1.3 Lösbarkeitsuntersuchungen von linearen Gleichungssystemen

Bisher wurden LGS behandelt, die mithilfe des gaußschen Algorithmus bzw. des GTR eindeutig lösbar sind. Nun soll untersucht werden, welche Resultate der gaußsche Algorithmus bzw. der GTR für solche LGS liefert, die nicht bzw. nicht eindeutig lösbar sind.

► Beispiele:

Untersuchen Sie die LGS mithilfe des gaußschen Algorithmus auf ihre Lösbarkeit.

1.
1. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$
2. $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$
3. $3x_1 + 11x_2 - 7x_3 = 6$

2.
1. $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1$
2. $3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 1$
3. $4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7$

▼ Lösung:

1.

	x_1	x_2	x_3		
1.	1	2	−1	3	| · (−2) | · (−3)
2.	2	−1	2	8	8
3.	3	11	−7	6	

1.	1	2	−1	3	
2.		−5	4	2	| 2. Zeile + 3. Zeile
3.		5	−4	−3	

1.	1	2	−1	3
2.		−5	4	2
3.		**0**	**0**	**−1**

0 = −1 Widerspruch

Gleichung **3** des Dreieckssystems wird auch als Widerspruchszeile bezeichnet. Es gibt für x_1, x_2, x_3 keine Lösung. Damit ist auch das ursprüngliche LGS **unlösbar.**

2.

	x_1	x_2	x_3		
1.	2	1	−4	1	| · (−1,5) | · (−2)
2.	3	2	−7	1	
3.	4	−3	2	7	

1.	2	1	−4	1	
2.		0,5	−1	−0,5	| · 10
3.		−5	10	5	

1.	2	1	−4	1
2.		0,5	−1	−0,5
3.		**0**	**0**	**0**

Gleichung **3** des Dreieckssystems wird als Nullzeile bezeichnet. Sie ist für alle beliebigen Werte von x_1, x_2, x_3 lösbar. Sie trägt nicht zur Lösung bei und könnte auch weggelassen werden. Es verbleiben **2** Gleichungen mit **3** Variablen. Beim weiteren Lösen des LGS geht man so vor, dass man eine Variable, z. B. x_3, frei wählt und das LGS dann zeilenweise löst.

Gewählt: $x_3 = \mathbf{t}$ $(t \in R)$
Gleichung 2.: $0{,}5x_2 - t = -0{,}5 \;\Rightarrow\; x_2 = \mathbf{2t - 1}$
Gleichung 1.: $2x_1 + (2t - 1) - 4t = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 1 + \mathbf{t}$

Man erhält für jeden Wert des freien **Parameters t** genau **eine** Lösung für x_1, x_2, x_3. Man sagt, das LGS hat eine **einparametrige unendliche Lösungsmenge.**

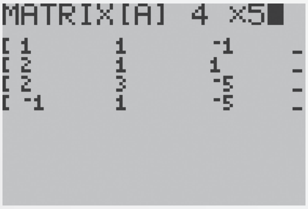
$\mathbf{L = \{(t + 1,\ 2t - 1,\ t)\}}$

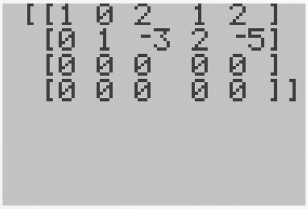
► Beispiel:

Ermitteln Sie die Lösung(en) des folgenden LGS mit dem GTR.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 &= -11 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= -7 \end{aligned}$$

Mit MATRIX und EDIT gibt man unter MATRIX A die Zeilenzahl 4, die Spaltenzahl 5 sowie die Koeffizienten ein.





Von dem LGS mit den Variablen $x_1, \ldots, x_4$ bleiben nur zwei nichttriviale Zeilen (keine Nullzeilen) übrig. Die beiden letzten Zeilen 3. und 4. könnten ersatzlos gestrichen werden.

Um beim LGS zu einer Lösung zu kommen, müssen zwei Variable, z. B. x_3 und x_4, durch Parameter, z. B. r und t, „ersetzt" werden. Man stellt beide Gleichungen nach x_1 bzw. x_2 um und ermittelt die Lösungsmenge L.

Gewählt: $x_3 = r$ und $x_4 = t$ $(r, t \in \mathbb{R})$
Gleichung 1: $x_1 + 2r + t = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = \mathbf{2 - 2r - t}$
Gleichung 2.: $x_2 - 3r + 2t = -5 \;\Rightarrow\; x_2 = \mathbf{-5 + 3r - 2t}$

Man spricht in diesem Fall von einer **zweiparametrigen unendlichen Lösungsmenge.**

Lösungsmenge: $\mathbf{L = \{(2 - 2r - t;\ -5 + 3r - 2t;\ r;\ t)\}}$

Eine ganz spezielle Lösungsmenge L erhält man, wenn man z. B. für $r = 1$ und $t = -1$ einsetzt.

$\mathbf{L = \{(1;\ 0,\ 1;\ -1)\}}$

Zusammenfassend kann folgende Vorgehensweise zur Lösung von LGS angegeben werden:

<table>
<tr><td colspan="3">LGS in die Normalform überführen, ganzzahlige Koeffizienten erzeugen und soweit möglich gaußschen Algorithmus anwenden.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Prüfen, welche der folgenden Eigenschaften das umgeformte LGS besitzt:</td></tr>
<tr><td>Die Anzahl der Variablen ist gleich der Anzahl der von null verschiedenen Zeilen.</td><td>Die Anzahl der Variablen ist größer als die Anzahl der von null verschiedenen Zeilen.</td><td>Im LGS entsteht eine Widerspruchszeile.</td></tr>
<tr><td>Das LGS ist eindeutig lösbar.
Die einzige Lösung wird durch „Aufrollen" der neuen Gleichungen bestimmt.</td><td>Das LGS hat unendlich viele Lösungen.
Die freien Parameter werden gewählt. Die Parameterdarstellung der Lösungsmenge wird ermittelt.</td><td>Das LGS ist unlösbar.</td></tr>
</table>

Anmerkungen:

- Gilt für eine Matrix n = m, so heißt die Matrix **quadratisch.**
  Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ einer quadratischen A_{nn} = Matrix heißen Diagonalelemente, sie bilden die Diagonale der Matrix A_{nn}.

  $$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Werden bei einer Matrix Zeilen und Spalten vertauscht, so heißt die neue Matrix **transponierte Matrix A^T**. (Für einen Vektor gilt Entsprechendes, für die Zeile bzw. Spalte, Seite 26.)

  $$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; \; {A_{32}}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Im Folgenden sind einige wichtige Spezialfälle von Matrizen und Vektoren aufgeführt.

Merke

Eine Matrix, deren Elemente alle null sind, heißt **Nullmatrix** A = 0.	$A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Gleiches gilt für Vektoren. Sind alle Komponenten eines Vektors null, so spricht man von einem **Nullvektor.**	$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \; \vec{0}^{\,T} = (0, \dots, 0)$
Sind in einer quadratischen Matrix nur die Diagonalelemente ungleich null und alle anderen Elemente null, so spricht man von einer **Diagonalmatrix.**	$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$
Eine Diagonalmatrix, deren Elemente alle gleich eins sind, heißt **Einheitsmatrix.** Zu jeder quadratischen Matrix gibt es eine Einheitsmatrix.	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
Gleiches gilt für Vektoren. Vektoren, von denen genau eine Komponente 1 ist und die anderen Komponenten 0 sind, heißen **Einheitsvektoren.**	$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; \; \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$

► Beispiel:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -4 \\ 6 & 18 & -2 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie von der gegebenen A_{33}-Matrix die Diagonalelemente und transponieren Sie die Matrix.

▼ Lösung:

Diagonalelemente: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 18$, $a_{33} = 0$; transponierte Matrix: ${A_{33}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 12 & 18 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Übungen

Ü1 Der Klassenlehrer einer Klasse 12 notiert in einer Matrix den aktuellen Notenstand zur Halbjahreskonferenz aller 21 Schülerinnen und Schüler in den Hauptfächern Wirtschaftslehre, Deutsch, Mathematik und Englisch. Die ersten fünf Schülerinnen und Schüler des Alphabets der Klasse 12 erzielten in der Reihenfolge der angegebenen Fächer die folgenden Noten: Astrid: 2, 3, 4, 2; Bertram: 3, 2, 3, 1; Carlo: 1, 2, 5, 4 ; Danny: 3, 3, 3, 3 und Elvira: 4, 1, 2, 2.

a) Entwickeln Sie aus diesen Angaben die Matrix A.

b) Geben Sie auch die zu A gehörige transponierte Matrix A^T an.

Ü2 Ein Betrieb produziert aus drei Rohprodukten $R_1 \dots R_3$ zwei Endprodukte E_1 und E_2. Stellen Sie den Sachverhalt in einer Matrix M dar, wenn gilt: $R_1E_1 = 2$, $R_1E_2 = 4$, $R_2E_1 = 4$, $R_2E_2 = 3$, $R_3E_1 = 2$ und $R_3E_2 = 2$.

Aufgaben 2.1

A1 In einem Lernbüro einer Handelsschulklasse werden an drei Verkaufsständen Schreibzeug, Schreibpapier (DIN A4 und DIN A5) gebrauchte Schulbücher und Disketten verkauft. Die Tabelle zeigt die Verkaufszahlen während der Aktion.

Stand	Schreibzeug	Schreibpapier	Schulbücher	Disketten
1	28	26	14	40
2	25	22	18	62
3	31	30	12	33

Stellen Sie die Tabelle als 3×4-Matrix dar.

A2 In den drei Hautcremes Agua, Beluso und Cienta sind die Substanzen Carotin, Nussöl und Kräuter enthalten. Agua enthält 40 g Carotin, 20 g Nussöl und 80 g Kräuterextrakte, Beluso kommt auf 60 g Carotin, 50 g Nussöl und 15 g Kräuter und Cienta enthält je 30 g Carotin und Nussöl, aber keine Kräuterextrakte. Stellen Sie diese Angaben in einer Matrix zusammen.

A3 Transponieren Sie die folgenden Vektoren und Matrizen. Ermitteln Sie bei den Matrizen das Diagonalelement.

$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ -34 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 180 \\ 540 \\ 380 \end{pmatrix}$; $\vec{b}_3 = (1 \;\; b \;\; 3)$; $A = \begin{pmatrix} 15 & 26 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

A4 In einem Betrieb wird das Produkt A auf den Maschinen I mit 10 Minuten/Stück, Maschine II mit 5 Min./Stück und Maschine IV mit 15 Minuten je Stück bearbeitet. Die Durchlaufzeiten des Produktes B betragen je Stück: 12 Minuten auf Maschine I, 8 Minuten auf Maschine III und 12 Minuten auf Maschine IV. Erstellen Sie eine Matrix der Durchlaufzeiten (Prozessmatrix).

A5 Schreiben Sie die *Körpergröße* in cm und das *Gewicht* in g von 4 Säuglingen in eine Matrix. Sarah 51/3500, Felix 52/3350, Aron 48/3600 und Lisa 50/3050. Bezeichnen Sie die Matrix.

3 Matrizen in Ökonomie und Prozessen

3.1 Das Leontief-Modell

Die volkswirtschaftliche Gesamtrechnung liefert bedeutende Informationen für Forschung, Unternehmenspolitik und Volkswirtschaftspolitik.

Es ist in einer Volkswirtschaft – aber auch zur innerbetrieblichen Kosten- und Leistungsberechnung – unerlässlich, sich bei Untersuchungen und Erklärungen gesamtwirtschaftlicher Zusammenhänge auf statistisch ermittelte Zahlen zu beziehen.

Um die Kreisläufe und Beziehungen in der Volkswirtschaftslehre wiederzugeben, bedient man sich grafischer, kontenmäßiger oder algebraischer Darstellungsformen. Alle diese Darstellungsformen haben den Nachteil, bei zunehmendem Umfang unübersichtlich zu werden.

Mithilfe einer **Matrix** kann man die Ströme von Geld, Gütern und Dienstleistungen überschaubarer wiedergeben.

Beim **Leontief-Modell** wird die „gesamte" Ökonomie in einer einzigen **Matrix (Input-Output-Tabelle)** dargestellt. Man sagt, das Leontief-Modell verbindet Wirtschaftstatsachen (Wirtschaftsdaten) mit der Wirtschaftstheorie.

So ist bekannt, dass das Deutsche Institut für Wirtschaftsforschung in den siebziger Jahren mithilfe des Leontief-Modells den Ölpreisschock auf die Preisentwicklung voraussagen konnte und so der Politik bei der Inflationsbekämpfung nützlich wurde.

Input-Output-Tabellen sind heute ein wesentlicher Bestandteil der amtlichen Statistiken in allen Industrieländern. Erst durch genaue Input-Output-Tabellen erhält man ein Bild von den Verflechtungen in der Volkswirtschaft. Dabei heißt INPUT: Einsatz von Leistungen und OUTPUT: Produktionsergebnis.

Das Statistische Bundesamt in Wiesbaden erstellt u. a. für jedes Jahr die Input-Output-Tabelle für die Bundesrepublik Deutschland nach einem bestimmten Schema. Dieses Schema (Tabelle, Matrix) wäre für dieses Lehrbuch zu umfangreich, sodass es nur zu einem geringen Teil wiedergegeben wird.

Auszug aus der

Aufkommens-und Verwendungstabelle 1995 der Input-Output-Rechnung

Produktionswerte der Wirtschaftsbereiche zu Herstellungspreisen in Mrd DM

Lfd. Nr.	Gegenstand der Nachweisung (Dienstleistungen)	Land- und Forstwirtschaft, Fischerei 1	Bergbau, Gewinnung von Steinen u. Erden, Energie- u. Wasserversorgung 2	...	Metallerzeugung u. Bearbeitung 4	Maschinen- u. Fahrzeugbau, DV-Geräte, Elektrotechnik 5	...	Ernährungsgewerbe 7	...	zusammen 1-13	Konsum-Abgaben 14
1	Land-u. Forstwirtschaft, Fischerei	2,8	0,1	...	-	0,1	...	70,7	...	88,2	38,0
2	Bergbau, Gewinnung von Steinen u.Erden, Energie- u.Wasserversorgung	3,0	27,2	...	14,5	9,7	...	5,3	...	152,8	68,6
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4	Metallerzeugung u. Bearbeitung	1,0	4,1	...	88,8	88,6	...	3,7	...	247,9	13,1
5	Maschinen- u. Fahrzeugbau, DV-Geräte, Elektrotechnik	3,1	9,8	...	12,4	233,5	...	2,3	...	373,4	176,8
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
7	Ernährungsgewerbe	9,1	0,1	...	0,1	0,5	...	45,3	...	110,1	293,0
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
13	Alle Gütergruppen	43,6	84,1		163,5	489,0		177,7		3180,3	1957,5

Eine Input-Output-Tabelle heißt ausgeglichen, wenn z. B. der gesamte Output eines Sektors gleich der Summe aus dem sektoriellen Verbrauch und der Gesamtnachfrage ist.

An einem einfachen Beispiel soll das Leontief-Modell erklärt werden.

► Beispiel:

Eine Volkswirtschaft bestehe aus den Sektoren Landwirtschaft, Industrie sowie Energieerzeugung und den Konsumenten.

Verbraucher (Output) / *Produzenten (Input)*	Landwirtschaft	Industrie	Energie-erzeugung	Konsum	Gesamt-produktion
Landwirtschaft	4	3	1	3	11
Industrie	2	1	5	7	15
Energieerzeugung	5	10	4	6	25

Die **Matrizenzeilen** sind wie folgt zu interpretieren:

Die **Landwirtschaft** produziert während einer Produktionsperiode insgesamt 11 ME. Davon verbraucht die Landwirtschaft 4 ME für den eigenen Bedarf. 3 ME liefert die Landwirtschaft an die Industrie und 1 ME an die Energieerzeugung. Die restlichen 3 ME ($11 - 4 - 3 - 1 = 3$) werden an den Konsum abgegeben.

Die **Industrie** produziert während einer Produktionsperiode insgesamt 15 ME. Davon liefert sie 2 ME an die Landwirtschaft (z. B. landwirtschaftliche Maschinen), benötigt 1 ME für den eigenen Bedarf (z. B. Investitionsgüter für die Konsumgüterindustrie) und liefert 5 ME an die Energieerzeugung (z. B. Energie erzeugende Maschinen). Die restlichen 7 ME werden an den Konsum (z. B. Haushaltsgeräte) abgegeben.

Die **Energieerzeugung** produziert während einer Produktionsperiode insgesamt 25 ME. Davon liefert sie an die Landwirtschaft 5 ME, an die Industrie 10 ME und benötigt für den eigenen Bedarf 4 ME. Die restlichen 6 ME werden an den Konsum abgegeben.

Die **Matrizenspalten** sind wie folgt zu interpretieren:

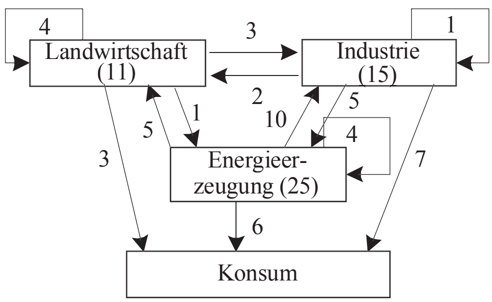
Die **Landwirtschaft,** die insgesamt 11 ME produziert, benötigt dazu von der Industrie 2 ME, von der Energieerzeugung 5 ME und 4 ME von sich selbst.

Die **Industrie,** die insgesamt 15 ME produziert, benötigt dazu von der Landwirtschaft 3 ME, von der Energieerzeugung 10 ME und 1 ME von sich selbst.

Die **Energieerzeugung,** die insgesamt 25 ME produziert, benötigt dazu von der Landwirtschaft 1 ME, von der Industrie 5 ME und 4 ME von sich selbst.

Neben der Tabellendarstellung können die Zusammenhänge der einzelnen Sektoren einer Volkswirtschaft in einem Verflechtungsdiagramm einem sogenannten **Gozintographen** (scherzhafte Darstellung südeuropäischer Aussprache des Satzes: "The part that **goes into"**) dargestellt werden.

In den **Kästen** sind die Sektoren Landwirtschaft, Industrie und Energieerzeugung mit den von ihnen insgesamt produzierten ME angegeben sowie der Konsum.
Der Pfeil bedeutet: „ … liefert an … “.
Der „Loop“ zeigt den Eigenbedarf an.



► Beispiel:

Gegeben ist die Input-Output-Matrix von Seite 61 mit geändertem Konsum. Zu berechnen ist die Gesamtproduktion aufgrund des neuen Konsums.

Input \ Output	A	B	C	Konsum	Gesamtproduktion
A	3	2	1	5	?
B	3	3	5	5	?
C	4	6	4	8	?

▼ Lösung:

Mit den bisherigen Kenntnissen über Matrizengleichungen wird das Problem zunächst allgemein gelöst. Auf Seite 55 wird die Matrizengleichung ermittelt.

$$A\,\vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{y} = \vec{x} - A\,\vec{x}$$

$$\vec{y} = (E - A)\,\vec{x} \quad |\cdot (E - A)^{-1}$$

$$\mathbf{(E - A)^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{x}}$$

Werden in dieser Gleichung beide Seiten mit der inversen Matrix $(E - A)^{-1}$ (von links, $(E - A)^{-1}(E - A) = E$) multipliziert, erhält man die Gleichung, mit der die Gesamtproduktion $\vec{x}$ zu bestimmen ist.Für das Beispiel bedeutet dies, dass zunächst die Matrix $E - A$ und daraus die inverse Matrix ermittelt werden muss.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{8} & \frac{1}{18} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{16} & \frac{5}{18} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{8} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{18} \\ \frac{-3}{10} & \frac{13}{16} & \frac{-5}{18} \\ \frac{-2}{5} & \frac{-3}{8} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix $(E - A)^{-1}$ wird mithilfe des GTR (Seite 38) errechnet.

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}39 & 0{,}26 \\ 1{,}14 & 1{,}73 & 0{,}7 \\ 1{,}45 & 1{,}03 & 1{,}76 \end{pmatrix}$$

Die Gesamtproduktion $\vec{x}$ wird mithilfe der Multiplikation ermittelt.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}39 & 0{,}26 \\ 1{,}14 & 1{,}73 & 0{,}7 \\ 1{,}45 & 1{,}03 & 1{,}76 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{12{,}78} \\ \mathbf{19{,}95} \\ \mathbf{26{,}48} \end{pmatrix}$$

Es werden für die neue Nachfrage von den Zweigwerken A: 12,78 ME; B: 19,95 ME und C: 26,48 ME benötigt.

Merke

Soll eine **vorgegebene Endnachfrage** $\vec{y}$ (z. B. Konsum) befriedigt werden, folgt aus der Multiplikation der Gleichung

$$\mathbf{\vec{y} = (E - A)\,\vec{x}}$$

von links mit der Inversen zu $E - A$ die erforderliche Gesamtproduktion $\vec{x}$.

$$\mathbf{\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}}$$

Die Matrix $\mathbf{(E - A)^{-1}}$ heißt **Leontief-Inverse.**

Anmerkung:

Enthält die Leontief-Inverse nur positive Elemente, lässt sich jede Nachfrage befriedigen.

Die Input-Output-Analyse lässt sich als hervorragendes wirtschaftspolitisches Orientierungs- und Programm-Modell einsetzen. Ist z. B. in einer späteren Periode eine Änderung eines oder mehrerer Sektoren in der Gesamtproduktion zu erwarten oder ist in der Zeit einer Rezession mit abweichendem Konsumverhalten in einem oder mehreren Sektoren zu rechnen, wird man dies im Leontief-Modell durch Einsetzen von Variablen bzw. Parametern, die dem jeweiligen Sektor zuzuordnen sind, zu berücksichtigen haben. Dabei ist häufig die Inputmatrix Ausgangspunkt mathematischer Berechnungen.

► Beispiel:

Gegeben ist die Inputmatrix A_{ij} dreier fusionierender Firmen A, B und C. Der derzeitige Gesamtproduktionsvektor ist durch $\vec{x} = (100\ 120\ 100)^T$ gegeben.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die vollständige Input-Output-Matrix.

b) In der kommenden Periode gibt A 20 ME und B 20 % seiner Produktion an den Markt ab. Die Firmen B und C produzieren gleich viele ME. Wie groß ist die Gesamtproduktion aller drei Unternehmen und wie hoch ist die Konsumabgabe?

c) Eine veränderte Nachfrage erfordert eine Umstellung der Produktion. Während die Nachfrage bei den Firmen A und C unverändert ist, muss bei B ein technologiebedingter Parameter k berücksichtigt werden: $\vec{y} = (20\ \ 10k - k^2\ \ 20)^T$. Für welchen Wert von k wird die Summe der Produktionsmengen maximal?

▼ Lösung:

a) Man erhält die einzelnen Inputproduktionszahlen durch Multiplikation der Inputkoeffizienten mit den zugehörigen Gesamtproduktionszahlen.

Input \ Output	A	B	C	Konsum	Gesamtproduktion
A	20	24	40	16	100
B	20	24	40	36	120
C	20	48	20	12	100

Z. B.: $a_{12} = \frac{A_B}{B} = 0{,}2 \Rightarrow AB = 120 \cdot 0{,}2 = 24.$

Der Konsum errechnet sich aus der Differenz von Gesamtproduktion und der Summe des Inputs.

b) In der kommenden Periode hat sich die Gesamtproduktion aller drei Unternehmen geändert und muss neu ermittelt werden. Dabei setzt man x_1 für die Gesamtproduktion der Firma A und x_2 für die Gesamtproduktion der Firmen B und C. Die Abgabe an den Konsum ist nur für A mit 20 ME bekannt. Firma B gibt 20 % an den Konsum ab. Die Konsumabgabe y_3 von C ist unbekannt.

$$(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0{,}2x_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation liefert ein LGS, mit dem die Werte für $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ und $\vec{y}_3$ berechnet werden.

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0{,}2x_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 20 &= 0{,}8x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}4x_2 \\ 0{,}2x_2 &= -0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 - 0{,}4x_2 \\ y_3 &= -0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 + 0{,}8x_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 20 &= 0{,}8x_1 - 0{,}6x_2 \\ 0 &= -0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \\ y_3 &= -0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 \end{aligned}$$

$x_1 = 100$ Einheiten; $x_2 = x_3 = 100$ Einheiten; $y_3 = 20$ Einheiten

3.2 Materialverflechtungen

Verflechtungsmodelle kommen in der Ökonomie und in einer ganzen Reihe von Industriezweigen zur Anwendung. Mit ihrer Hilfe werden ökonomische und technologische Systeme mit ihren gegenseitigen quantitativen Beziehungen und Abhängigkeiten veranschaulicht und mathematisch aufbereitet.

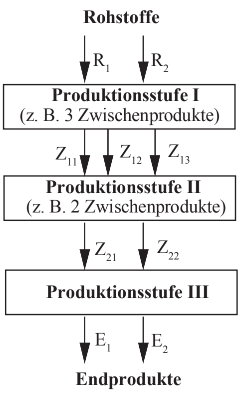
Da die gegenseitigen Beziehungen der Verflechtungsmodelle als linear angenommen werden, bezeichnet man sie auch als lineare Verflechtungsmodelle.

Im Abschnitt 2.2 werden Grundstrukturen von Verflechtungsmodellen behandelt.
In diesem Abschnitt wird der Gedanke erweitert. Außerdem wird die Ermittlung von Herstellungskosten untersucht.

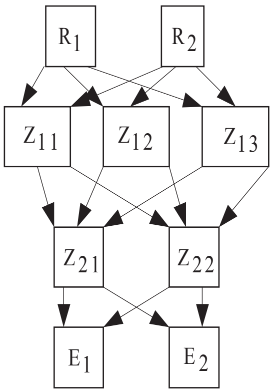
Dabei werden die Problemstellungen mithilfe von linearen Gleichungssystemen und der Matrizenrechnung (Matrizenmultiplikation und Matrizeninversion) gelöst.

Zur Veranschaulichung von linearen Verflechtungen dienen Flussbilder, Verflechtungsdiagramme und Verflechtungsstücklisten. Die Darstellungen zeigen z. B. einen mehrstufigen (je nach Anzahl der Zwischenstufen) Produktionsprozess.

Flussdiagramm



Verflechtungsdiagramme



Verflechtungsstücklisten

	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}
R_1			
R_2			

	Z_{21}	Z_{22}
Z_{11}		
Z_{12}		
Z_{13}		

	E_1	E_2
Z_{21}		
Z_{22}		

► Beispiel:

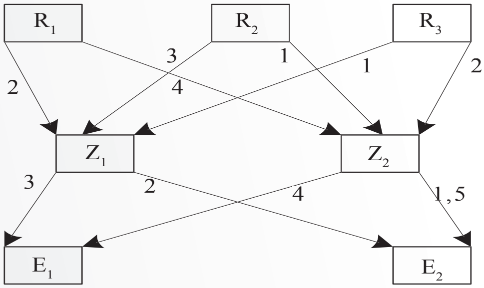
Eine Farbenfabrik stellt aus den Grundstoffen G_1, G_2 und G_3 zwei Grundtonfarben Z_1 und Z_2 und aus diesen zwei Farbgemische E_1 und E_2 her.

	Z_1	Z_2
G_1	2	4
G_2	3	1
G_3	1	2

	E_1	E_2
Z_1	3	2
Z_2	4	1,5

a) Skizzieren Sie den Gozintographen und ermitteln Sie den Grundstoffeinsatz je Einheit der Endprodukte E_1 und E_2.
b) Berechnen Sie für den Produktionsausstoß $\vec{p} = (20\ 15)^T$ den gesamten Produktionsbedarf an den jeweiligen Grundstoffen.
c) 5 % vom Produktionsbedarf werden zusätzlich gelagert. Berechnen Sie den Lagerbestand und den Gesamtbedarf.

▼ Lösung:



a) Es handelt sich um einen **zweistufigen** Produktionsprozess. Die obere Stückliste (Matrix A = (R,Z)) gibt den Rohstoffbedarf an, der zur Erzeugung einer Einheit der Zwischenprodukte benötigt wird. Die andere Stückliste (Matrix B = (Z,E)) gibt den Bedarf an Zwischenprodukten an, die zur Erzeugung einer Einheit der Endprodukte nötig sind.

Mithilfe der Matrizenmultiplikation C = A · B wird der Rohstoffeinsatz berechnet, der für die Erstellung einer Einheit des Endproduktes erforderlich ist.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{22} & \mathbf{10} \\ \mathbf{13} & \mathbf{7{,}5} \\ \mathbf{11} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

b) Zu berechnen ist der Vektor $\vec{r}$ des Gesamtbedarfs an Rohstoffen bei einem Produktionsausstoß $\vec{p}$. Es werden 590 ME von R_1, 372,5 ME von R_2 und 295 ME von R_3 benötigt, um 20 ME des Endproduktes E_1 und 15 ME des Endproduktes E_2 zu erstellen.

$$\vec{r} = C \cdot \vec{p} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 22 & 10 \\ 13 & 7{,}5 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{590} \\ \mathbf{372{,}5} \\ \mathbf{295} \end{pmatrix}$$

c) Lagerbestand L_R und Gesamtbedarf G_R an Rohstoffen sind unmittelbar zu ermitteln.

$$L_R = \begin{pmatrix} \mathbf{29{,}5} \\ \mathbf{18{,}63} \\ \mathbf{14{,}75} \end{pmatrix}; \quad G_R = \begin{pmatrix} \mathbf{619{,}50} \\ \mathbf{391{,}13} \\ \mathbf{309{,}75} \end{pmatrix}$$

Merke

Werden aus Rohstoffen R_n über verschiedene Zwischenprodukte Z_n bestimmte Endprodukte E_n hergestellt, kann dies mithilfe von **Verflechtungsmatrizen** A, B und C berechnet werden.

$$\mathbf{A \cdot B = C}$$

Dabei gilt: $\mathbf{A = (R, Z)_{(m,n)}}$ Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix
$\mathbf{B = (Z, E)_{(n,p)}}$ Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix
$\mathbf{C = (R, E)_{(m,p)}}$ Rohstoff-Endprodukt-Matrix

Der Verbrauchsvektor $\vec{\mathbf{r}} = (\mathbf{r_1\ r_2\ r_3})^T$ gibt den Verbrauch an Rohstoffen an.

Der Produktionsvektor $\vec{\mathbf{z}} = (\mathbf{z_1\ z_2\ z_3})^T$ gibt die Produktion von Zwischenprodukten an.

Der Produktionsvektor $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p_1\ p_2\ p_3})^T$ gibt die Produktion von Endprodukten an.

Es gilt: $\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{B} \cdot \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{z}} \qquad \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}}$

Anmerkungen:

– Die Zeilenzahl von B muss mit der Spaltenzahl von A übereinstimmen.

– Die Zeilenzahl von C muss mit der Zeilenzahl von A übereinstimmen.

– Es wird vorausgesetzt, dass die Rohstoffe nur über die Produktion der Zwischenprodukte in die Endprodukte eingehen.

3.3 Markoffsche Prozesse

In Kapitel 2 werden Prozesse betrachtet, bei denen Zusammenhänge zwischen Produktionen (Leontief-Modell) oder neuen Produkten (Materialverflechtungen) mathematisch untersucht werden. Im folgenden Kapitel sollen Prozesse betrachtet werden, bei denen nichts Neues entsteht, sondern sich nur ein bestehender Zustand ändert. Dabei wendet man die bekannten Matrizenoperationen wie Multiplikation, Lösen linearer Gleichungssysteme, Skalarprodukt usw. an.

Kenntnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden nur in geringem Umfang benötigt. Es hilft hier in der Regel schon die Deutung von Wahrscheinlichkeiten als Prozentsätze.

Bevor die Besonderheit von Matrizen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Einzelnen behandelt wird, soll einiges Grundlegendes an einem Beispiel dargestellt werden.

► Einführungsbeispiel: Bevölkerungsentwicklung

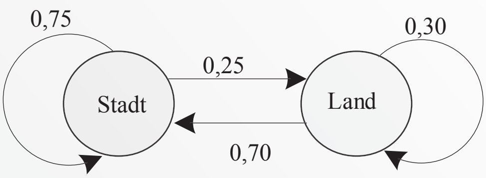
Eine Kommission, die die jährlichen Bevölkerungswanderungen zwischen Stadt und Land in einer brasilianischen Provinz untersucht hat, ist nach längerer Beobachtung zu dem Ergebnis gekommen, dass die „Landflucht“ immer mehr zunimmt. Folgende Näherungswerte sind im Einzelnen ermittelt worden.
30 % der Landbevölkerung wollen weiterhin auf dem Land leben.
70 % beabsichtigen, in die Stadt zu wechseln.
75 % der Stadtbevölkerung wollen weiterhin in der Stadt leben und 25 % beabsichtigen, aufs Land zu ziehen.

a) Berechnen Sie die Bevölkerungsentwicklung nach z. B. ein, zwei, … , zehn Jahren.
b) Berechnen Sie die Bevölkerungsentwicklung nach z. B. ein, zwei, … , zehn Jahren, wenn sich zu Beginn des Beobachtungszeitraumes 40 % der Bevölkerung auf dem Lande und 60 % der Bevölkerung in der Stadt befinden.

▼ Lösung:

a) Man erstellt aus den Daten eine Matrix A – auch als **Übergangsmatrix** A bezeichnet –, aus der die Bevölkerungswanderungen abzulesen sind. Oder anders formuliert, die Matrix für „Land” und „Stadt” beschreibt einen (aktuellen) Zustand. Da die Gesamtzahl der „wandernden“ Menschen gleich bleibt und nur ein Austausch stattfindet, spricht man auch von einem **Austauschprozess.**

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Land} \\ \text{Stadt} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Land} & \text{Stadt} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}70 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} \end{array}$$

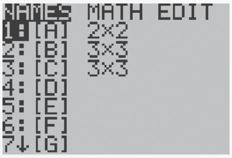


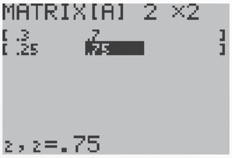
Die Ansiedlung der Menschen nach einem, zwei, …, zehn Jahren wird durch schrittweise Berechnung wie $A \cdot A = A^2$ nach einem Jahr bzw. $A \cdot A \cdot A = A^3$ nach zwei Jahren usw. ermittelt.

D. h., durch wiederholte Multiplikation der Matrix A mit sich selbst kann der Bevölkerungsanteil nach z. B. ein, zwei bzw. zehn Jahren errechnet werden. Durch weitere Rechnungen kann man den langfristigen Trend ermitteln. (Die Berechnungen wurden mit mathematischer Software durchgeführt.)

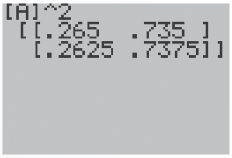
Einsatz des GTR

Eingabe der Matrizen A über 2ND MATRIX und NAMES MATH EDIT. Dann wird über NAMES MATH EDIT die Matrix von A aufgerufen. Die Matrix von A wird dann mit A^2 bzw. A^{10} aufgerufen und mit jeweils ENTER das Ergebnis ermittelt.

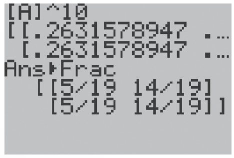




nach 2 Jahren



nach 10 Jahren



Nach ca. 10 Jahren werden ca. **26 %** auf dem Land und **74 %** in der Stadt leben, wenn sich die Voraussetzungen nicht geändert haben. Man erkennt an den geringfügigen Änderungen, dass sich schon nach relativ kurzer Zeit ein stabiler Zustand einstellt. Das sich einstellende Gleichgewicht ist voraussehbar.

Auch durch weitere Multiplikationen würden sich die ersten vier Stellen nach dem Komma nicht ändern. Auch nicht, wenn n über alle Grenzen wachsen würde. Man bezeichnet die Matrix A^∞ als **Grenzmatrix** von A und die Verteilung als **Grenzverteilung.**

$$\lim_{n \to \infty} A^n = A^\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}263} & \mathbf{0{,}736} \\ \mathbf{0{,}263} & \mathbf{0{,}736} \end{pmatrix} \quad \text{(Grenzmatrix von A)}$$

b) Wie verhält sich die Bevölkerungsentwicklung, wenn von einem bestimmten Anfangsbestand – auch als **Anfangsverteilung V^0** bezeichnet **(0,4 0,6)** – ausgegangen werden kann? Um bei der Ermittlung eines Zustandes (V^1, V^2, … , V^{10}) nicht immer den unmittelbar vorherigen Zustand berücksichtigen zu müssen, verwendet man bei weiteren Berechnungen das Produkt Anfangszustand mal Übergangsmatrix($V^0 \cdot A^n$).

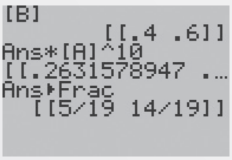
$$V^1 = (0{,}4 \;\; 0{,}6) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}70 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = (0{,}282 \;\; 0{,}718)$$

$$V^2 = (0{,}282 \;\; 0{,}718) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}70 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = (0{,}2725 \;\; 0{,}7274) = (0{,}4 \;\; 0{,}6) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}70 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}^2 = (0{,}2631 \;\; 0{,}7368)$$

$$V^{10} = (0{,}4 \;\; 0{,}6) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}70 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}^{10} = \mathbf{(0{,}2631 \;\; 0{,}7368)}$$

Die Berechnung der Verteilungen nach zwei bzw. zehn Jahren zeigt, dass sich der gleiche Zustand einstellt, wie er sich auch ohne Berücksichtigung der Anfangsverteilung ergeben hat. (26 % leben auf dem Land und 74 % leben in der Stadt.)

Nach 10 Jahren (GTR):



Wird bei langfristigen Entwicklungen immer die gleiche stochastische Matrix A (wie oben) verwendet, spricht man von einer **markoffschen Kette.**

Merke

Eine Matrix **A** heißt **stochastische Matrix,** wenn gilt:

1. Sie ist quadratisch.
2. Für jedes Element gilt $0 \leq a_{ij} \leq 1$.
3. Die Summe der Elemente in jeder Zeile ist 1.

Zu einer stochastischen Matrix gehört ein Austauschprozess.

Die Übergangsmatrix **A muss** eine **stochastische** Matrix sein.

4 Lineare Optimierung

Eine überaus wichtige Rolle in den Wirtschaft- und Sozialwissenschaften sowie in den Ernährungswissenschaften spielen Problemstellungen, die mit Methoden der linearen Optimierung gelöst werden können. Man bezeichnet eine Aufgabe, bei der nach dem „Extremwert" einer Größe gefragt wird, die von mehreren Variablen abhängt, als Optimierungsaufgabe. Anders als bei den üblichen Aufgaben aus der Analysis unterliegen hier die Variablen einschränkenden Bedingungen. Bei den folgenden Anwendungsproblemen wird angenommen, dass der funktionale Zusammenhang und die Nebenbedingungen durch lineare Gleichungen und Ungleichungen beschreibbar sind.

Probleme der linearen Optimierung lassen sich durch **geometrische** Darstellungen oder algorithmisch mithilfe der sogenannten **Simplex-Methode** lösen. Wegen des hohen Rechenaufwandes bedient man sich bei der Simplexmethode häufig mathematischer Software.

4.1 Grafisches Lösungsverfahren

Die grafische Lösung ist dann möglich, wenn es sich um Gleichungen und Ungleichungen mit zwei Variablen handelt.

► Beispiel:

Ein Händler beabsichtigt, zwei Arten von Trekking-Räder TR 007 und TR 013 einzukaufen. Der Einkaufspreis für TR 007 liegt bei 110 € und der für TR 013 bei 200 €. Von TR 013 sollen nicht mehr als 35 Räder eingekauft werden. Der Händler kann für den Posten Trekking-Räder für höchstens 8000 € ordern und hat eine Lagerkapazität von insgesamt 55 Rädern.

Den Nettogewinn hat der Händler bei TR 007 auf 20 € und bei TR 013 zu 32 € kalkuliert. Wie wird der Händler einkaufen, um einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen?

▼ Lösung:

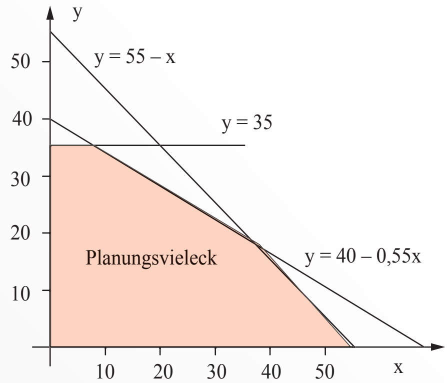
Die Aufgabe ist gelöst, wenn unter Beachtung der einschränkenden Bedingungen der maximale Gewinn grafisch ermittelt wurde.

1. *Festlegung der Variablen x und y*
   Von TR 007 werden x Stück und von TR 013 werden y Stück eingekauft. Da die Anzahl der einzukaufenden Räder nicht negativ sein kann, gelten die Nichtnegativitätsbedingungen:
   $x \geq 0;\ y \geq 0$

2. *Einschränkungen*
   Da der Händler nur einen bestimmten Betrag für den Einkauf ausgeben will bzw. nur begrenzte Lagerkapazitäten hat, können nur begrenzte Stückzahlen eingekauft werden.
   $$\begin{aligned} y &\leq 35 \\ 110x + 200y &\leq 8000 \\ x + y &\leq 55 \end{aligned}$$

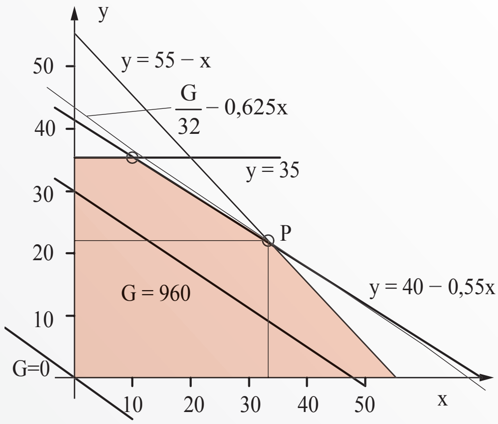
3. *Zielgleichung*
   Die Zielgleichung beschreibt die voraussichtlichen Gewinne für die beiden Räder.
   $Z = 20x + 32y$

4. *Grafische Darstellung*
   Die grafische Lösung erfolgt mithilfe eines Vielecks (Planungsvieleck). Um dieses zeichnen zu können, löst man die drei Ungleichungen unter 2. (sofern nötig) nach y auf und bestimmt die Gleichungen der drei **Randgeraden.**
   $y \leq 35$: $y = 35$; $y \leq -\frac{11}{20}x + 40$:
   $y = -\frac{11}{20}x + 40$; $y \leq -x+55$: $y = -x + 55$



5. *Optimaler Gewinn*
   Die Zielgleichung wird nach y aufgelöst. Man ersetzt dabei Z durch G (Gewinn) und erhält die Gleichung einer Geraden mit der Steigung $m = -0{,}625$ und dem Achsenabschnitt $b = \frac{G}{32}$.
   $Z = 20x + 32y \Rightarrow y = \frac{G}{32} - 0{,}625x$; $G \to \max$
   $Z = 20 \cdot 33 + 32 \cdot 22 = \mathbf{1364}$

   Man kann sich vorstellen, dass der Term der Zielgleichung Term einer Schar von linearen Funktionen ist. Es ist zu erkennen, dass bei der Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt kein Gewinn erzielt wird. Für die Gewinngeraden, die durch das Planungsvieleck laufen, wird ein Gewinn erzielt. Man zeichnet nun für einen beliebigen, aber geeigneten Gewinn die Gewinngerade. Gezeichnet sind die Gewinngeraden für G = 0 GE und G = 960 GE.



   Die Gewinngerade für z. B. G = 960 GE wird bis in den „äußersten Punkt“ des Planvielecks parallel verschoben. Dabei hat diese Gewinngerade nur einen gemeinsamen Punkt mit dem Planvieleck. Es ist der Punkt des optimalen Gewinns, dessen Koordinaten mit P(33|22) abgelesen werden. Die Gewinngerade durch diesen Punkt hat den größten x- und y-Achsenabschnitt.

   Werden vom Trekking-Rad TR 007 33 Stück und vom Trekking-Rad TR 013 22 Stück gekauft, liegt bei diesen Mengen der größte Gewinn vor. Der maximale Gewinn beträgt 1364 GE.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die lineare Optimierung eine Methode zur Bestimmung von Maximum oder Minimum einer linearen Zielfunktion ist. Dabei müssen einschränkende Bedingungen in Form von linearen Gleichungen oder Ungleichungen erfüllt sein.

Im obigen Beispiel wird ein typisches Maximierungsproblem – d. h., der durch die Zielgleichung beschriebene Wert (Gewinn) ist zu maximieren – behandelt. Häufig sind in der Praxis Probleme zu lösen, bei denen die entscheidende Größe und damit die Zielgleichung zu minimieren ist. Das folgende Beispiel zeigt, wie ein Minimierungsproblem grafisch gelöst wird.

Merke

Das **Simplex-Verfahren** ist ein **Iterationsverfahren** mit folgendem allgemeinen Lösungsweg:

1. Aufstellen des **Ungleichungssystems** und der **Zielgleichung** aus dem Aufgabentext.
2. Umformen des Ungleichungssystems in ein **m×n-LGS** durch Addition von **Schlupfvariablen** $s_1, \dots, s_n$ und Aufstellen der ersten **Simplex-Tabelle.**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + s_2 &= b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + s_m &= b_m \end{aligned}$$

3. Ermitteln der ersten Näherungslösung, indem man alle $x_k = 0$ setzt.
4. Den größten Koeffizienten a_{ij} in der Zielgleichung – sofern positive Koeffizienten vorhanden – auswählen. (Ist mindestens ein Koeffizient größer als null, dann ist die optimale Lösung noch nicht erreicht.) Dieser größte Wert in der Zielgleichung steht in der **Pivot-Spalte.**
   Für alle in der Pivot-Spalte stehende Koeffizienten den Quotienten $\frac{b_i}{a_{ij}}$ bilden. Beim Quotienten mit dem kleinsten Wert liegt die größte **„Einschränkung“** vor. Der Wert für a_{ij} ist das **Pivot-Element.** Die zum Pivot-Element zugehörige Zeile heißt **Pivot-Zeile.**
5. Mithilfe des gaußschen Algorithmus werden alle Elemente in der Pivot-Spalte zu 0. Eine weitere Näherungslösung ($x_k = 0$ setzen) wird ermittelt.
6. Ist noch mindestens ein Koeffizient in der Zielgleichung positiv, dann kann der Wert für die Zielgröße noch weiter erhöht werden. Man führt das Verfahren wieder ab 4. fort.
7. Ist kein Wert in der Zielgleichung positiv, dann ist das Tableau optimal. Die optimale Lösung und der optimale Wert für die Zielgröße können berechnet werden.

Anmerkung zu 2:
Das LGS besteht aus n Variablen und m Schlupfvariablen, also n + m Variablen, aber nur aus m Gleichungen.

Neben Maximierungsaufgaben können auch Minimierungsaufgaben mit dem Simplex-Algorithmus gelöst werden. Dabei werden die $\leq$-Einschränkungen in $\geq$-Einschränkungen umgeformt. Diese Lösungsmöglichkeit wird durch das sogenannte **Dualtheorem** (Dualität) begründet. Dies besagt, dass jedem Maximumproblem mit $\leq$-Einschränkungen genau ein Minimumproblem mit $\geq$-Einschränkungen zugeordnet werden kann (und umgekehrt) und die Lösung der Maximierungsaufgabe ist zugleich die Lösung der dualen Minimierungsaufgabe.

► Beispiel:

Zu einer gesunden Ernährung gehört die tägliche Aufnahme von Vitaminen z. B. durch Nahrungsmittel. Bei Vitamin E sollen es mindestens 6 Mengeneinheiten (ME), bei Vitamin B 12 ME und bei Vitamin C 5 ME sein. Die beiden Nahrungsmitteln N_1 und N_2 beinhalten folgende Anteile an Vitaminen:
N_1: 2 ME Vitamin E, 2 ME Vitamin B und 0 ME Vitamin C
N_2: 1 ME Vitamin E, 4 ME Vitamin B und 4 ME Vitamin C
Nahrungsmittel N_1 kostet 5 €/ME und Nahrungsmittel N_2 kostet 6 €/ME. Wie viele ME der Nahrungsmittel N_1 und N_2 sind täglich einzunehmen, damit die Kosten gering werden?

▼ Lösung:

Wegen der besseren Übersichtlichkeit stellt man eine Tabelle auf:

	Nahrungsmittel N_1 in ME	Nahrungsmittel N_2 in ME	Mindestmenge
Vitamin E	2	1	6
Vitamin B	2	4	12
Vitamin C	0	4	5
Kosten	5 €	6 €	

Aus den angegebenen Rahmenbedingungen wird ein Ungleichungssystem mit $\geq$-Beziehungen (die täglich aufzunehmenden Vitaminmengen sind Mindestmengen) aufgestellt. Dabei bezeichnet man die Lösungsvariablen mit x_1 und x_2. Die Zielgleichung ergibt sich aus dem Text.

$x_1;\ x_2 \geq 0$
$2x_1 + x_2 \geq 6$
$2x_1 + 4x_2 \geq 12$
$4x_2 \geq 5$
Zielgleichung: $5x_1 + 6x_2 = K;\ \ K \to \min$

Nun besagt das **Dualtheorem,** dass Ungleichungen nicht mehr **zeilenweise,** sondern **spaltenweise** geschrieben werden. Dabei kehrt sich das Ungleichheitszeichen um. Die Zielgleichung ergibt sich aus der **letzten Spalte** (Spalte der Mindestmenge) und wird hinsichtlich ihres **Maximums** untersucht. Die **Variablen** werden zur Unterscheidung zum Minimierungsproblem mit **u** bezeichnet.

statt:	jetzt:
$2x_1 + x_2 \geq 6$	$2u_1 + 2u_2 \leq 5$
$2x_1 + 4x_2 \geq 12$	$u_1 + 4u_2 + 4u_3 \leq 6$
$4x_2 \geq 5$	$u_1;\ u_2;\ u_3 \geq 0$
$x_1;\ x_2 \geq 0$	

Zielgleichung: $6u_1 + 12u_2 + 5u_3 = Z;\ \ Z \to \max$

Nach Einfügen der Schlupfvariablen s_1 und s_2 erhält man ein LGS mit zwei Gleichungen, drei Variablen und zwei Schlupfvariablen.

$2u_1 + 2u_2 + s_1 \leq 5$ $\qquad$ $u_1;\ u_2;\ u_3 \geq 0$
$u_1 + 4u_2 + 4u_3 + s_2 \leq 6$
$6u_1 + 12u_2 + 5u_3 = Z;\ \ Z \to \max$

Man erkennt beim Aufstellen der ersten Tabelle, dass die zweite Spalte Pivot-Spalte ist, da Z um 12 Einheiten steigen würde, wenn u_2 um eine Einheit größer würde. Eine erste Näherungslösung existiert zwar, wäre aber nicht brauchbar. Um die Pivot-Zeile und damit das Pivot-Element zu ermitteln, wird der kleinste Wert, der eine Einschränkung bedeutet, bestimmt. Pivot-Element ist die 4.

u_1	u_2	u_3	s_1	s_2	Beschränkung	
2	2	0	1	0	5	
1	**4**	4	0	1	6	Pivot-Zeile
6	12	5	0	0	Z	
	Pivot-Spalte					

$2u_2 \leq 5\ \Rightarrow\ u_2 \leq 2{,}5$
$4u_2 \leq 6\ \Rightarrow\ u_2 \leq$ **1,5** $\to$ **Einschränkung**