1 Zahlen und Größen

1.1 Bruchrechnung

Bruchrechnung ist für viele Schüler ein großes Problem. Aber keine Sorge: Wir werden dir dieses Thema von Grund auf erklären. Sobald du die ersten Kniffe verstanden hast, wird dir das Thema nicht mehr schwerfallen.

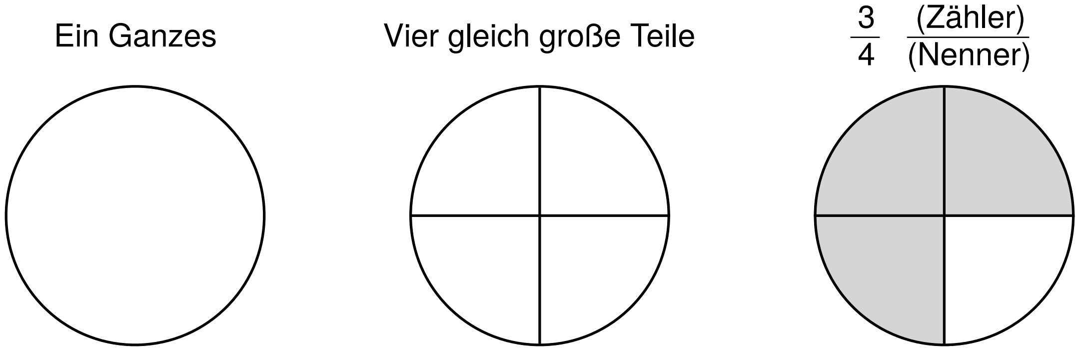
Fangen wir ganz vorne an: Was ist ein Bruch? Ein Bruch besteht immer aus einem Zähler (überm Bruchstrich) und einem Nenner (unterm Bruchstrich). Beispiel:

$$\frac{3}{4} \; \frac{\text{(Zähler)}}{\text{(Nenner)}}$$

Der Nenner (unten, im Beispiel die 4) gibt an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wird. Das können wir gut an einem Kuchen verbildlichen. Wenn wir uns das untere Bild anschauen sehen wir zu Beginn einen ganzen Kuchen, der nicht angeschnitten ist. Anschließend wird der Kuchen in 4 Stücke aufgeteilt, sodass 4 gleich große Stücke entstehen. Wenn wir nun einen großen Appetit haben und 3 von diesen 4 Stücken essen, dann nehmen wir $\frac{3}{4}$ des gesamten Kuchens. Warum? Weil der Zähler (oben, im Beispiel die 3) angibt, wie viele Teile vom Ganzen genommen werden.

Einstieg

> **Nenner**: Anzahl, in die ein Ganzes zerlegt wird
>
> **Zähler**: Anzahl, die ich von der Gesamtzahl nehme



Im nächsten Schritt werden wir mit den Brüchen rechnen. Keine Angst, das hört sich schlimmer an als es wirklich ist.

Beim Rechnen mit Brüchen gelten die folgenden Regeln:

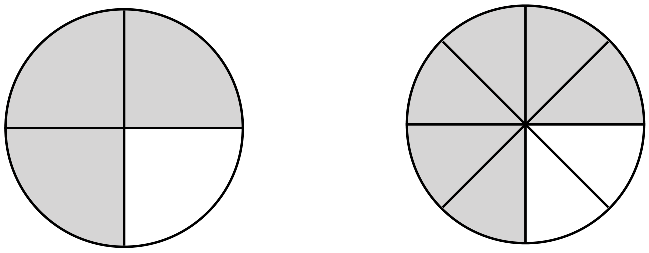
Addieren, erweitern und kürzen

- **Erweitern**: Ein Bruch wird erweitert, indem sowohl der Zähler als auch der Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert wird. Die Zahl über dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 2 erweitert wird:

$$\frac{3}{7} \xrightarrow{2} \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

  Beim Erweitern verändert sich die „Wirkung“ des Bruches nicht, damit wird gemeint, dass am Ende genauso viel Kuchen weggenommen wird, wie zuvor. Schauen wir uns wieder den Kuchen an:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{(\text{Zähler})}{(\text{Nenner})} \qquad \frac{3}{4} \xrightarrow{2} \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$



  Beim linken Kuchen ist die graue Fläche genauso groß wie beim rechten Kuchen, nur die Einteilung ist feiner.

- **Kürzen**: Ein Bruch wird gekürzt, indem man sowohl den Zähler als auch den Nenner durch die gleiche Zahl teilt. Die Zahl unter dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 9 gekürzt wird:

$$\frac{9}{27} \xrightarrow[9]{} \frac{9 : 9}{27 : 9} = \frac{1}{3}$$

  Kürzen ist somit genau das Gegenteil zum Erweitern. Wir kürzen Brüche, weil man mit kleinen Zahlen besser rechnen kann.

Unechte Brüche

- **Gemischte Zahl $\leftrightarrow$ Unechter Bruch**: Eine gemischte Zahl (ganze Zahl und Bruch z.B. $2\frac{1}{4}$) kann nach dem folgenden Schema in einen unechten Bruch (Zähler $>$ Nenner) umgewandelt werden:

$$2\frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

  Bei unechten Brüchen ist der Zähler (oben) größer als der Nenner (unten). Das führt dazu, dass wir keinen richtigen Bruch haben, denn ein Bruch beschreibt ja eigentlich nur einen Teil vom Ganzen. Wenn das „Ganze“ zum

Beispiel vier Kuchenstücke sind und wir aber 9 Kuchenstücke besitzen, dann haben wir insgesamt 2 ganze und zusätzlich noch 1/4 Kuchen.

- **Addition**: Zwei Brüche werden addiert, indem die Nenner *gleichnamig* gemacht und anschließend die beiden Zähler addiert werden. Für das Angleichen der Nenner benötigen wir wieder die Brucherweiterung, denn der Wert des Bruches darf nicht verändert werden. Zuerst finden wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kurz: *kgV*) der beiden Nenner heraus, in unserem Fall ist das 35. Anschließend erweitern wir die Brüche mit dem jeweiligen Faktor, bei 7 ist das 5, denn $7 \cdot 5 = 35$ und bei 5 ist das 7. Nachdem die Brüche angeglichen sind, können die Zähler miteinander addiert werden.

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{15}{35} + \frac{28}{35} = \frac{15 + 28}{35} = \frac{43}{35}$$

- **Subtraktion**: Zwei Brüche werden subtrahiert, indem die Nenner gleichnamig gemacht und anschließend die beiden Zähler voneinander subtrahiert werden. Die Herangehensweise ist bei der Subtraktion genau wie bei der Addition (Stichwort *kgV*). Lediglich der letzte Schritt unterscheidet sich!

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{28}{35} - \frac{15}{35} = \frac{28 - 15}{35} = \frac{13}{35}$$

- **Multiplikation**: Zwei Brüche werden multipliziert, indem wir den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner multipliziere (Kurz: Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner). Beim Multiplizieren müssen wir die Brüche **nicht** gleichnamig machen.

Multiplizieren und dividieren

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

Falls möglich sollten die Brüche vor der Multiplikation über Kreuz gekürzt werden, wie im Beispiel zu sehen. Wir können die 27 mit der 3 kürzen, denn beide Zahlen sind ein Vielfaches der Zahl 3 ($3 \cdot 1 = 3$ und $3 \cdot 9 = 27$). Das gleiche gilt für die 7 mit der 14. Warum machen wir das? Damit wir nicht so große Zahlen multiplizieren müssen.

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{27} = \frac{\cancel{3}\,1}{7} \cdot \frac{14}{\cancel{27}\,9} = \frac{1}{\cancel{7}\,1} \cdot \frac{\cancel{14}\,2}{9} == \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

- **Division**: Zwei Brüche werden dividiert, indem bei dem Bruch, durch den geteilt wird, Zähler und Nenner vertauscht wird (Kehrwert bildet) und danach die beiden Brüche miteinander multipliziert werden. Auch hierbei können wir, nachdem der Kehrwert gebildet wurde, kürzen:

$$\frac{3}{7} : \frac{27}{14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{27} = \frac{\cancel{3}\,1}{\cancel{7}\,1} \cdot \frac{\cancel{14}\,2}{\cancel{27}\,9} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

1.2 Dezimalzahlen und Brüche umwandeln

Dezimalzahlen werden auch Kommazahlen genannt. Wir können fast jede Zahl als Bruch und als Dezimalzahl darstellen, dafür müssen wir nur ein paar Schritte bei der Umrechnung beachten.

> Wenn wir eine Dezimalzahl in einen Bruch umwandeln, entspricht die Anzahl der Nachkommastellen der Anzahl der Nullen im Nenner und die Zahl wird ohne Komma in den Zähler gesetzt.

Dezimalzahl in Bruch

Zum Beispiel besitzt die Dezimalzahl 0,3 nur eine Nachkommastelle. Beim Erstellen des Bruches kommt demnach eine Null in den Nenner und die Zahl ohne Komma kommt in den Zähler! **Beispiele**:

- $0{,}3 = \frac{3}{10}$, 3 im Zähler und die Zahl im Nenner ist eine 1 mit einer Null.
- $0{,}425 = \frac{425}{1000}$, 3 Nachkommastellen: im Nenner steht eine 1 mit drei Nullen.
- $0{,}0813 = \frac{813}{10000}$, 4 Nachkommastellen: im Nenner steht eine 1 mit vier Nullen.

Bruch in Dezimalzahl

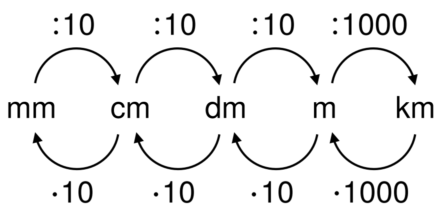
Beim Umwandeln von einem Bruch in eine Dezimalzahl können wir die Zahl direkt umwandeln, wenn eine 10, 100 usw. im Nenner steht. Wenn eine andere Zahl im Nenner steht müssen wir erst erweitern. **Beispiele**:

- $\frac{4}{10} = 0{,}4$: Eine 10 steht im Nenner und die 4 wird zur Dezimalzahl mit einer Nachkommastelle.
- $\frac{23}{1000} = 0{,}023$: Eine 1000 steht im Nenner, wodurch eine Dezimalzahl mit 3 Nachkommastellen entsteht.
- $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0{,}16$: Keine Zehnerzahl im Nenner, daher wird auf 100 erweitert. 100 hat 2 Nullen, wodurch eine Zahl mit 2 Nachkommastellen entsteht.

1.3 Größen umrechnen

Einheiten umrechnen

Wenn wir Möbel oder Häuser bauen oder wenn wir wissen wollen, wie groß wir sind, benutzen wir die Einheiten Meter (m) und Zentimeter (cm). Wir können diese auch ineinander umrechnen, doch komischer-weise macht man dabei immer Fehler. Mit ein paar Tipps kannst du dir ganz einfach merken, wie du die Größen ineinander umrechnest.



Beim Umrechnen der Einheiten ist es wichtig, dass du die Reihenfolge der Einheiten der Größe nach auswendig kennst. Warum ist das wichtig? Wir sollten auf jeden Fall wissen, dass z.B. Meter(m) größer sind als Zentimeter(cm).

Wenn du die Reihenfolge kennst, dann kannst du dir merken:

> Wenn du von einer kleineren Einheit in eine größere Einheit rechnest, dann wird aus der großen Zahl eine kleinere Zahl. Genau entgegengesetzt.

Beispiel: $25\mathrm{mm} = 2{,}5\mathrm{cm}$

Wir rechnen aus einer kleineren Einheit (mm) in eine größere Einheit (cm) um, so dass die große Zahl (25) zu einer kleineren Zahl (2,5) wird. Der Umrechnungsfaktor beträgt 10.

1.4 Aufgaben

A.1.1. Erweitere mit 5.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{4}{2}$ d) $\frac{7}{8}$

A.1.2. Kürze mit 4.

a) $\frac{4}{16}$ b) $\frac{24}{36}$ c) $\frac{8}{52}$ d) $\frac{12}{32}$

A.1.3. Kürze soweit wie möglich.

a) $\frac{6}{21}$ b) $\frac{12}{24}$ c) $\frac{30}{25}$ d) $\frac{14}{56}$

A.1.4. Rechne in eine gemischte Zahl um.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{11}{5}$ c) $\frac{4}{2}$ d) $\frac{24}{7}$

A.1.5. Wandle in einen echten Bruch um.

a) $2\frac{1}{2}$ b) $3\frac{1}{5}$ c) $4\frac{2}{5}$ d) $5\frac{1}{8}$

A.1.6. Wandle in eine Dezimalzahl (erweitere zuerst auf einen Zehnerbruch).

a) $\frac{2}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{25}$

A.1.7. Berechne die folgenden Brüche.

a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{6}$ e) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$ i) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{6}$ m) $\frac{2}{3} : \frac{3}{6}$

b) $\frac{1}{5} + \frac{2}{4}$ f) $\frac{4}{5} - \frac{2}{4}$ j) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6}$ n) $\frac{1}{5} : \frac{3}{7}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{4}{6}$ g) $\frac{1}{2} - \frac{2}{8}$ k) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2}$ o) $\frac{1}{2} : \frac{5}{2}$

d) $\frac{7}{8} + \frac{5}{12}$ h) $\frac{7}{8} - \frac{5}{10}$ l) $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{12}$ p) $\frac{2}{9} : \frac{5}{18}$

A.1.8. Rechne in die vorgegebenen Größen um.

a) 5cm = ______m c) 25cm^2 = ______m^2 e) 0,06l = ______ml

b) 22mm = ______m d) 3.100m^3 = ______km^3 f) 80kg = ______g