Die lineare Nibelungensage

Von Brünhilds und Kriemhilds linearen Gleichungen

~

Marietta Ehret
Illustriert von
Oliver Hinzmann

e-enterprise

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung in lineare Gleichungen

Wie Siegfried mit Brünhild und Kriemhild mit Gunther einfache Heldengleichungen lösen

Wie Siegfried und Brünhild eine lineare Gleichung mit einer Variablen lösen

Es war einmal im Nibelungenland. Das lag am Ende der Welt.[1] Da wohnten Brünhild und Siegfried. Sie wuchsen beim Schmied Mime auf. Damals war alles noch analog. Es gab kein Internet, kein Handy, ja nicht einmal ein Festnetztelefon. Brünhild war ein *wunderschönes,*[2] selbstbewusstes und sportliches Mädchen. Er war ein Junge, der gegen Zwerge und Riesen kämpfen und Drachen töten konnte. Am Vormittag übten sie sich im Weitsprung, Steinstoßen und Speerwerfen. Am Nachmittag lösten Siegfried und Brünhild lineare Gleichungen. Und zwar solche:

Nibelungenland war 100 Meilen lang,[3] vom Süden bis zum Norden, wie weit war es dann vom Süden bis zur Mitte? Sie schrieb

$$2x = 100 \text{ [Meilen]}.$$

Schnell hat sie herausgefunden, dass

$$x = 50 \text{ [Meilen]}$$

ist.

Was ist x, fragt Siegfried.

x steht für etwas Unbekanntes, für die unbekannte Entfernung. Zuerst schreibe ich die Beziehungen auf, wie die der doppelten Entfernung x, die dann 100 Meilen ist, dann stelle ich die Gleichung um, ich

---

1 Nach: Franz Fühmann: *Das Nibelungenlied*, Hinstorff, 2. Aufl. Rostock, 2002, S. 44.

2 Ebda. S. 37

3 Ebda. S. 44

teile alle Zahlen auf beiden Seiten der Gleichung durch 2. So kommt

$$x = 50 \text{ [Meilen]}$$

heraus. Das gefällt mir, denn 50 Meilen kann ich mir vorstellen, das ist ein weiter Weg.

Schön, sagt Siegfried, statt dieses x kannst du auch was anderes nehmen, einen anderen Buchstaben, es ist nur ein Zeichen, die Lösung hängt nicht davon ab, eher von den Eigenschaften, die man fordert. Alle schreiben x, weil es ein selten benutzter Buchstabe ist. Du musst schon ein Buch darüber gelesen haben, Brünhild!

Ach! Ist das schon alles, was du weißt?

Nein, hier, pass auf, deine Gleichung

$$2x = 100$$

ist eine lineare Gleichung mit der Unbekannten x, sie ist linear, weil x darin vorkommt mit der Potenz 1 und nicht als x^2 oder als $1/x$. Wenn wir nun die Aufgabe nehmen, 5 Äpfel gerecht unter uns beiden zu teilen, dann haben wir

$$2x = 5.$$

Nach Umstellung der Gleichung erhalten wir

$$x = \frac{5}{2}\,.$$

Aber was ist, wenn keiner der Äpfel geteilt werden soll? Dann hat nämlich die Aufgabe

$$2x = 5$$

keine ganzzahlige Lösung! So! Du siehst, dass eine lineare Gleichung mit einer unbekannten Größe x

$$ax + b = 0$$

manchmal eine ganzzahlige Lösung x hat und manchmal nicht. Man muss erklären, ...

Siegfried, ist Mathematik nur eine Jungensache? *Mann* muss ... – Du spinnst ja wohl!

Brünhild, verdammt, komm‘, sei nicht eingeschnappt, das ist doch egal, shit, Mathematik hat nichts mit Jungs und Mädchen zu tun, vergiss es!

Brünhild nimmt sich Mimes Pferd und reitet davon. Siegfried ist sauer. Was muss sie so empfindlich sein! Man sagt das so! Er steigt auf den nächsten Berg und schaut, wohin Brünhild geritten ist. Er reitet auf dem Esel hinterher. Brünhild reitet einige Zeit immer geradeaus und dann zum Strand, sie hat eine Bucht gefunden, die Siegfried noch nicht kennt. Hier zieht sie sich aus und schwimmt im Meer. Siegfried beobachtet sie, er findet Brünhild so schön, dass sich sein Herz zusammenkrampft. Er hat sich in sie verliebt. Dann reitet sie wieder nach Hause. Und schließlich auch Siegfried.

Wie gut sind rationale Koeffizienten für Siegfried und Brünhild?

Am nächsten Tag muss Siegfried in der Schmiede helfen. Er ist ganz verschwitzt, doch nun geht es ihm besser.

Siegfried, können wir weitermachen, fragt Brünhild.

Ich kann! Und du?

Hast du vielleicht Met für mich da?[4]

Nö! Du weißt doch, dass wir erst am Abend bei Mime was kriegen, reiß dich doch zusammen!

Hey, ich hab‘ aber Durst, und du auch! Das seh‘ ich dir an, sagt sie.

Brünhild, basta, wir machen jetzt weiter und gut! Wo waren wir? Brünhild schluckt und setzt fort: Wir haben eine lineare Gleichung

$$ax + b = 0$$

mit der Unbekannten x …

Brünhild, richtig, lass uns festlegen, unterbricht er sie wieder, was mit a, b und x ist, also in welchen Zahlbereichen die liegen und welche Eigenschaften x außerdem hat. Wenn x für die Anzahl von Äpfeln steht, sollte x ganz sein und nichtnegativ.

An diesem Nachmittag finden beide heraus: Die Gleichung

$$ax + b = 0$$

hat die Lösung

$$x = -\frac{b}{a}$$

für $a \neq 0$, $a, b, x \in$ **Q**. **Q** ist die Menge der rationale Zahlen, das sind die

4 Nach: Juli Zeh: *Adler und Engel*, btb, München, E-Book, 2018, Pos. 52

Brüche. Der Buchstabe Q im Namen des Zahlenbereichs kommt von *Quotient*.

Wie Siegfried ganze Koeffizienten vorschlägt

Sind aber a und b ganze Zahlen, $a \neq 0$ und a ist Teiler von b, dann ist die Lösung

$$x = -\frac{b}{a}$$

von

$$ax + b = 0$$

ganzzahlig, wie schön, freut sich Siegfried. Wenn a nicht b teilt, gibt es keine ganzzahlige Lösung.

Hmm, und was ist dann?

Wie Brünhild elementare Umformungen erfindet

Na, da gibt es eben keine ganzzahlige Lösung. Brünhild, wenn ich die Gleichung

$$ax + b = 0$$

anschaue, $a, b, x \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$, dann finde ich immer eine Zahl N: mit der multipliziere ich die Gleichung und es entsteht eine neue Gleichung mit ganzen Koeffizienten:

$$a'x + b' = 0$$

$$a' = aN$$

$$b' = bN$$

Zum Beispiel bei

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 0$$

nehme ich

$$N = 6$$

und erhalte

$$2x - 3 = 0.$$

Die Lösungen von beiden Gleichungen sind gleich, denn

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

Stimmt, sagt Brünhild.

Das war unsere erste *elementare Umformung*, sagt Siegfried, morgen wollen wir andere Aufgaben lösen. Das hat sich doch gelohnt, hier durchzuarbeiten. Außerdem schlage ich vor, von nun an nur noch mit ganzzahligen Koeffizienten in den linearen Gleichungen zu rechnen.

Okay!

Wie Brünhild mit der Einsetzmethode 2 lineare Gleichungen löst

Siegfried stellt am nächsten Tag eine Aufgabe neuer Art: Stell dir vor, Brünhild, ich habe Drachen und Elche getötet. Die Summe aller dieser getöteten Tiere sei 5, die doppelte Differenz der Drachen und Elche sei 2. Wie viele Drachen und Elche habe ich getötet?

Brünhild rechnet vor: Na gut, x soll für die Anzahl der getöteten Drachen stehen, y für die der Elche, dann schreibe ich deine erste Aussage mit der Summe der Tiere so:

$$x + y = 5$$

und die zweite Aussage so:

$$2x - 2y = 2.$$

Da wolltest du wohl eine größere Zahl habe, du Angeber, da mache ich gleich mal eine elementare Umformung, ich teile jeden Koeffizienten der Gleichung durch 2 und kriege stattdessen:

$$x - y = 1.$$

Stimmt, sagt Siegfried, und weiter?

Aus der 1. Gleichung nehme ich die Information für eine Variable, nehmen wir mal y, sagt Brünhild, also

$$y = 5 - x$$

Das setze ich dann in die neue 2. Gleichung ein:

$$1 = x - y = x - (5 - x) = x - 5 + x = 2x - 5$$

Dann stelle ich das nach x um: Auf beiden Seiten addiere ich 5:

$$6 = 2x$$

Ich teile jetzt alle Koeffizienten durch 2, das ist schon wieder eine elementare Umformung und kriege

$$x = 3$$

als Lösung. Aus der Gleichung für y kriege ich dann damit:

$$y = 5 - x = 5 - 3 = 2$$

Siegfried, du hast 3 Drachen und 2 Elche getötet!

Brünhild, richtig! Du hast elementare Umformungen benutzt und die Einsetzmethode kreiert. Du hast eine Gleichung nach einer Variablen umgestellt und in die zweite eingesetzt, das ist die Einsetzmethode. Ach, was trinkst du gerne?

Met!

Hab‘ ich – hier!

Brünhild stößt das Glas wütend um. Siegfried ist sauer und erträgt das nicht. Er stürzt sich auf sie und ringt mit ihr. Nach einer Weile lässt er sie los. Sie hat ein paar Abschürfungen, ein blaues Auge und geht weg.

Wie Brünhild eine Aufgabe mit 2 Unbekannten nicht lösen kann

Siegfried hat für Brünhild eine kleine Kette geschmiedet. Er hat sie auf den Tisch gelegt – neben den Met. Siegfried schenkt ihr die Kette. Brünhild legt sie wortlos an. Dann stellt Siegfried die nächste Aufgabe: Wenn ich doppelt so viele getötete Drachen zu den getöteten Bären hinzuzähle, erhalte ich 7 getötete Tiere. Wenn ich 4-mal so viele Drachen zu der doppelten Anzahl von Bären hinzufüge, zähle ich 15. Na?

Verstehe, ich schreibe wieder die Gleichungen auf:

$$2x + z = 7$$
$$4x + 2z = 15$$

x …. Anzahl der Drachen
z …. Anzahl der Bären

Siegfried, da stimmt was nicht! Wenn ich eine elementare Umformung mache, nämlich die 1. Gleichung mit 2 multipliziere, dann kriege ich

$$4x + 2z = 14$$

Du bist ein verdammter Angeber, 4-mal so viele Drachen zur doppelten Anzahl von Bären ergibt 14 und nicht 15! Man kann nicht beide Gleichungen gleichzeitig lösen! Immer willst du größer sein als du bist!

Brünhild, regt dich doch nicht auf, cool down, ich wollte doch nur sagen, dass ich heute keinen Drachen und keinen Bären getötet habe. Ich habe jetzt gar keine Lust, Bären, Elche und Drachen zu töten! Warte es ab! Wenn wir die Determinanten besprochen haben, wirst du sehen, warum es hier keine Lösungen gibt.

Brünhild trinkt etwas Met.

Na gut, Siegfried, wollen wir solche Aufgaben nicht besser allgemeiner lösen? Aber wo fangen wir an?

Mime hat ein paar Bücher, er berechnet das Metall, die Kohle, das Feuer usw. Ich habe da ein Algebra-Buch im Schuppen gefunden, das nehmen wir, sagt Siegfried.

Wie Kriemhild und Gunther kleine, lineare Gleichungssysteme grafisch lösen

Im burgundischen Land lebten die Königskinder Kriemhild, Gunther, Gernot und Giselher. Kriemhild war das allerschönste Mädchen weit und breit. Sie war nicht nur die Schönste an Wohlgestalt, sondern auch schön an Tugend und Edelsinn.[5] Gunther war ihr Lieblingsbruder. Beide verbrachten viel Zeit miteinander. Manchmal trafen sie sich im Schlosshof zu Worms am Rhein und lösten lineare Gleichungen. In Worms gab es bereits elektrischen Strom aus Wasserkraft vom Main und die ersten Taschenrechner. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten hatten sie schnell gelöst: 40 000 Sachsen und x Dänen sind 60 000 Feinde.[6] Das ergibt:

$$x = 20\,000 \text{ [Dänen]}$$

Dann betrachten sie 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Kriemhild erzählt ihren Traum von Falken und Adlern:

In ihrem Traum gab es insgesamt 3 Vögel. Es waren doppelt so viele

5 Fühmann, ebda., S. 1

6 Fühmann, ebda., S. 16

Grafische Lösung der linearen Gleichung $40\,000 + x = 60\,000$.

Adler wie Falken. Das kannst du schreiben als

$$x + y = 3$$
$$y = 2 - x$$

x steht für die Anzahl der Falken, y für die der Adler.

Obwohl man das schnell erraten kann, lösen Kriemhild und Gunther das immer grafisch: Die 2. Gleichung sieht bereits wie eine Geradengleichung aus, die 1. muss noch nach y umgestellt werden:

$$y = 3 - x$$

Jetzt zeichnen sie die beiden Geraden. Dort, wo sich die beiden Geraden schneiden, ist die Lösung des Gleichungssystems. Das ist im Punkt

$$P = (1, 2),$$

das heißt, die Lösung ist

$$x = 1,$$
$$y = 2,$$

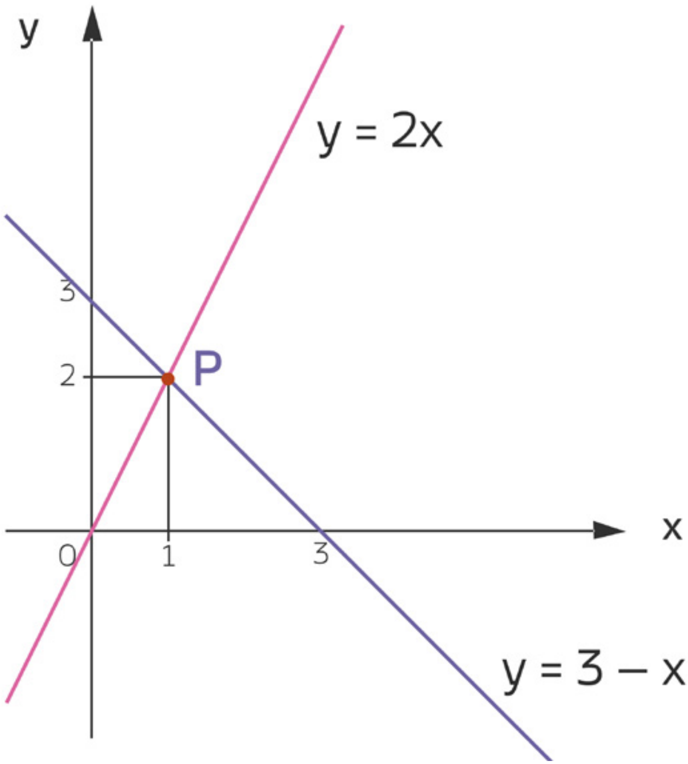
1 Falke und 2 Adler.

Gunther fragt, was hast du von den Vögeln geträumt?

Ich habe geträumt, dass ich einen wilden und schönen Falken hatte, den ich zähmen wollte. Da kamen mit einem Mal zwei Adler dahergeflogen und zerfleischten den schönen Falken.[7] So etwas Furchtbares habe ich noch nie gesehen.

Ach Kriemhild, ist doch nur ein Traum!

7 Fühmann, ebda., S. 2



Grafische Lösung der beiden Gleichungen $y = 3 - x$ und $y = 2x$.

Impressum

Die lineare Nibelungensage. Von Brünhilds und Kriemhilds linearen Gleichungen.
1. Auflage, 2020.

TEXTE

BILDER

LEKTORAT

Jochem Berlemann

AUSGABE

Die Rechte dieser Ausgabe liegen bei *e-enterprise*, Verlag für Mathematik, Wissenschaft und Fotografie, Gartenstraße 1, 24837 Schleswig, www.e-enterprise.de, e-enterprise@mailbox.org.

ISBN

978-3-945059-44-9

DRUCK UND BINDUNG

Interpress, Budapest. Das Buch wurde klimaneutral gedruckt.

Klimaneutral
Druckprodukt
ClimatePartner.com/12667-2001-1001