein „gekrümmter" Kurvenzug entsteht.
Man erkennt am Graphen, dass es sich um eine Parabel mit der Gleichung s(v) = $0{,}01v^2$ handelt.



Funktionsgleichung: $s(v) = 0{,}01v^2$

12. Zu bestimmen ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Im Punkt $P(1 \mid 2)$ hat ihr Graph ein Maximum.

13. Über den Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist bekannt: Wendepunkt in $W(1 \mid 6)$; die Wendetangente hat die Steigung – 7; Steigung an der Stelle x = 2 ist – 4.
Die Funktionsgleichung zu f ist gesucht.

14. Eine Funktion vierten Grades hat die erste Ableitungsfunktion $f'(x) = 4x^3 - 6x + \frac{5}{3}$. Ihr Graph geht durch den Punkt $P(1 \mid 2)$ und $Q(-2 \mid 3)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

7.5 Anwendungen ganzrationaler Funktionen

In der angewandten Mathematik gibt es zahlreiche Beispiele, in denen die bisher behandelten Begriffe wie Nullstellen, Extrema, Monotonie, Wendepunkte und Krümmung bei Funktionen und deren Graphen von besonderer Wichtigkeit sind. Zwei Anwendungen aus der Kostentheorie und aus Wachstumsvorgängen in der Natur sollen hier dargestellt werden.

1. Kostenfunktionen

Begriffe der Kostentheorie

In den vorausgegangenen Kapiteln wurden bereits verschiedene Kostenfunktionen bei der Behandlung des Marktmodells vorgestellt. Hierbei ging es insbesondere um den Zusammenhang zwischen einer gegebenen Erlösfunktion eines Unternehmens und der daraus resultierenden Gewinnsituation.

In diesem Abschnitt werden Kostenverläufe behandelt, die als ganzrationale Funktionen dritter Ordnung einen „s-förmigen" Verlauf aufweisen und deshalb in der Wirtschaftstheorie von besonderem Interesse sind.

Insbesondere werden dabei aus der Kostenfunktion abgeleitete neue Funktionen vorkommen, die im Folgenden begrifflich geklärt werden.

Funktion	Erläuterung	Bezeichnung
Gesamtkostenfunktion	Sie gibt den Zusammenhang zwischen der Produktionsmenge x und den daraus entstehenden Gesamtkosten K an.	$\mathbf{K(x)}$
Fixkosten	sind die unabhängig von der Produktionsmenge anfallenden Kosten (= Absolutglied von K(x)).	$\mathbf{K_f}$
Variable Gesamtkosten	sind die von der Produktionsmenge abhängigen Kosten (= alle x-Glieder von K(x)).	$\mathbf{K_v(x)}$
Stück-/Durchschnittskosten	sind die Gesamtkosten je Stück.	$\mathbf{k(x) = \frac{K(x)}{x}}$
Variable Stück-/Durchschnittskosten	sind die variablen Kosten je Produktionseinheit.	$\mathbf{k_v = \frac{Kv(x)}{x}}$
Grenzkosten	sind die Kosten, die bei Ausweitung der Produktionsmenge um eine sehr kleine Einheit zusätzlich anfallen.	$\mathbf{K'(x)}$

S-förmige Kostenverläufe

Beispiel:

Ein Betrieb legt eine Kostenfunktion mit der Gleichung $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$ zugrunde.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion.

b) Stellen Sie K und K´ in einem Schaubild dar.

c) Analysieren Sie den Zusammenhang zwischen der Kostenfunktion K und der Grenzkostenfunktion K´.

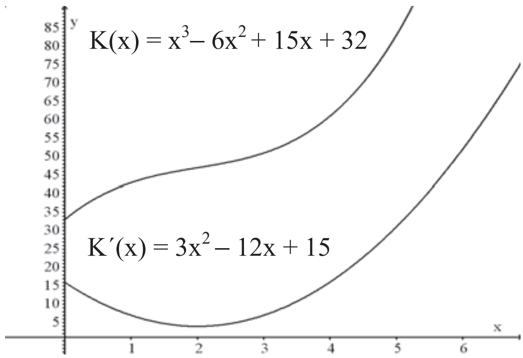
d) Stellen Sie auch den Zusammenhang zwischen der Kostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion her (Schaubild), indem Sie das Betriebsoptimum und das Betriebsminimum bestimmen.

Lösung:

a) Die Grenzkostenfunktion erhält man durch Ableiten der Kostenfunktion K.

$K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$

$K'(x) = 3x^2 - 12x + 15$



c) Die Kostenfunktion <u>steigt monoton</u>, weil mit zunehmender Ausbringung auch die Kosten steigen müssen, es gilt **$K'(x) > 0$** für alle x.
Allerdings steigen die Kosten nicht gleichmäßig zur Ausbringungsmenge (linear), sondern zunächst **unterlinear** (Rechtskrümmung), was durch **$K''(x) < 0$** nachgewiesen werden kann. Nach der Wendestelle bei **$x = 2$** steigen die Kosten **überlinear** (Linkskrümmung) mit **$K''(x) > 0$.**
Die Grenzkosten sind am geringsten an der Wendestelle **($K''(x) = 0$),** hier ist die Steigung der Kostenfunktion K am geringsten.

$K'(x) = 3x^2 - 12x + 15$

$3x^2 - 12x + 15 > 0$

$K''(x) = 6x - 12$

$K''(x) < 0$, wenn $6x - 12 < 0 \Rightarrow \mathbf{x < 2}$

$K''(x) = 0$, wenn $6x - 12 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 2}$

$K''(x) > 0$, wenn $6x - 12 > 0 \Rightarrow \mathbf{x > 2}$

$\mathbf{K''(x)} = 6x - 12$

$6x - 12 = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 2}$

d) Die Stückkosten **k** erhält man, indem man die Gesamtkosten K durch die Ausbringungsmenge dividiert.
Die variablen Stückkosten **k_v** ergeben sich aus den variablen Gesamtkosten (Gesamtkosten ohne Fixkosten), dividiert durch die Ausbringungsmenge x.

$$\mathbf{k(x)} = \frac{K(x)}{x} = \frac{x^3 - 6x^2 + 15x + 32}{x}$$

$$= x^2 - 6x + 15 + \frac{32}{x}$$

$K_v(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$

$$\mathbf{k_v(x)} = \frac{K_v(x)}{x} = x^2 - 6x + 15$$

Das Minimum der Durchschnittskosten liegt an der Stelle x, wo eine Ursprungsgerade die Kostenkurve eben noch berührt, hier an der Stelle **x = 4.** Diese Stelle heißt **Betriebsoptimum,** der zugehörige y-Wert **15** ist die **langfristige Preisuntergrenze,** weil zu diesem Preis die Stückkosten gerade noch gedeckt sind.

$k(x) = x^2 - 6x + 15 + \frac{32}{x}$

$k'(x) = 2x - 6 - \frac{32}{x^2}$

$2x - 6 - \frac{32}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$

$2x^3 - 6x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x = \underline{4}$ (Probieren)

Das Minimum der variablen Durchschnittskosten heißt **Betriebsminimum,** der zugehörige y-Wert **6** ist die **kurzfristige Preisuntergrenze,** weil zu diesem Preis nur noch die variablen Stückkosten gerade noch gedeckt sind. Fällt der Preis unter diesen Wert, lohnt sich die Produktion nicht mehr und müsste eingestellt werden.

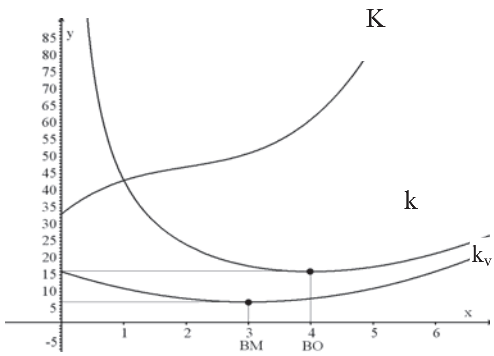
$k(4) = \mathbf{15}$ (langfristige Preisuntergrenze)

$k_v(x) = x^2 - 6x + 15$

$k_v'(x) = 2x - 6$

$2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 3}$

$k_v(3) = \mathbf{6}$ (kurzfristige Preisuntergrenze)



Gewinnbetrachtungen

Für den Unternehmer ist es wichtig zu wissen, für welche Produktionsmengen er bei gegebenem Marktpreis und vorgegebener Kostenfunktion einen Gewinn erzielen kann und bei welcher Menge dieser Gewinn maximal wird.

Beispiel:

Ein Betrieb stellt ein Produkt her und erzielt dabei am Markt einen Preis von p = 8 GE, wobei eine Kostenfunktion mit der Gleichung $K(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 5x + 10$ unterstellt wird.

a) Stellen Sie die Gewinnfunktion auf und berechnen Sie die Gewinnschwelle und -grenze.

b) Bei welcher Produktionsmenge wird der Gewinn am größten? Wie hoch ist er dann?

c) Stellen Sie die Situation grafisch dar.

Lösung:

a) Der Erlös ist das Produkt aus Preis und Menge. Der Gewinn ergibt sich aus der Differenz zwischen Erlös und Kosten.

$E(x) = 8x$

$\mathbf{G(x) = E(x) - K(x)}$

$G(x) = 8x - (0{,}5x^3 - 2x^2 + 5x + 10)$

$= -0{,}5x^3 + 2x^2 + 3x - 10$

Gewinnschwelle und Gewinngrenze erhält man aus den Nullstellen von G. Die erste Nullstelle wird durch Einsetzen ermittelt. Die übrigen Nullstellen erhält man nach Polynomdivision durch Nullsetzen des erhaltenen Quadratterms und Anwendung der p-q-Formel.
Die Gewinnschwelle liegt bei x = 2 ME und die Gewinngrenze bei x = 4,32 ME.

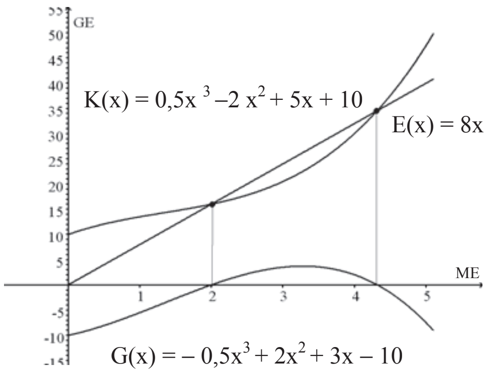
G(x) = 0
$0 = -0{,}5x^3 + 2x^2 + 3x - 10 \quad | \cdot (-2)$
$0 = x^3 - 4x^2 - 6x + 20$ | durch Probieren:
$x_1 = \underline{2}$
Polynomdivision ergibt:
$(x^3 - 4x^2 - 6x + 20) : (x - 2) = x^2 - 2x - 10$
$x^2 - 2x - 10 = 0$
$x_2 \approx \underline{4{,}32}$ und $x_3 \approx -2{,}32 \notin D_K$

b) Bestimmung des Gewinnmaximums mit Hilfe der hinreichenden Bedingung ergibt: Es liegt ein Gewinnmaximum vor bei einer Produktionsmenge von 3,28 ME. Der höchstmögliche Gewinn wird durch Einsetzen des Wertes in die Gewinngleichung berechnet und beträgt 22,5 GE.

hinr. Bedingung für ein Gewinnmaximum:
$\mathbf{G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0}$
$G'(x) = -1{,}5x^2 + 4x + 3$
$G''(x) = -3x + 4$
Aus $G'(x) = 0$ folgt: $-1{,}5x^2 + 4x + 3 = 0$
nach p-q-Formel: $x_1 \approx \underline{3{,}28}$ $x_2 \approx \underline{-0{,}61}$

c) Die grafische Darstellung gibt mit ihren Nullstellen der Gewinnfunktion bzw. den Schnittpunkten der Kosten- mit der Erlösfunktion die Gewinnschwelle und -grenze an. Der Hochpunkt stellt das Gewinnmaximum dar.
Überprüfung an G´´(x):
$G''(3{,}28) = -3 \cdot 3{,}28 + 4 = -5{,}84 < 0$

Berechnung des zugehörigen Gewinns:
$G(3{,}28) = \underline{3{,}71 \text{ GE}}$



Übungen

1. Untersuchen Sie die Kosten- und Gewinnsituation, wenn Folgendes bekannt ist: $D_{ök} = [0; 8]$
$K(x) = 2x^3 - 15x^2 + 48x + 20$; $E(x) = 36x$. Bestimmen Sie im Einzelnen:
a) Gewinnfunktion sowie Gewinnschwelle und Gewinngrenze und den maximalen Gewinn,
b) die Gleichung der variablen Stückkostenfunktion und der Grenzkostenfunktion. Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und das Minimum der Grenzkosten.
c) Skizzieren Sie die Graphen von G, k , k_V und k´sowie von E und K.

2. Gegeben ist die Kostenfunktion mit der Gleichung $K(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 20$ und die Erlösfunktion mit $E(x) = 15x$.
a) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle, die Gewinngrenze und den maximalen Gewinn.
b) Aufgrund von Überproduktion sinkt der Preis auf 8,00 GE pro Stück. Untersuchen Sie unter diesen Bedingungen $G'(x) = 0$ und begründen Sie, warum unter diesen Bedingungen eine verlustfreie Produktion nicht möglich ist.
c) Wie lautet die Grenzkostenfunktion und bei welcher Menge liegt das Minimum der Grenzkosten?

2. Zunahme- und Abnahmevorgänge in Natur und Gesundheit

Vergleichbar der Anwendung der Mathematik bei der Erfassung wirtschaftlicher Zusammenhänge können auch Vorgänge aus den Bereichen Natur, Technik und Gesundheit durch ganzrationale Funktionen dargestellt werden. Dabei benutzt man die ganzrationalen Funktionen als mathematisches Modell, um mit ihrer Hilfe und bei Vernachlässigung unwesentlicher Einzelheiten in der Realität Probleme zu lösen.

Beispiel:

Wird einem Patient eine bestimmte Dosis eines Medikamentes verabreicht, so nimmt die Konzentration des Wirkstoffes im Blut (mg/l) zunächst zu, erreicht ihr Maximum und nimmt dann ab. Aus diesen Messergebnissen werden Rückschlüsse auf Dosierung und Dosierungsintervalle gezogen.

In der Tabelle sind die zeitlichen Veränderungen nach 1; 3; 5; 10 und 12 Stunden im Blut festgehalten.

t in Std.	0	1	3	5	10	12
durchschnittliche Konzentration in mg/l	0	0,59	2,13	3,75	5	3,12

a) Ermitteln Sie die ganzrationale Funktion dritten Grades, die den Zusammenhang beschreibt und skizzieren Sie den Graphen.
b) Zu welchem Zeitpunkt liegt die höchste Konzentration vor?
c) Nach welcher Zeit tritt beim Zuwachs der Konzentration eine Trendwende ein?
d) Wie viel Stunden vergehen, bis nur noch 10 % der Höchstkonzentration im Blut sind?

Lösung:

a) Man notiert die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades. Die Koeffizienten a_3; a_2; a_1 und a_0 sind gesucht. Da zum Zeitpunkt t = 0 noch keine Konzentration vorliegt, ist $a_0 = 0$.
Zur Bestimmung der Koeffizienten a_3; a_2 und a_1 stellt man ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen, auf und löst es z. B. mit Hilfe des GTR oder mit einer der behandelten Lösungsmethoden. (Es können auch andere Zahlenpaare aus der Tabelle berücksichtigt werden.)
Der GTR ermittelt:
$a_3 = 0,01$; $a_2 = 0,05$ und $a_1 = 0,5$.
$\underline{f(t) = -0,01t^3 + 0,1t^2 + 0,5t}$

$f(t) = a_0t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$
$f(0) = 0 \quad + 0 \quad + 0 \ + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ für $t = 0$

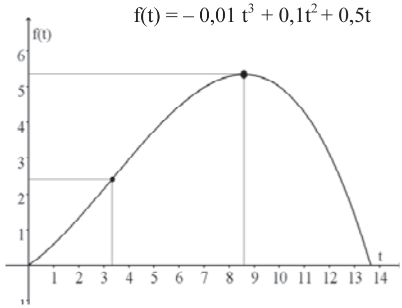
I. $0,59 = a_3 1^3 + a_2 1^2 + a_1 1$
II. $2,13 = a_3 3^3 + a_2 3^2 + a_1 3$
III. $5 = a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10$

I. $0,59 = a_3 + a_2 + a_1$
II. $2,13 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1$
III. $5 = 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1$

b) Man ermittelt die erste Ableitung und berechnet den Hochpunkt :
Nach ca. 8 Std. und 36 Min. liegt die höchste Konzentration des Wirkstoffes im Blut vor.

$f'(t) = 0 = -0,03t^2 + 0,2t + 0,5$
$0 = t^2 - 6,67t - 16,67$
$\Rightarrow t = 8,6$ Std.
$P_H(8,6 \mid 5,33)$

c) Eine Verlangsamung des Anstieges der Konzentration tritt im Wendepunkt (Trendwende) ein. Man ermittelt zu seiner Berechnung zuerst die zweite Ableitungsfunktion.
$f''(t) = 0 = -0{,}06t + 0{,}2 \Rightarrow t = 3{,}33$ Std.
$P_W(3{,}33 \mid 2{,}40)$
Nach ca. 3 Std und 20 Min. verlangsamt sich die die Zunahme der Konzentration im Blut.



d) 10 % von der Höchstkonzentration von 5,33mg/l im Blut sind 0,533mg/l. Man stellt die Gleichung mit der Konzentrationsfunktion f auf und löst diese mit dem GTR. Evtl. genügt es schon, zum gegebenen f(t)-Wert von 5,33 den zugehörigen t-Wert dem Graphen zu entnehmen. Es wird aber empfohlen, die Gleichung zu lösen.
Nach ca. 13 Std. und 40 Min. liegt nur noch 10 % der Höchstkonzentration vor.
(Dies kann eine wichtige Information für Arzt und Patient sein.)

$0{,}533 = -0{,}01t^3 + 0{,}1t^2 + 0{,}5t$
$0 = t^3 - 10t^2 - 50t + 53{,}3$
$\Rightarrow t = 13{,}43$

Übung

In einer schlecht isolierten Werkstatt erhitzt sich im Sommer die Temperatur am Tage wie in der Tabelle angeben (Durchschnittswerte)

Uhrzeit t in Std.	8:00	10:00	12:00	14:00	16:00	18:00
Zeit in Std. nach 8:00 Uhr						
Temperatur in ^{0}C	17	22	26	27	25	18

a) Füllen Sie die Zeile „Stunden nach 8.00 Uhr“ aus.
b) Wie lautet die ganzrationale Funktion der Form $f(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$; ($a_3 < 0$; $a_0 \neq 0$). Es ist ratsam, mindestens zwei Rechnungen durchzuführen (2 Funktionen).
Erklären Sie, warum Sie zu verschiedenen Ergebnissen kommen?
c) Berechnen Sie den jeweiligen Hochpunkt, skizzieren Sie den Graphen und deuten Sie das erhaltene Ergebnis.
d) Erklären Sie, warum die mathematisch berechneten Werte mit den empirisch ermittelten nicht übereinstimmen müssen.

Aufgaben 7.5

1. Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 10$; $D_{ök}=[0, 7]$.
a) Ermitteln Sie das Minimum der Grenzkosten.
b) Bestimmen Sie das Betriebsminimum. Berechnen Sie auch die kurzfristige Preisuntergrenze.
c) Skizzieren Sie die Funktionen in einem Schaubild.

2. Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 9x^2 + 28x + 25$.

a) Berechnen Sie Betriebsminimum und Betriebsoptimum sowie die kurz- und langfristige Preisuntergrenze.
b) Bestimmen Sie Schnittstellen der Stückkostenfunktion mit der Grenzkostenfunktion sowie der variablen Stückkostenfunktion mit der Grenzkostenfunktion.
c) Skizzieren Sie die Graphen von K, K´, k_V und k in einem Schaubild.

3. Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 4x^2 + 8x + 10$. $D_{ök} = [0, 7]$.
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion und stellen Sie K und K´ in einem Schaubild dar.
b) Ermitteln Sie das Minimum der Grenzkostenfunktion K´ und beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Grenzkosten- und Kostenfunktion.
c) Stellen Sie auch den Zusammenhang zwischen der Kostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion her (Schaubild), indem Sie das Betriebsoptimum und das Betriebsminimum bestimmen.

4. Gegeben ist die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ im Intervall $D_{ök}$ $x \in [0, 4]$.
a) Ermitteln Sie die Grenzkostenfunktion und das Minimum der Grenzkosten.
b) Berechnen Sie die Funktionen der Stückkosten und der variablen Stückkosten sowie die kurzfristige Preisuntergrenze.
c) Stellen Sie die Situationen aus a) und b) Graphisch dar.

5. Aufgrund einer Strukturänderung eines Betriebes hat sich folgende Kostensituation in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl ergeben.

x	0	1	2	3
K(x)	20	42	52	56

a) Ermitteln Sie aus den vorliegenden Daten die Kostenfunktion K als Funktion 3. Grades.
b) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion K´ und das Minimum der Grenzkosten. Wie hoch sind an dieser Stelle die Stückkosten k?
c) Berechnen Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

6. Ein Betrieb erzielt für ein Produkt einen fest vorgegebenen Marktpreis von 121,00 GE. Die Funktion der variablen Stückkosten dieses Betriebes hat die folgende Gleichung:
$k_v(x) = 0{,}02x^2 - 3x + 175$. Die Fixkosten werden mit 540 GE angegeben.
a) Entwickeln Sie die Funktion der Gesamtkosten.
b) Berechnen Sie die Gewinngrenze des Betriebes, wenn bekannt ist, dass die Gewinnschwelle bei $x = 30$ liegt.
c) Bei welcher Produktionsmenge wird der höchstmögliche Gewinn erzielt? Wie hoch ist dieser?
d) Die Grenzkostenfunktion eines anderen Produkts hat die Gleichung $K'(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Bei der Produktion von 2 ME fallen insgesamt 23 GE an. Wie hoch sind die Fixkosten?

7. Die Gesamtkostenfunktion eines Unternehmens lautet $K(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 3x + 13$.

a) Leiten Sie aus dieser Funktion die Grenzkostenfunktion, die Stückkostenfunktion, die Funktion der variablen Stückkosten ab.

b) Welche Menge bietet das Unternehmen im Betriebsminimum an? Wie hoch sind bei dieser Menge die Grenzkosten und die variablen Stückkosten?

c) Das in dem Unternehmen erstellte Erzeugnis wird am Markt mit einem Preis von 8,5 GE abgesetzt. Welche Menge wird der Unternehmer anbieten, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? Wie hoch ist dieser Gewinn?

8. Aufgrund einer Kostenanalyse liegen einem Betrieb die folgenden Angaben vor:
Die Entwicklung der Kosten in Abhängigkeit der Produktionsmenge kann durch eine Funktion dritten Grades beschrieben werden. Darüber hinaus ist bekannt, dass Fixkosten in Höhe von 20 GE anfallen. Bei einer Produktionsmenge von 5 ME fallen Gesamtkosten in Höhe von 125 GE an. Die Grenzkosten betragen bei dieser Stückzahl 66 GE. Das Minimum der Grenzkosten wird bei $x = \frac{1}{3}$ erreicht.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gesamtkosten auf. Führen Sie eine Probe durch.

b) Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion mit der Gleichung $K(x) = x^3 - x^2 + x + 20$ streng monoton wächst. Skizzieren Sie den Graphen der Gesamtkostenfunktion.

9. Ein Produkt wird am Markt mit 18 GE pro Stück abgesetzt. Der Betrieb arbeitet mit der Gewinngleichung $G(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2 + 14x - 18$.

a) Berechnen Sie das Gewinnmaximum.

b) Entwickeln Sie aus diesen Angaben die Kostenfunktion.

c) Berechnen Sie das Minimum der Grenzkosten.

10. Begründen Sie, warum die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 2x + 50$ nicht sinnvoll für die Beschreibung eines Gesamtkostenverlaufs geeignet ist. Legen Sie gegebenenfalls eine Graphik an.

11. Für die Produktion eines Produktes stehen zwei Fertigungsverfahren I und II zur Verfügung. Dabei gilt für das Verfahren I die Kostenfunktion $K_I(x) = 0{,}2x^3 - x^2 + 3x + 50$ und für das Verfahren II die Funktion $K_{II}(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}5x^2 + x + 50$.

a) Für welchen Produktionsbereich ist das Verfahren I und für welchen das Verfahren II kostengünstiger?

b) Bei welcher Produktionsmenge ist der Kostenunterschied am größten?

c) Veranschaulichen Sie die Situation an einem Schaubild.

12. In der Tabelle sind die Lufttemperaturen in den Jahreszeiten Frühling, Sommer Herbst und Winter in einer norddeutschen Stadt im langjährigen Mittel aufgezeichnet. $t \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Jahreszeit (t)	Frühling (1)	Sommer (2)	Herbst (3)	Winter (4)
langj. Mittel	9,0	22	9,0	5,0

a) Übertragen Sie die Daten in ein Koordinatensystem. Als mathematisches Modell diene eine ganzrationale Funktion der Form $f(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0.
b) Berechnen Sie im Intervall $t \in [1, 4]$ die höchste- und die niedrigste Temperatur.
c) Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen von f im Intervall $t \in [1, 4]$.
d) Erklären Sie, warum die mathematisch berechneten Werte nicht mit den empirisch ermittelten übereinstimmen.

13. Einem Patient wird ein Medikament durch eine intravenöse Injektion zugeführt. Dabei wird zunächst eine Zunahme des Blutspiegels – auch als Invasion bezeichnet – und dann eine Abnahme des Blutspiegels – auch als Elimination bezeichnet – festgestellt. Es werden folgende Werte gemessen:

Zeit t in Stunden	0	2	4	10
Konzentration im Blut in mg/l	0	19,2	21,6	0

Als Modell der Blutspiegelkurve diene die ganzrationale Funktion $f(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t$.
a) Ermitteln Sie die Funktion im Intervall $t \in [0, 10]$.
b) Ermitteln Sie Hoch-, Tief- und Wendepunkt des Graphen von f.
c) Nach welcher Zeit ist nur noch 1 % der Höchstkonzentration im Blut?
d) Skizzieren den Graphen von f.

14. Bei der Fotosynthese produzieren Pflanzen Sauerstoff, den sie im Laufe eines Tages an ihre Umgebung abgeben. Betrachtet man diesen Vorgang an einem Baum zwischen Sonnenaufgang 6 Uhr und Sonnenuntergang 18 Uhr, so kann der Kurvenverlauf mit Hilfe des mathematischen Modells $\mathbf{V(t) = at^3 + bt^2}$ näherungsweise beschrieben werden. $(0 \le t \le 12)$
Folgende Ergebnisse wurden gemessen:

t	0	4	8	12
V(t)	0	336	1088	1872

Dabei gibt t an, wie viel Stunden seit dem Sonnenaufgang um 6 Uhr vergangen sind und V(t) gibt an wie viel Liter Sauerstoff der Baum bis zum Zeitpunkt t *insgesamt* produziert hat.
a) Ermitteln Sie die Koeffizienten a und b mit Hilfe der gemessenen Werte und skizzieren Sie den Graphen. (Maßstab; Abzisse: 1 cm $\cong$ 2 Stunden; Ordinate: 2 cm $\cong$ 500 Liter)
b) Bestimmen Sie die Sauerstoffproduktion bis 14 Uhr. Wie viel Sauerstoff gibt der Baum zwischen 12 und 15 Uhr durchschnittlich ab?
c) Ermitteln Sie den Wendepunkt des Graphen von V und berechnen Sie den Zeitpunkt t, wann der Baum den meisten Sauerstoff abgibt. Begründen Sie die Lösung. Berechnen Sie die Steigung im Wendepunkt des Graphen von f.