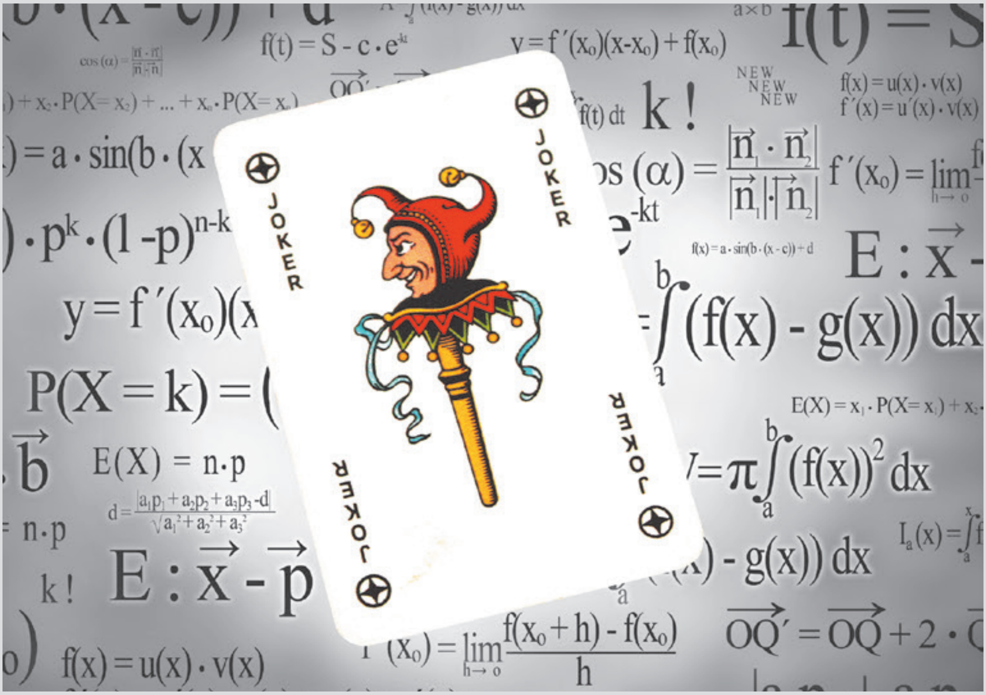
Rosner

Optimale Vorbereitung auf das Abitur in Mathematik

Verständliche Zusammenfassungen zu allen Themen

für alle beruflichen Gymnasien (gA und eA) in Niedersachsen



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Der Verfasser:

Stefan Rosner

Lehrer für Mathematik in der Oberstufe

stefan_rosner@hotmail.com

Beratende Mitarbeit:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Coverbild (Joker): © fotomaedchen - Fotolia.com

* * * * *

1. Auflage 2019

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

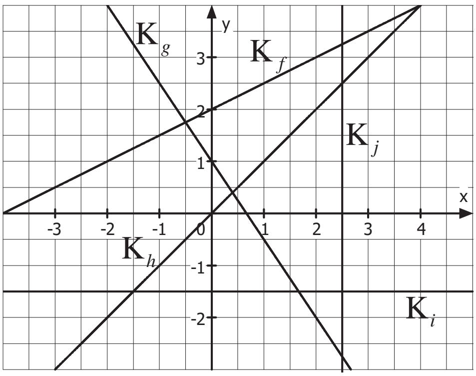
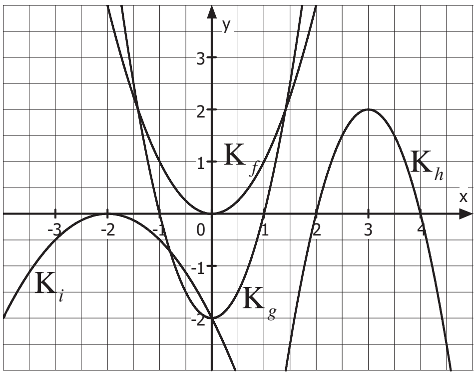
lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0517-3

1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
Hauptform: $\boldsymbol{y = mx + b}$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$
Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\textit{hoch / runter}}{\textit{rechts}} \cdot x + \textit{y-Achsen-abschnitt}$	Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$
Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I
Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$	$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV
Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)	Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid c)$
Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$	Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)
1. Winkelhalbierende: $y = x \quad (m = 1)$ 2. Winkelhalbierende: $y = -x \quad (m = -1)$	
	
K_f: $y = \frac{1}{2}x + 2$ K_g: $y = -\frac{3}{2}x + 1$ K_h: $y = x$ (1. Winkelhalbierende) K_i: $y = -1{,}5$ K_j: $x = 2{,}5$	K_f: $f(x) = x^2$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$ K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$ K_i: $i(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 2$

https://www.mvurl.de/fdub

<table>
<tr><th>3. Grades</th><th>4. Grades</th></tr>
<tr>
<td>

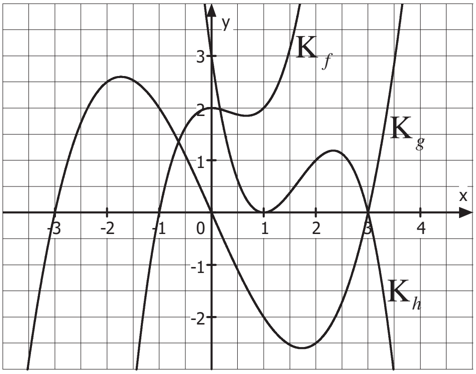
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$

$a > 0$: Verlauf von III nach I

$a < 0$: Verlauf von II nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0\,|\,d)$

Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung:
$f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)



K_f: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$

K_g: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$

K_h: $h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

</td>
<td>

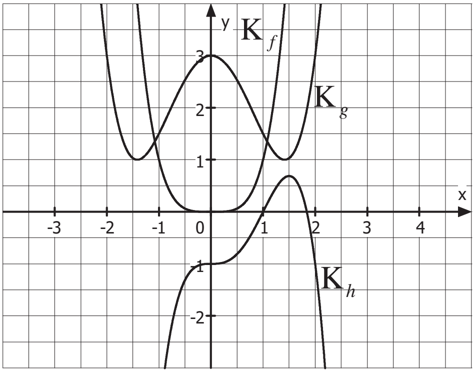
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$

$a > 0$: Verlauf von II nach I

$a < 0$: Verlauf von III nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0\,|\,e)$

Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse:
$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)



K_f: $f(x) = x^4$

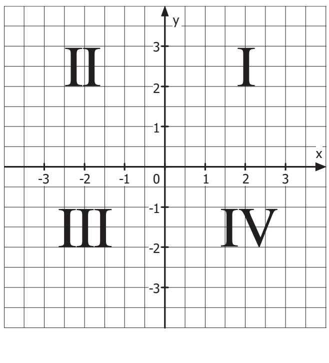
K_g: $g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 3$

K_h: $h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

</td>
</tr>
</table>

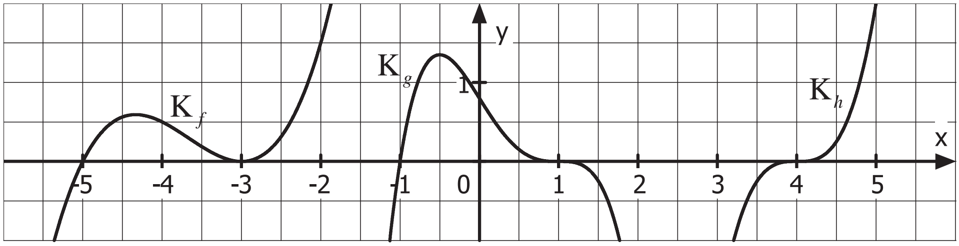
Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)
$\boldsymbol{a > 0}$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)
$\boldsymbol{a < 0}$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



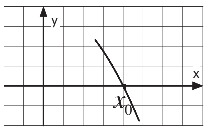
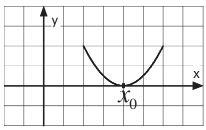
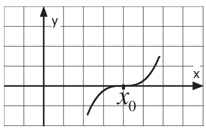
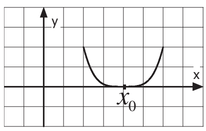
K_f: $f(x) = 0{,}5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ K_g: $g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ K_h: $h(x) = 2 \cdot (x-4)^3$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0{,}8 \cdot \left(x+1\right) \cdot \left(x-1\right)^3$$

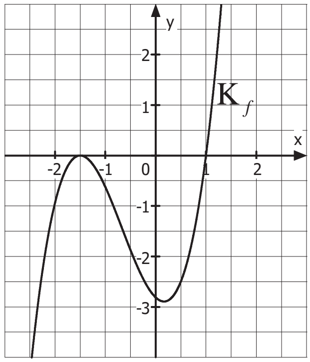
Verlauf von III nach IV	$x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle	$x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Linearfaktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0) \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** und **berührt** x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

https://www.mvurl.de/ehue

Beispiel
Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.



Lösung
Da die Nullstellen $\left(x_{1/2} = -1{,}5;\ \ x_3 = 1\right)$ des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:

$f(x) = a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$

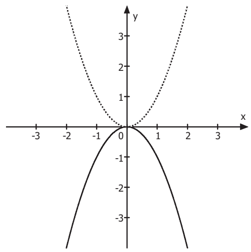
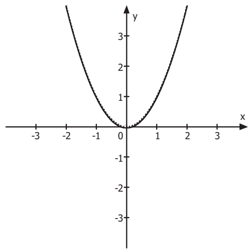
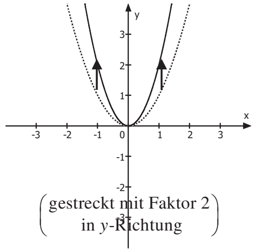
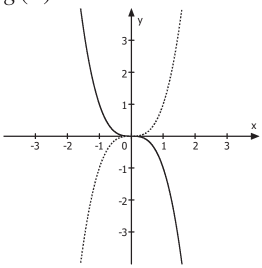
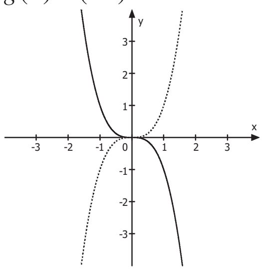
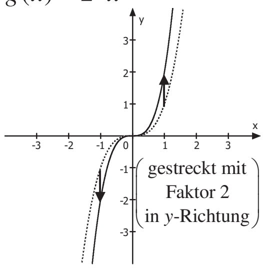
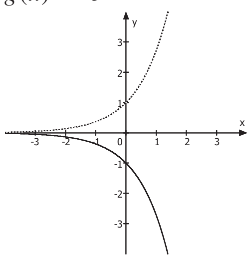
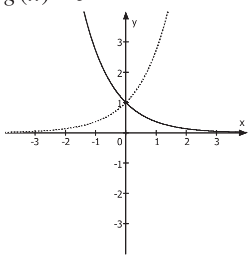
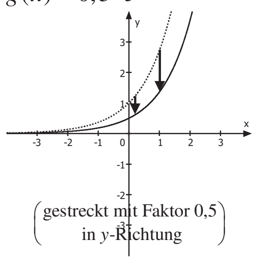
Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der x-Achse ist, eingesetzt:

P$(0{,}5\,|\,-2{,}5)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1) \\
-2{,}5 &= a \cdot (0{,}5+1{,}5)^2 \cdot (0{,}5-1) \\
-2{,}5 &= -2a \\
\frac{5}{4} &= a
\end{aligned}
$$

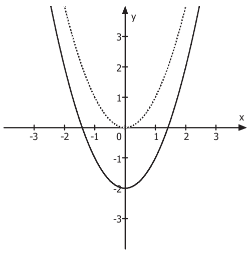
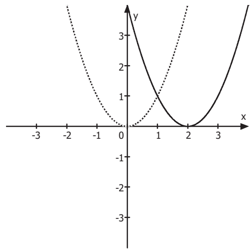
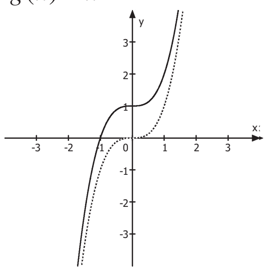
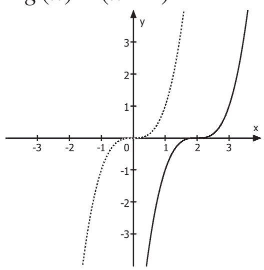
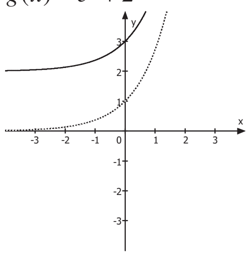
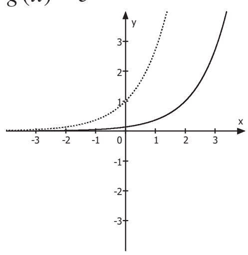
$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$$

1.6 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben $f(x) \rightarrow$

	Spiegeln an ...		**Strecken in ...**
	... x - Achse	**... y - Achse**	**... y - Richtung**
$f(x)=x^2$	$g(x)=-x^2$ 	$g(x)=(-x)^2=x^2$ 	$g(x)=2\cdot x^2$ 
$f(x)=x^3$	$g(x)=-x^3$ 	$g(x)=(-x)^3=-x^3$ 	$g(x)=2\cdot x^3$ 
$f(x)=e^x$	$g(x)=-e^x$ 	$g(x)=e^{-x}$ 	$g(x)=0{,}5\cdot e^x$ 
	$\mathrm{g}(x)=-f(x)$ „$-$“ vor Funktionsterm	$\mathrm{g}(x)=f(-x)$ „x“ durch „$-x$“ ersetzt	$\mathrm{g}(x)=\boldsymbol{a}\cdot f(x)$ Streckung mit Faktor $\lvert a\rvert$ in y-Richtung

https://www.mvurl.de/6tif

$\rightarrow \quad \boldsymbol{g(x) = a \cdot f(x-c)+d}$

Verschieben in ...	
... *y* - Richtung	**... *x* - Richtung**
$g(x)=x^2-2$ 	$g(x)=(x-2)^2$ 
$g(x)=x^3+1$ 	$g(x)=(x-2)^3$ 
$g(x)=e^x+2$ 	$g(x)=e^{x-2}$ 
$g(x)=f(x)\pm \boldsymbol{d}$ z.B. $...+2$: Versch. nach oben $...-2$: Versch. nach unten	$g(x)=f(x\pm \boldsymbol{c})$ z.B. $(x-2)$: V. nach rechts $(x+2)$: V. nach links

3.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen

1. Polynomgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 3** **abc -** bzw. **pq - Formel**
$2x-4=0 \quad \vert +4$ $2x=4 \quad \vert :2$ $x=2$		
$2x^2-4=0 \quad \vert +4$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \vert \sqrt{\ }$ $x_1=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_2=-\sqrt{2}\approx -1,41$	$2x^2-4x=0$ $x\cdot(2x-4)=0$ **S. v. Nullpr.** $x_1=0 \qquad 2x-4=0$ $2x=4$ $x_2=2$	$x^2-8x+15=0$ mit **abc - Formel**: $(a=1;\ b=-8;\ c=15)$ $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ $=\frac{8\pm 2}{2}$ $x_1=5;\quad x_2=3$ oder mit **pq - Formel**: $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (*Bei dieser Formel muss vor dem* x^2 *stets eine* $+1$ *stehen!*)
$2x^3-4=0$ $2x^3=4$ $x^3=2 \quad \vert \sqrt[3]{\ }$ $x=\sqrt[3]{2}$ $x\approx 1,26$	$2x^3-4x=0$ $x\cdot(2x^2-4)=0$ **S. v. Nullpr.** $x_1=0 \qquad 2x^2-4=0$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \vert \sqrt{\ }$ $x_2=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_3=-\sqrt{2}\approx -1,41$	

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 4** **Substitution führt zu** $\mathbf{...\,u^2 + ...\,u + ... = 0}$
$2x^4-4=0 \quad \mid +4$ $2x^4=4 \quad \mid :2$ $x^4=2 \quad \mid \sqrt[4]{\ }$ $x_1=\sqrt[4]{2}\approx 1{,}19$ $x_2=-\sqrt[4]{2}\approx -1{,}19$	$2x^4-4x=0$ $x\cdot\left(2x^3-4\right)=0$ **S. v. Nullpr.** $x_1=0 \qquad 2x^3-4=0$ $2x^3=4$ $x^3=2$ $x_2=\sqrt[3]{2}$ $x_2\approx 1{,}26$	$x^4-8x^2+15=0$ **Substitution :** $\left(x^4=u^2;\ \ x^2=u\right)$ $u^2-8u+15=0$ $u_{1/2}=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ (abc-Formel) $=\dfrac{8\pm 2}{2}$ $u_1=5; \qquad u_2=3$ **Rücksubstitution :** $x^2=5 \qquad x^2=3$ $x_1=\sqrt{5}\approx 2{,}34 \qquad x_3=\sqrt{3}\approx 1{,}73$ $x_2=-\sqrt{5}\approx -2{,}34 \qquad x_4=-\sqrt{3}\approx -1{,}73$

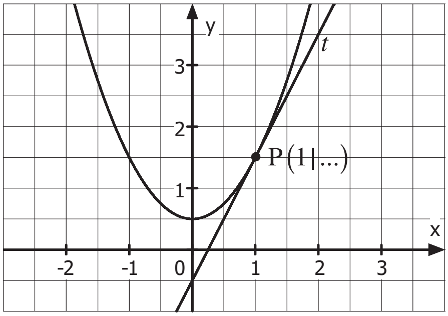
2. Exponentialgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 4** **Substitution führt zu** $\mathbf{...\,u^2 + ...\,u + ... = 0}$
$e^x=0{,}5 \quad \mid \ln$ $x=\ln(0{,}5)$ $x\approx -0{,}69$ oder $e^{2x-1}=0{,}5 \quad \mid \ln$ $2x-1=\ln(0{,}5) \quad \mid +1$ $2x=\ln(0{,}5)+1 \quad \mid :2$ $x=\dfrac{\ln(0{,}5)+1}{2}$ $x\approx 0{,}153$	$2e^{2x}-e^x=0$ $e^x\cdot(2e^x-1)=0$ **S. v. Nullpr.** $e^x=0 \qquad 2e^x-1=0$ $x=\ln(0) \qquad e^x=0{,}5$ keine Lösung $\quad x=\ln(0{,}5)$ $x\approx -0{,}69$	$e^{2x}-8e^x+15=0$ **Substitution :** $\left(e^{2x}=u^2;\ \ e^x=u\right)$ $u^2-8u+15=0$ $u_{1/2}=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ (abc-F.) $=\dfrac{8\pm 2}{2}$ $u_1=5; \qquad u_2=3$ **Rücksubstitution :** $e^x=5 \qquad e^x=3$ $x_1=\ln(5)\approx 1{,}6 \qquad x_2=\ln(3)\approx 1{,}1$

4.2 Tangente

1. Aufgabentyp (Tangente im Kurvenpunkt)

Gegeben ist die Funktion
f mit $f(x) = x^2 + 0{,}5$.
Bei dem x-Wert 1 wird eine Tangente und an das Schaubild angelegt.
Berechnen Sie deren Gleichung.



Vorgehen: Ermittlung einer Tangente im Kurvenpunkt (geg. $f(x)$ und x-Wert des Kurvenpunktes)	
1. *y*-Wert des Kurvenpunktes berechnen (Einsetzen in $f(x)$)	$f(1) = 1^2 + 0{,}5 = 1{,}5 \quad \rightarrow P(1\|1{,}5)$
2. Tangentensteigung berechnen (Einsetzen in $f'(x)$)	$f'(x) = 2x$ $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad (= m_t)$
3. Tangentengleichung berechnen (Einsetzen in $y = m \cdot x + b$)	$y = m_t \cdot x + b$ $1{,}5 = 2 \cdot 1 + b$ $1{,}5 = 2 + b \quad \| -2$ $-0{,}5 = b$ $\Rightarrow$ Tangente: $y = 2x - 0{,}5$

Alternative: Durch Einsetzen in die nachfolgende **Punkt-Steigungs-Form** kann alles in einem Schritt ausgeführt werden:

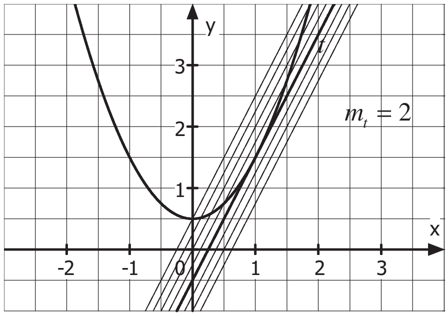
Formel (allg.): $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ (mit u als Berührstelle)

Einsetzen: $y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$
$y = 2 \cdot (x-1) + 1{,}5$
$y = 2x - 0{,}5$ (Tangente)

https://www.mvurl.de/pm16

2. Aufgabentyp (Tangente mit gegebener Steigung)

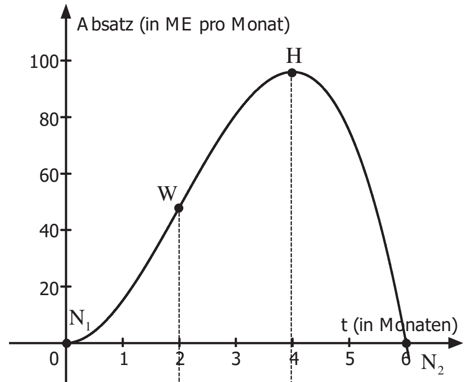
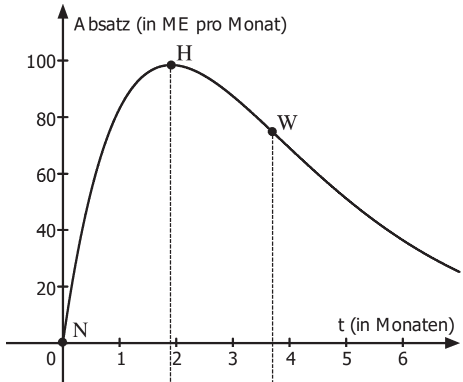
Gegeben ist die Funktion f
mit $f(x) = x^2 + 0{,}5$.
Eine Tangente mit Steigung 2 soll an das Schaubild angelegt werden.
Berechnen Sie deren Gleichung.



Vorgehen: Ermittlung einer Tangente mit gegebener Steigung (geg. $f(x)$ und Steigung der Tangente)	
1. $f'(x) = m_t$ liefert x - Wert des Kurvenpunktes (Gleichsetzen von $f'(x)$ und gegebener Tangentensteigung m_t; Gleichung lösen)	$f'(x) = 2x;\ m_t = 2$ $f'(x) = m_t$ $2x = 2$ $x = 1$ (An dieser Stelle hat die Parabel also die Steigung 2. Hier muss sich demnach der Berührpunkt befinden.)
2. y-Wert des Kurvenpunktes berechnen (Einsetzen in $f(x)$)	$f(1) = 1^2 + 0{,}5 = 1{,}5 \quad \rightarrow B(1\|1{,}5)$
3. Tangentengleichung berechnen (Einsetzen in $y = mx + b$)	$y = m_t \cdot x + b$ $1{,}5 = 2 \cdot 1 + b$ $1{,}5 = 2 + b \quad \|-2$ $-0{,}5 = b$ $\Rightarrow$ Tangente: $y = 2x - 0{,}5$

5. Differenzialrechnung (im wirtschaflichen Kontext)

5.1 Der Produktlebenszyklus

Modellierung mit: **Ganzrationaler Funktion 3. Grades**	Modellierung mit: **Exponentialfunktion**
Beispiel	
Für ein Produkt liegt die Absatzfunktion A mit $A(t) = -3t^3 + 18t^2$ vor.	Für ein Produkt liegt die Absatzfunktion A mit $A(t) = 160 \cdot t \cdot e^{-0{,}61t}$ vor.
Beschreibung	
Absatz beginnt langsam, erreicht Maximum, bricht dann abrupt ein.	Absatz beginnt stark, erreicht Maximum, läuft dann langsam (asymptotisch) aus.
Am Schaubild	
	
Absatz wächst immer schneller **progressiv wachsend** $\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) > 0 \end{pmatrix}$	Absatz wächst immer langsamer **degressiv wachsend** $\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$
Absatz wächst immer langsamer **degressiv wachsend** $\begin{pmatrix} A'(t) > 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$	Absatz fällt immer schneller **progressiv fallend** $\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$
Absatz fällt immer schneller **progressiv fallend** $\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) < 0 \end{pmatrix}$	Absatz fällt immer langsamer **degressiv fallend** $\begin{pmatrix} A'(t) < 0 \\ A''(t) > 0 \end{pmatrix}$

H	**Maximaler Absatz**	H
W	**Maximaler Absatzzuwachs**	N
N_2	**Maximaler Absatzrückgang**	W

https://www.mvurl.de/1bzt

5.2 Die ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Beteiligte Funktionen

- **K** gibt die **Gesamtkosten** an, die bei der Herstellung von x ME entstehen.
  Ansatz: $\mathrm{K}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- **K′** gibt die **Grenzkosten**, also die Kosten, die bei Herstellung einer zusätzlichen (beliebig kleinen) Mengeneinheit entstehen, an.

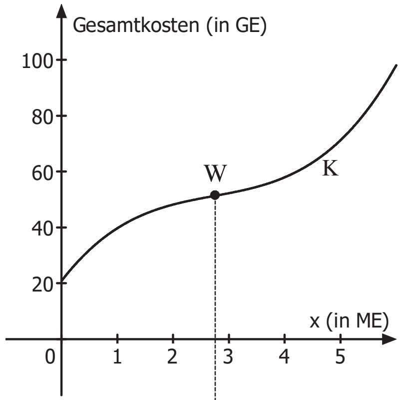
Erläuterungen

Da eine Mehrproduktion stets mit höheren Gesamtkosten verbunden ist, ist K streng monoton steigend bzw. K′ überall positiv ($\mathrm{K}'(x) > 0$).

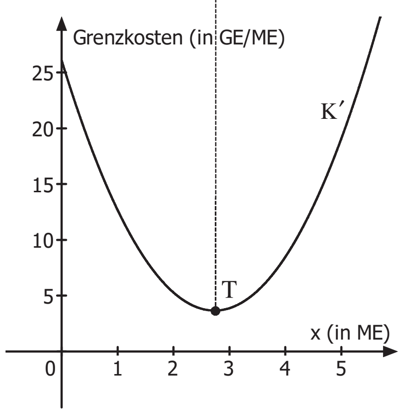
Bis zur Wendestelle fällt K′. Zusätzliche Mengeneinheiten führen zwar zu Mehrkosten, diese jedoch sinken. ($\mathrm{K}''(x) < 0$).
Es liegt **degressives Wachstum** vor.

An der Wendestelle selbst sind die Mehrkosten der nächsten Einheit minimal (Tiefpunkt bei K′).

Ab der Wendestelle steigt K′. Zusätzliche Mengeneinheiten führen zu immer höheren Mehrkosten. ($\mathrm{K}''(x) > 0$).
Es liegt **progressives Wachstum** vor.



Kosten wachsen immer langsamer	Kosten wachsen immer schneller
degressiv wachsend	**progressiv wachsend**
$\mathbf{K'(x) > 0}$ (steigende Kosten)	$\mathbf{K'(x) > 0}$ (steigende Kosten)
$\mathbf{K''(x) < 0}$ abnehmende Grenzkosten (bzw. K ist rechtsgekrümmt)	$\mathbf{K''(x) > 0}$ zunehmende Grenzkosten (bzw. K ist linksgekrümmt)



5.7 Isoquante, Isokostengerade und Minimalkostenkombination

Beispiel : Zur Fertigung eines Produktes werden die beiden Produktionsfaktoren Arbeit (x) und Kapital (y) gemäß der Produktionsfunktion $c(x, y) = 4 \cdot x^2 \cdot y$ eingesetzt.
Es sollen 160 Mengeneinheiten (ME) des Produktes hergestellt werden.
Eine ME des Faktors Arbeit kostet 25 GE, eine ME des Faktors Kapital kostet 20 GE.
Bestimmen Sie die Minimalkostenkombination.

1.Von der Produktionsfunktion zur Isoquanten

• Die Produktionsfunktion

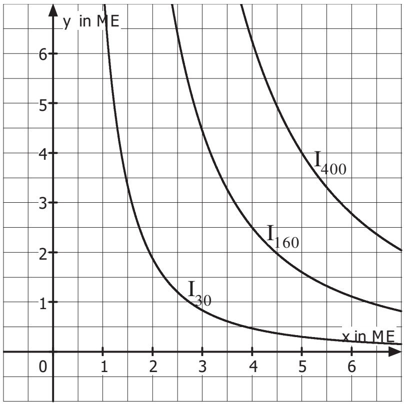
$c(x, y) = 4 \cdot x^2 \cdot y$

Gibt die Produktionsmenge c an, welche durch den Einsatz von x ME Arbeit und y ME Kapitel erzeugt wird.

• Die allg. Isoquantenfunktion I

$$c = 4 \cdot x^2 \cdot y \quad |:4\ :x^2 \quad (\textit{auflösen nach } y)$$

$$\frac{c}{4 \cdot x^2} = y \quad \text{somit } \mathrm{I}_c(x) = \frac{c}{4 \cdot x^2}$$



• Isoquantenfunktion für geg. Produktionsmenge

Für $c = 160$ erhält man $\mathrm{I}_{160}(x) = \dfrac{160}{4 \cdot x^2} = \dfrac{40}{x^2}$

Die Punkte auf dem zugehörigen Schaubild I_{160} stellen alle möglichen Kombinationen der beiden Faktoren x und y dar, die zu einer Produktionsmenge von 160 ME führen.

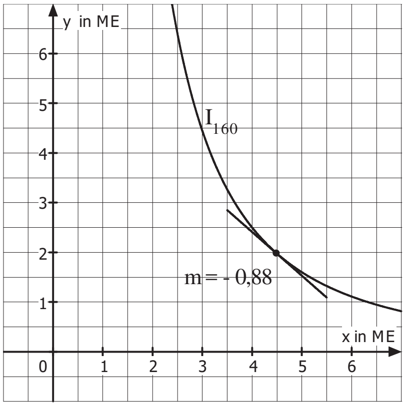
Hinweis : Die Grenzrate der Substitution

Entspricht der Steigung der Isoquanten und wird mit der **ersten Ableitung** berechnet.

$\mathrm{I}_{160}(x) = \dfrac{40}{x^2} = 40 \cdot x^{-2};$

$\mathrm{I}_{160}'(x) = 40 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\dfrac{80}{x^3}$

Beispiel: $\mathrm{I}_{160}'(4{,}5) = -\dfrac{80}{4{,}5^3} \approx -0{,}88$



Aktuell werden mit dem Faktoreinsatz $x = 4{,}5$ (und $y \approx 1{,}98$) eine Menge von 160 ME des Produktes hergestellt.

Eine Erhöhung von 1 ME des Faktors x kann hierbei durch eine Verringerung des Faktors y um ca. 0,88 ME ausgeglichen werden (sodass noch immer 160 ME hergestellt werden).

https://www.mvurl.de/qh5a

2. Die Isokostengerade

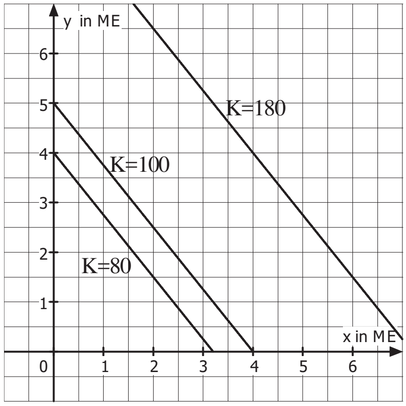
Die Gesamtkostenfunktion: $K(x, y) = 25x + 20y$

(*auflösen nach y*) $\quad K = 25x + 20y \quad | -25x$

$$-25x + K = 20y \quad |:20$$

$$-1{,}25x + \frac{K}{20} = y$$

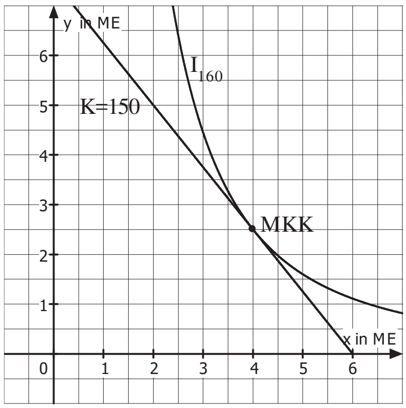
Im Koordinatensystem entspricht dies einer Schar aus parallelen Geraden mit **Steigung $-1{,}25$**. Den **Isokostengeraden**.



Beispielsweise stellen die Punkte auf dem Schaubild $K = 100$ alle möglichen Kombinationen der beiden Faktoren dar, die zu Gesamtkosten von 100 GE führen.

3. Die Minimalkostenkombination (MKK)

Gesucht ist die Gerade mit dem geringsten y-Achsenabschnitt (geringste Kosten!), welche das Schaubild zu I_{160} berührt.



Bedingung: Gleiche Steigung

$$\mathbf{I_{160}{}'(x) = -1{,}25}$$

$$-\frac{80}{x^3} = -1{,}25 \quad | \cdot x^3$$

$$-80 = -1{,}25x^3 \quad |:(-1{,}25)$$

$$64 = x^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$$

$$4 = x$$

mit $I_{160}(4) = 2{,}5$ erhält man die
Minimalkostenkombination MKK (4 | 2,5)

Die Produktionsmenge von 160 ME kann zu minimalen Kosten hergestellt werden, wenn $x = 4$ ME an Arbeit und $y = 2{,}5$ ME an Kapital eingesetzt werden.

Die Gesamtkosten betragen dann $K = 25 \cdot 4 + 20 \cdot 2{,}5 = 150$ GE.

5. Binomialverteilung

5.1 Bernoulliformel

Zugrunde liegt ein mehrfach ausgeführtes Bernoulli-Experiment, bei dem …
… nur **zwei mögliche Ergebnisse** („Treffer" und „Niete") eintreten können
und
… sich die **Wahrscheinlichkeiten nicht ändern** („Ziehen **mit** Zurücklegen")

Beispiele: Münzwurf („Kopf" oder „Zahl"); Mehrfach würfeln („6" oder „keine 6"); …

Bernoulliformel (allg.)

$$\mathbf{P(X = \mathit{k}) = \binom{\mathit{n}}{\mathit{k}} \cdot \mathit{p}^{\mathit{k}} \cdot (1-\mathit{p})^{\mathit{n-k}}}$$

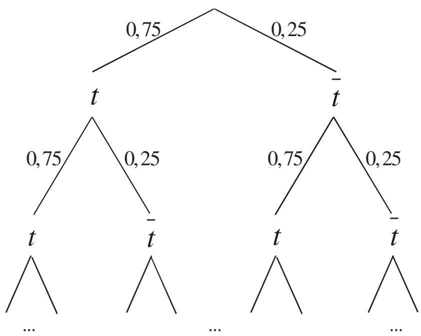
n: Anzahl der Versuche (Durchführungen)
k: Anzahl der „Treffer"
p: Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer"

Bernoulliformel (in Worten)

$$\text{P(X = Anz. Treffer)} = \binom{\text{Anz. Versuche}}{\text{Anz. Treffer}} \cdot \text{Trefferwahrsch.}^{\text{Anz. Treffer}} \cdot \text{Nietenwahrsch.}^{\text{Anz. Nieten}}$$

Beispiel 1
Ein Basketballspieler trifft (t) erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er insgesamt 5 Mal (und 3 Mal nicht)?

$$\text{P}(\text{X}=5) = \binom{8}{5} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 \approx 0,2076$$



(8 Stufen)
(alle Pfade mit 5 Mal t und 3 Mal $\bar{t}$ relevant)

Erläuterungen

- Binomialkoeffizient (allg.): $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- $n!$ steht für die Fakultät einer Zahl: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$
- $\text{P}(\text{X}=5) = \binom{8}{5} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 = \dfrac{8!}{5! \cdot (8-5)!} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 = 56 \cdot 0,00371 \approx 0,2076.$

Es gibt also 56 mögliche Reihenfolgen für 5 Treffer unter 8 Schüssen ($ttttt\bar{t}\bar{t}\bar{t}$, $\bar{t}ttttt\bar{t}\bar{t}$, ...), von welchen jede eine Einzelwahrscheinlichkeit von ungefähr $0,00371$ aufweist.

https://www.mvurl.de/o456

5.2 Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung

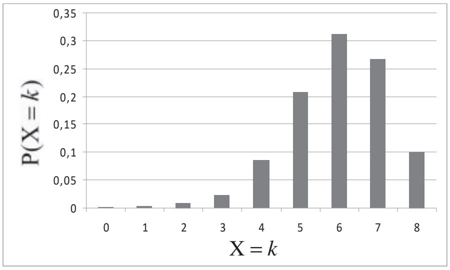
Beispiel: Ein Basketballspieler trifft erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, kann mit Hilfe der Bernoulliformel (mit $n=8$ und $p=0,75$) berechnet werden.
Somit ist die Zufallsvariable X binomial verteilt.

1. Binomialverteilung (genau k Treffer; $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$) $\mathrm{B}(n;p;k)$

eine „Liste", in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **zugehörige Wahrscheinlichkeit** steht.

GTR/CAS	
2	0,0038
3	0,0231
4	0,0865
5	0,2076



Beispiel: $\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)\approx 0,0865$

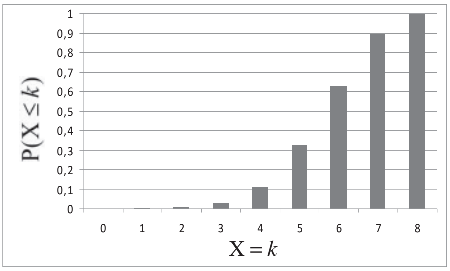
Die Wahrscheinlichkeit für **genau** 4 Treffer beträgt ca. 8,65 %.

$$\left(\begin{array}{l}\text{Berechnung mit Bernoulliformel:}\\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=\binom{8}{4}\cdot 0,75^4\cdot 0,25^4\approx 0,0865\end{array}\right)$$

2. Kumulierte Binomialverteilung (höchst. k Treffer; $\mathrm{P}(\mathrm{X}\le k)$) $\sum_{i=0}^{k}\mathrm{B}(n;p;i)$

eine „Liste", in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **Wahrscheinlichkeit** steht, dass **dieser oder ein geringerer Wert als dieser** (**höchstens** dieser) angenommen wird.

GTR/CAS	
2	0,0042
3	0,0272
4	0,1138
5	0,3214



Beispiel: $\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 4)\approx 0,1138$

Die Wahrscheinlichkeit für 0 bis 4 Treffer (**höchstens** 4 Treffer) beträgt ca. 11,38 %.

$$\left(\begin{array}{l}\text{Berechnung:}\\ \mathrm{P}(\mathrm{X}\le 4)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\ldots+\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)\end{array}\right)$$

3. Wahrscheinlichkeit für mindestens k Treffer $\mathrm{P}(\mathrm{X}\ge k)$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Spieler 4 bis 8 Mal (also **mindestens** 4 Mal)?

Vorgehen mithilfe des **Gegenereignisses** „3 oder weniger Treffer (höchst. 3 Treffer)" und der **kumulierten Verteilung**:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\ge 4)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 3)\approx 1-0,0272=0,9728$$

https://www.mvurl.de/o8d4

8. Vertrauensintervalle (Konfidenzintervalle)

8.1 Vertrauensintervalle für spezielle Sicherheitswahrscheinlichkeiten (von einer Stichprobe auf die Gesamtheit schließen)

Beispiel 1: Eine Partei möchte ihr Ergebnis (proz. Stimmenanteil *p*) bei der nächsten Bundestagswahl abschätzen.
Hierzu werden einige Tage vor der Wahl in einer Stichprobe 300 Personen nach ihrem Wahlverhalten befragt. 114 Befragte geben an, dass sie diese Partei wählen werden.
Geben Sie ein Vertrauensintervall für *p* zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % an.

Exakte Lösung: Vorgehen (am Beispiel 1)

1. Ermitteln von *h* (relative Häufigkeit) und *c* aus Tabelle (siehe unten).

$h = \frac{114}{300} = 0,38;$

$\gamma = 0,95 \xrightarrow{\text{Tabelle}} c = 1,96$

2. Definition der Funktion $f(p) = |h - p| - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ und Bestimmung der Nullstellen mit GTR / CAS.

$f(p) = |0,38 - p| - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{300}}$

Nullstellen mit GTR/CAS: $p_1 \approx 0,327;\quad p_2 \approx 0,436$

3. Angabe des Vertrauensintervalls für *p*.

Vertrauensintervall: $[0,327;\ 0,436]$

Tabelle

γ (Wahrscheinlichkeit)	0,68	0,90	0,95	0,955	0,99	0,997
c (Faktor für Intervallgröße)	1 (1σ-Regel)	1,64	1,96	2 (2σ-Regel)	2,58	3 (3σ-Regel)

Ergebnis: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt das Wahlergebnis der Partei bei der Bundestagswahl zwischen 32,7 % und 43,6 %.

https://www.mvurl.de/lzmb

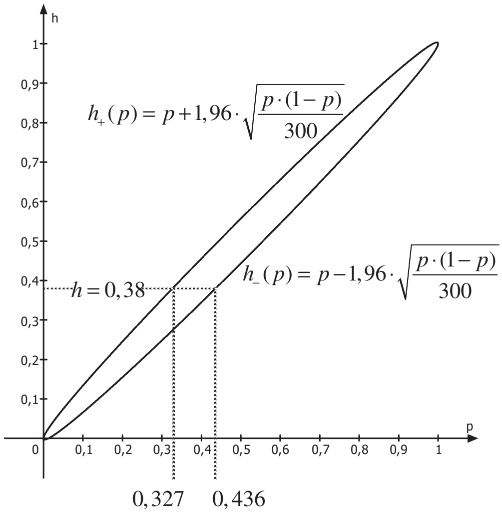
Grafische Darstellung an der Konfidenzellipse

Beschreibung

Gegeben ist die Formel für das exakte Konfidenzintervall

$$\left[p-c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}};\quad p+c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right].$$

Die beiden Intervallgrenzen werden als Funktionen h_- und h_+ betrachtet und ihre Schaubilder dargestellt.
Die Gerade $h=0,38$ gibt die relative Häufigkeit in der Stichprobe an.
Durch den Schnitt der Geraden mit den Schaubildern erhält man die beiden Grenzen des Vertrauensintervalls.



Ebenfalls ist, bei Erfüllung bestimmter Voraussetzungen, eine Näherungslösung für das Vertrauensintervall möglich.

Näherungsweise Lösung: Vorgehen (am Beispiel 1 auf Vorseite)
1. Überprüfen, ob Vorgehen mit Näherungsformel erlaubt ist. Erlaubt, falls: $0,3\le h\le 0,7$ oder $n\ge 1000$
$h=\frac{114}{300}=0,38$ liegt zwischen 0,3 und 0,7 $\rightarrow$ Näherungsweise Lösung ist erlaubt.
2. Ermitteln von *c* aus Tabelle (siehe Vorseite)
$\gamma=0,95\overset{\text{Tabelle}}{\rightarrow}c=1,96$
3. Einsetzen in Formel $\left[\boldsymbol{h-c\cdot\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}};\quad h+c\cdot\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}}\right]$**.**
$\left[0,38-1,96\cdot\sqrt{\frac{0,38\cdot(1-0,38)}{300}};\ 0,38+1,96\cdot\sqrt{\frac{0,38\cdot(1-0,38)}{300}}\right]=[0,325;\ 0,435]$

5.4 Zyklische Populationsprozesse

Beispiel 1: Bei einer Insektenart entwickeln sich innerhalb eines Monats 25 % der vorhandenen Eiern zu Larven. Nach einem weiteren Monat haben sich 40 % der vorhandenen Larven zu Insekten entwickelt. Im nachfolgenden Monat legt jedes Insekt 10 Eier und stirbt kurz danach.

Darstellungsmöglichkeiten

<table>
<tr><th>Diagramm</th><th>Tabelle</th><th>Übergangsmatrix</th></tr>
<tr>
<td>

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "0{,}25"'] \\ L \arrow[d, "0{,}4"'] \\ I \arrow[uu, bend right, "10"'] \end{tikzcd}$$

</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>von E</th><th>von L</th><th>von I</th></tr>
<tr><td>nach E</td><td>0</td><td>0</td><td>10</td></tr>
<tr><td>nach L</td><td>0,25</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>nach I</td><td>0</td><td>0,4</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{a_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \textbf{(allg.)}$$

$\boldsymbol{a_1, a_2}$: **proz. Überlebensrate / Überlebenswahrsch.**
$\boldsymbol{v}$: **Vermehrungsrate**

</td>
</tr>
</table>

Unterschied zum Stochastischen Übergangsprozess (S. 170):

Gesamtzahl an beteiligten Objekten **verändert sich** von Zustand zu Zustand.
Übergangsmatrix enthält **nicht nur Wahrscheinlichkeiten** (keine stochastische Matrix).

Formel: $\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\mathbf{neu}}} = \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\mathbf{alt}}}$ bzw. $\mathbf{A} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\mathbf{alt}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}_{\mathbf{neu}}}$ (Reihenfolge je nach Aufgabenstellung)

Berechnung der Entwicklung

$\overrightarrow{x_0}$ (Anfangszustand)

$\overrightarrow{x_1} = A \cdot \overrightarrow{x_0}$

$\overrightarrow{x_2} = A \cdot \overrightarrow{x_1} = A \cdot A \cdot \overrightarrow{x_0} = A^2 \cdot \overrightarrow{x_0}$

$\overrightarrow{x_3} = A \cdot \overrightarrow{x_2} = A^3 \cdot \overrightarrow{x_0}$

...

Abkürzungen

$\overrightarrow{x_{...}}$: Anzahl im Zeitschritt ...

A: Übergangsmatrix von einem Zeitschritt zum nächsten

A^2: Übergangsmatrix von einem Zeitschritt zum übernächsten

...

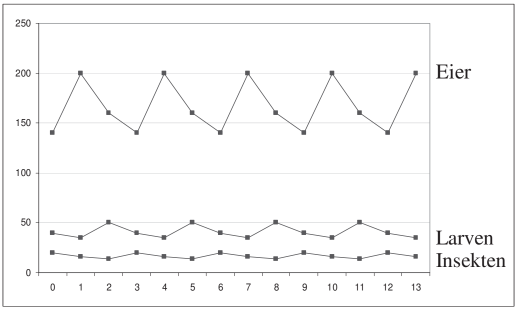
Hinweis: Gleiche Formel(n) wie bei stoch. Übergangsprozessen!

Entwicklung der Population

Im Beispiel: Zu Beginn sind 140 Eier, 40 Larven und 20 Insekten vorhanden.

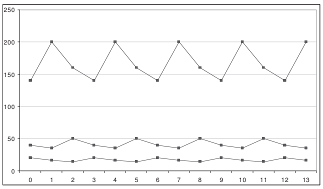
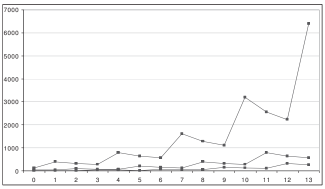
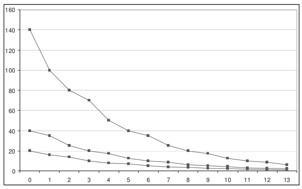
$$\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 140 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 200 \\ 35 \\ 16 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 160 \\ 50 \\ 14 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 140 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_4} = \begin{pmatrix} 200 \\ 35 \\ 16 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_5} = \begin{pmatrix} 160 \\ 50 \\ 14 \end{pmatrix}; ...$$



Die Population entwickelt sich zyklisch. Nach einem Zyklus von 3 Monaten ist stets die Startpopulation wieder vorhanden.

Entwicklung bei verschiedenen Vermehrungsraten (*v*)

Pro Insekt **10** Eier (s. o.)	Pro Insekt **20** Eier	Pro Insekt **5** Eier
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{10} \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{20} \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{5} \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$
$(0,25 \cdot 0,4 \cdot 10 \ \mathbf{= 1})$	$(0,25 \cdot 0,4 \cdot 20 = 2 \ \mathbf{> 1})$	$(0,25 \cdot 0,4 \cdot 5 = 0,5 \ \mathbf{< 1})$
		
Zyklische Entwicklung (Zyklus: 3 Monate)	Population **wächst an**	Population **stirbt aus**

Ergebnis

$$\text{Bei } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{a_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ falls: } \begin{cases} \boldsymbol{a_1 \cdot a_2 \cdot v > 1} & \textbf{wächst} \text{ die Population } \textbf{an} \\ \boldsymbol{a_1 \cdot a_2 \cdot v = 1} & \textbf{zyklische} \text{ Entwicklung (Zyklus: } \mathbf{3} \text{ Zeitschritte)} \\ \boldsymbol{a_1 \cdot a_2 \cdot v < 1} & \textbf{stirbt} \text{ die Population } \textbf{aus} \end{cases}$$

- Gilt (z.B.) $a \cdot b \cdot v = \mathbf{2}$ **verdoppelt** sich, gilt $a \cdot b \cdot v = \mathbf{0,5}$ **halbiert** sich die Population stets nach 3 Zeitschritten.
- Bei einem zyklischen Prozess mit 3 Zuständen gilt : $\mathbf{A^3 = E}$.
- Bei (z. B.) einem Prozess mit **4** möglichen **Zuständen** (Format von A: (4×4)) finden die Entwicklungen auch stets in **4 Zeitschritten** statt.

6. Lineare Optimierung

6.1 Grafisches Lösungsverfahren

6.1.1 Vorgehen bei Maximierungsproblemen

Beispiel

Klara möchte sich auf die beiden anstehenden Klausuren in Englisch und Mathe vorbereiten. Welche Notenpunktzahl sie hierbei in den einzelnen Fächer erhält ist ihr egal. Es ist jedoch ihr Ziel, eine möglichst hohe Gesamtnotenpunktzahl aus den beiden Klausuren zu erreichen. Klara weiß, dass sie durch jede Stunde, in welcher sie sich auf Englisch vorbereitet, in der Klausur 1,25 Notenpunkte erreicht. Jede Vorbereitungsstunde in Mathe führt sogar zu 1,5 Notenpunkten.

Insgesamt möchte sie sich höchstens 10 Stunden auf die beiden Fächer vorbereiten.

Zudem hat Klara eine persönliche „Frustgrenze“ von 24 „Frustpunkten“. In jeder Stunde, in der sie sich auf Englisch vorbereitet, kommen 1,5 „Frustpunkte“ hinzu. Jede Vorbereitungsstunde in Mathe führt zu 3 weiteren „Frustpunkten“.

Welche Vorbereitungszeit sollte Klara für Englisch bzw. für Mathe aufwenden?

1. **Entscheidungsvariablen**

   x - Vorbereitungszeit für Englisch (in Stunden)
   y - Vorbereitungszeit für Mathe (in Stunden)

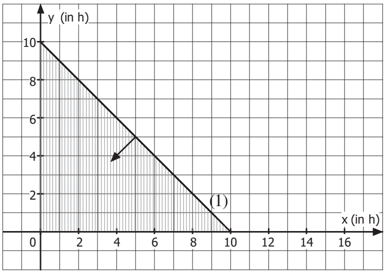
2. **Nebenbedingungen (Restriktionen) und Planungsbereich**

   Nichtnegativität (Keine negative Vorbereitungszeit möglich)

   $\boldsymbol{x \geq 0}$ und $\boldsymbol{y \geq 0}$

   Nebenbedingung 1 (Gesamtvorbereitungszeit)

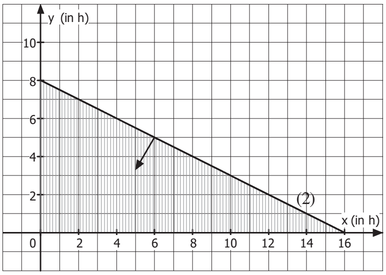
   $$x + y \leq 10 \qquad |-x$$
   $$\boldsymbol{y \leq -x + 10} \qquad \textbf{(1)}$$



   Jeder Punkt im Koordinatensystem steht für eine bestimmte Vorbereitungszeit in den beiden Fächern. Alle Punkte im markierten Bereich (unterhalb der **Randgeraden (1)**) führen zu einer insgesamten Vorbereitungszeit von höchstens 10 Stunden.

   Nebenbedingung 2 („Frustgrenze“)

   $$1{,}5 \cdot x + 3 \cdot y \leq 24 \qquad |-1{,}5x$$
   $$3y \leq -1{,}5x + 24 \qquad |:3$$
   $$\boldsymbol{y \leq -0{,}5x + 8} \qquad \textbf{(2)}$$



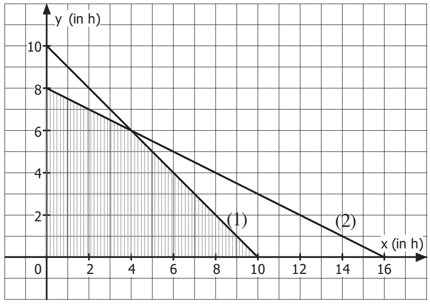
   Alle Punkte im markierten Bereich führen zu höchstens 24 „Frustpunkten“.

Nebenbedingungen nach y auflösen und einzeichnen!

https://www.mvurl.de/fmo7

Resultierender Planungsbereich

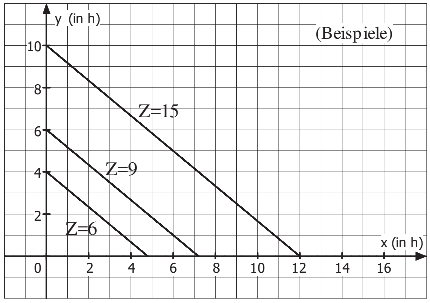
Alle Punkte im Planungsbereich sind für Klara möglich, da sie beide Nebenbedingung erfüllen.



Der **Planungsbereich** beinhaltet alle Punkte, die **möglich** sind.

3. **Zielfunktion** (Gesamtnotenpunktzahl)

$$Z = 1,25 \cdot x + 1,5 \cdot y \quad | -1,5y$$
$$Z - 1,5y = 1,25x \quad | -Z$$
$$-1,5y = 1,25x - Z \quad |: (-1,5)$$
$$\boldsymbol{y = -\frac{5}{6}x + \frac{Z}{1,5}}$$

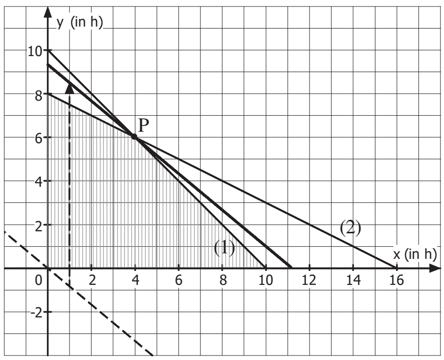


Alle zueinander parallele Geraden mit einer Steigung von $-5/6$ gehören zu Schar der Zielfunktionen. Jede einzelne Gerade hieraus steht für eine feste Gesamtnotenpunktzahl, die durch alle Punkte, welche auf der Geraden liegen, erreicht wird. Beispielsweise führen alle Punkte, welche auf der mittleren Geraden liegen, zu einer Gesamtnotenpunktzahl von $Z = 9$. Eine Zielfunktion mit einem höheren y-Achsenabschnitt steht stets für eine höhere Gesamtnotenpunktzahl.

Sinnvoll bei Maximierungsproblemen :
Zielfunktion mit **hohem y - Achsenabschnitt**.

4. **Grafische Bestimmung des Maximums**

Eine Ursprungsgerade mit der Steigung $-5/6$ wird soweit parallel nach oben verschoben, bis sie **nur noch einen** gemeinsamen Punkt mit dem Planungsbereich aufweist.
Der Punkt **P(4|6)** befindet sich auf dieser Zielfunktion mit dem höchsten y-Achsenabschnitt.
Es ist also optimal für Klara, sich 4 Stunden auf Englisch und 6 Stunden auf Mathe vorzubereiten. Sie erreicht hierdurch eine Gesamtnotenpunktzahl von $Z = 14$, wobei sie 5 ($= 1,25 \cdot 4$) Notenpunkte in Englisch und 9 ($= 1,5 \cdot 6$) in Mathe erhält.



Lösung von Maximierungsproblemen
Der **Punkt aus dem Planungsbereich**, welcher auf der Zielfunktion mit dem **höchsten y - Achsenabschnitt** liegt.