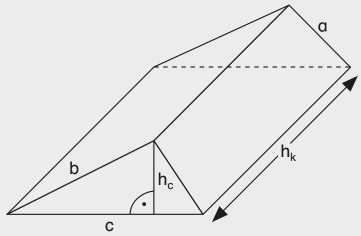
Grundwissen

Viele mathematische Körper lassen sich aus den bekannten geometrischen Grundkörpern zusammensetzen: aus geraden Prismen, Zylindern, Kegeln, Pyramiden und Kugeln.

Hinsichtlich der Oberflächen- und Volumenberechnung haben gerade Prismen und Zylinder Gemeinsamkeiten, manchmal werden diese Körper auch unter dem Begriff „Säulen“ zusammengefasst.

Ebenso weisen Pyramiden und Kegel Gemeinsamkeiten auf, aufgrund ihrer Körperform werden sie auch „Spitzkörper“ genannt.



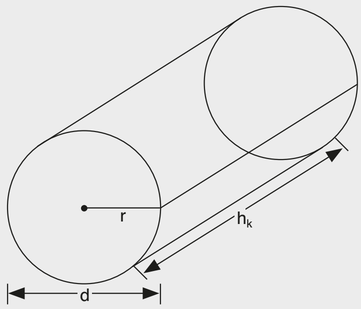
Gerade Prismen

Gerade Prismen sind Körper, welche von zwei zueinander parallelen, kongruenten Vielecken begrenzt werden, und die zudem einen Mantel haben, der sich aus ebenen Rechtecken zusammensetzt.

Die Teilrechtecke bilden das Mantelrechteck, dessen eine Kantenlänge gleich dem Umfang der Grundfläche ist.

Die andere Kantenlänge des Mantelrechtecks ist gleich dem Abstand der Grundflächen voneinander, d. h. sie ist gleich der **Körperhöhe**.

Beispiele gerader Prismen sind – je nach Grundfläche – Quader, Dreiecksprismen und Trapezprismen, Parallelogramm- bzw. allgemein Vieleckprismen. Ein Würfel ist demnach ein spezielles Prisma.



Gerade Zylinder

Ein Körper, der von zwei zueinander parallelen, kongruenten Kreisen begrenzt wird, und dessen Mantel aus einer gekrümmten Rechtecksfläche besteht, wird Zylinder genannt.

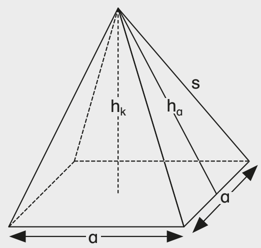
So geht's: **Volumen und Oberfläche von Prismen und Zylindern:**

Das Volumen und die Oberfläche sind für alle geraden Prismen und Zylinder wie folgt zu berechnen:

Volumen: $V = G \cdot h_k$ Oberfläche: $O = 2 \cdot G + M$ bzw. $O = 2 \cdot G + u \cdot h_k$

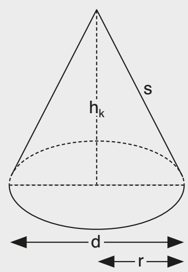
Dabei wird je nach Grundfläche die entsprechende Flächeninhaltsformel bzw. Umfangsformel eingesetzt.
So gilt beispielhaft:

Dreiecksprisma:	$V = \frac{g \cdot h}{2} \cdot h_k$	$O = 2 \cdot \frac{c \cdot h_c}{2} + (a + b + c) \cdot h_k$
Zylinder:	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h_k$	$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \pi \cdot d \cdot h_k$



Pyramide

Ein Körper mit einem Vieleck als Grundfläche und einer „Spitze“, an der sich alle Kanten des Mantels treffen, wird **Pyramide** genannt. Der Mantel setzt sich aus ebenen Seitenflächen zusammen.



Kegel

Ein Körper mit einer kreisförmigen Grundfläche und einer Spitze wird **Kegel** genannt. Die Menge aller Strecken von Randpunkten der Grundfläche zur Spitze bildet den Mantel des Kegels.

Trifft das Lot von der Spitze auf die Grundfläche genau auf den Mittelpunkt dieser Fläche, so spricht man von einer **geraden Pyramide** bzw. einem **geraden Kegel**.

So geht's: **Volumen und Oberfläche von Pyramiden und Kegeln:**

Das Volumen und die Oberfläche sind für alle Pyramiden und Kegel wie folgt zu berechnen:

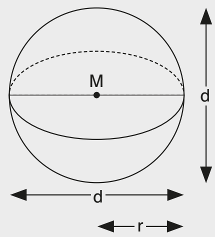
Volumen: $V = \frac{G \cdot h_k}{3}$ Oberfläche: $O = G + M$

Dabei wird je nach Grundfläche die entsprechende Flächeninhaltsformel bzw. Umfangsformel eingesetzt.
So gilt beispielhaft:

Quadratische Pyramide:	$V = \frac{a^2}{3} \cdot h_k$	$O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$
Kegel:	$V = \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot h_k$	$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$

Kugel

Ein geometrischer Körper heißt **Kugel**, wenn jeder Punkt seiner Begrenzungsfläche denselben Abstand vom Mittelpunkt hat. Dieser Abstand wird **Radius** genannt.



Der Querschnitt einer Kugel ist immer ein Kreis. Dabei ist der Radius einer solchen Schnittfläche genau dann gleich dem Kugelradius, wenn die Schnittebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

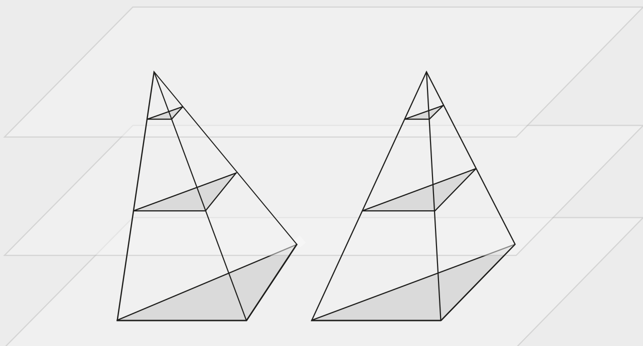
So geht's: **Volumen und Oberfläche von Kugeln:**

Das Volumen und die Oberfläche der Kugel sind wie folgt zu berechnen:

Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ Oberfläche: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Der Satz von Cavalieri:

Wenn zwei Körper gleich große Grundflächen, die gleiche Höhe und in gleicher Höhe jeweils gleich große Querschnitte haben, dann haben sie das gleiche Volumen.



So geht's: **Die Masse:**

Um die Masse von Körpern zu errechnen, multipliziert man das Volumen mit der Dichte des jeweiligen Körpers.
Die Volumeneinheit kann man kürzen. Es bleibt die Maßeinheit für Masse (Gewicht) übrig, wie im folgenden Beispiel:

$$m = V\,(\text{cm}^3) \cdot \rho\,\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$$

Übungen zu den Kompetenzen

Aufgabe 1 (*)

K_1 K_2

Zeichne das Netz und das Schrägbild folgender Prismen:

a) Würfel mit $a = 4$ cm **b)** Quader mit $a = 3$ cm, $b = 2$ cm und $c = 5$ cm

c) Trapezprisma (gleichschenklig) mit $a = 4$ cm, $c = 2{,}5$ cm, $h = 3{,}5$ cm und $h_k = 6$ cm

Aufgabe 2 (*)

K_2 K_3

Ein Dreiecksprisma hat die Maße $a = 4$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 5{,}6$ cm und $h_k = 6$ cm.

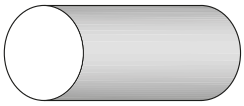
a) Zeichne das Schrägbild des Prismas. **b)** Miss die Höhe h_c und berechne das Volumen.

c) Berechne die Oberfläche.

Aufgabe 3 (*)

K_3

Berechne das Volumen und die Oberfläche des abgebildeten Zylinders mit $d = 15$ cm, $h_k = 18$ cm (Skizze nicht maßstabsgetreu).

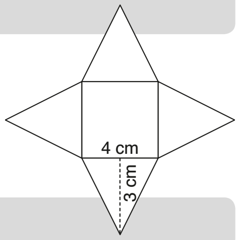


Aufgabe 4 (*)

K_2 K_3

a) Zeichne das Schrägbild der als Netz dargestellten Pyramide.

b) Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.



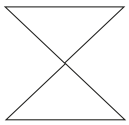
Aufgabe 5 (*)

K_3

Ein Fußball hat einen Umfang von ca. 78 cm. Wie viel Leder benötigt man zu seiner Herstellung, wenn man mit 12 % Nahtzugaben rechnen muss?

Aufgabe 6 (**)

Eine Sanduhr besteht aus zwei gleich großen Kegeln. Sie ist insgesamt 15 cm hoch und der Durchmesser der Kegelgrundflächen beträgt 12 cm.
Wie viel Sand fasst die Sanduhr, wenn $\frac{1}{3}$ der Uhr nicht mit Sand gefüllt ist?



Aufgabe 7 (**)

K_2 K_3

Die größte der Pyramiden von Gizeh ist die Cheopspyramide. Sie war ursprünglich 146,6 m hoch und die Grundkanten ihrer Grundfläche waren jeweils ca. 238,7 m lang.

a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide im Maßstab 1 : 2000.

b) Berechne das ursprüngliche Volumen der Cheopspyramide (ohne Beachtung der Hohlräume).

Aufgabe 8 (*)

K_3 K_4

Ein Kegel hat die Maße $r = 5$ cm und $h_k = 12$ cm.

a) Berechne sein Volumen. **b)** Berechne seine Oberfläche.

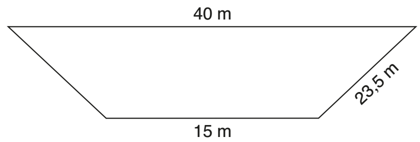
K3 K4

Aufgabe 9 (**)

Der Querschnitt eines Kanals hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes.

a) Berechne den Flächeninhalt der Querschnittfläche.

b) Wie viel Liter Wasser fasst der Kanal auf einer Länge von 12 km?



K3 K4 K5

Aufgabe 10 (**)

Berechne die fehlenden Größen der Zylinder:

	a)	b)	c)	d)
r	35 m	25 m	4 m	
h_k				22 m
V	65 144,1 m^3			4 423,36 m^3
O			150,8 m^2	
M		3 141,59 m^2		

Aufgabe 11 (**)

Eine Rolle Kupferdraht hat die Masse 1,382 kg, die Dichte des Drahtes ist $\rho = 8{,}8\ g/cm^3$. Der Durchmesser des Drahtes beträgt 2 mm. Aus wie viel Metern Draht besteht die Rolle?

Aufgabe 12 (**)

Die Mantelfläche eines Kegels beträgt 95 cm^2, die Mantellinie s ist 6 cm lang.

a) Welchen Radius hat der Kegel?

b) Welche Höhe hat der Kegel?

c) Berechne das Volumen und die Oberfläche des Kegels.

Aufgabe 13 (***)

Eine Kugel aus Messing ($\rho = 8{,}3\ g/cm^3$) wiegt 1,9 kg. Sie besitzt einen Umfang von 35 cm.

a) Berechne das Volumen der gesamten Kugel.

b) Begründe, dass es sich um eine Hohlkugel handelt.

c) Ermittle das Volumen des kugelförmigen Hohlraumes.

d) Welche Wandstärke besitzt die Kugel?

K3 K4 K5

Aufgabe 14 (**)

Der Fußball hat ein Volumen von 8181,23 cm^3.

a) Berechne den Radius.

b) Wie groß wären die Radien, wenn man aus der gleichen Menge an Leder zwei kleine, jeweils gleich große Bälle herstellen würde?

Lösungen Test – Sinus, Kosinus, Tangens

1 a) $\alpha = 4{,}34$ cm; $b = 1{,}86$ cm; $\beta = 23{,}18°$
1 b) $\delta = 18{,}44°$; $\varepsilon = 121°$; $e = 6{,}88$ cm

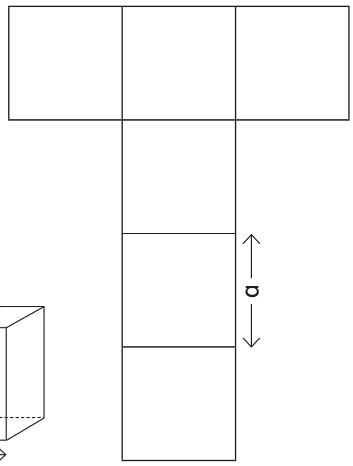
2) Der Fluss ist 25,65 m breit.

3 a) 1. Peilung: 2,9 Seemeilen; 2. Peilung: 3,15 Seemeilen
3 b) Kürzeste Entfernung: 2 Seemeilen

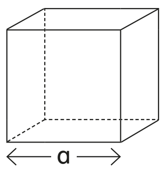
Körperberechnungen

1 a) maßstabsgetreu verkleinert

Netz:

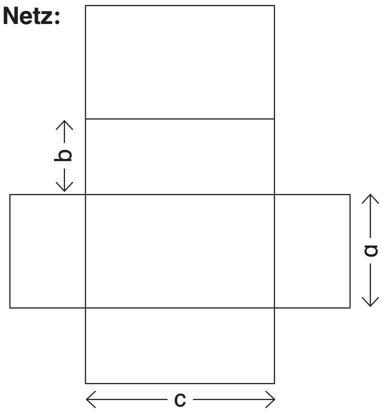


Schrägbild:

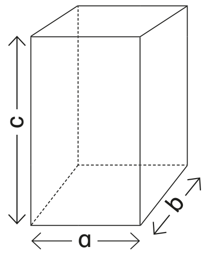


1b)

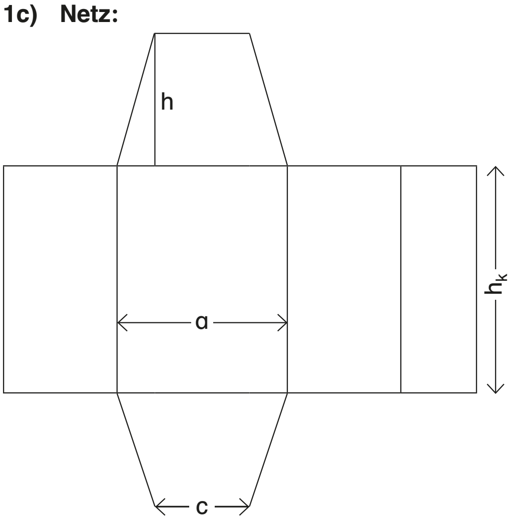
Netz:



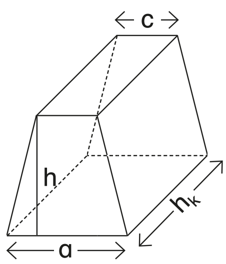
Schrägbild:



1c) Netz:

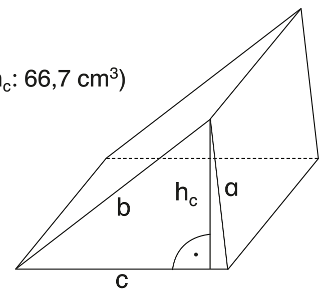


Schrägbild:



2 a) maßstabsgetreu verkleinert
2 b) $h_c = 4$ cm (gemessen) (berechnet: 3,97 cm); $V = 67{,}2$ cm³ (mit berechneter Höhe h_c: 66,7 cm³)
2 c) $O = 119$ cm²

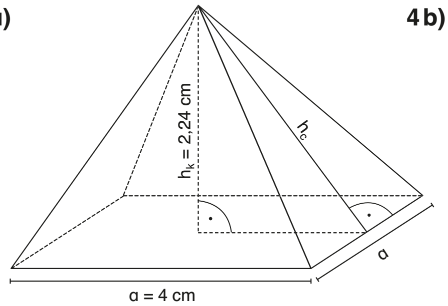
3) $V = 3180{,}86$ cm³; $O = 1201{,}66$ cm²



Koepsell/von Lehmden: Kompetenztests Mathe 9/10

Andreas Koepsell/Susanne von Lehmden: Kompetenztests Mathe 9/10
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH Donauwörth · ▶ 06573

4 a)



4 b) $V = 11,95\ cm^3$; $O = 40\ cm^2$

5) $r = 12,4$ cm; $O = 1\,936,6\ cm^2$; $1,12 \cdot O = 2\,169\ cm^2$

6) $376,99\ cm^3$

7 a) (ohne Zeichnung) 146,6 m $\Rightarrow$ 7,3 cm; 238,7 m $\Rightarrow$ 11,9 cm **7 b)** $2\,784\,309,78\ m^3$

8 a) $314,16\ cm^3$ **8 b)** $282,74\ cm^2$

9 a) h = 19,9 m, $A = 547,25\ m^2$ **9 b)** 6 567 000 000 Liter

10)

	a)	**b)**	**c)**	**d)**
r	**35 m**	**25 m**	**4 m**	*8 m*
h_k	*16,93 m*	*20,0 m*	*2,00 m*	**22 m**
V	**65 144,1 m³**	*39 269,91 m³*	*100,54 m³*	**4 423,36 m³**
O	*11 419,4 m²*	*7 068,58 m²*	**150,8 m²**	*1 507,96 m²*
M	*3 722,5 m²*	**3 141,59 m²**	*50,27 m²*	*1 105,84 m²*

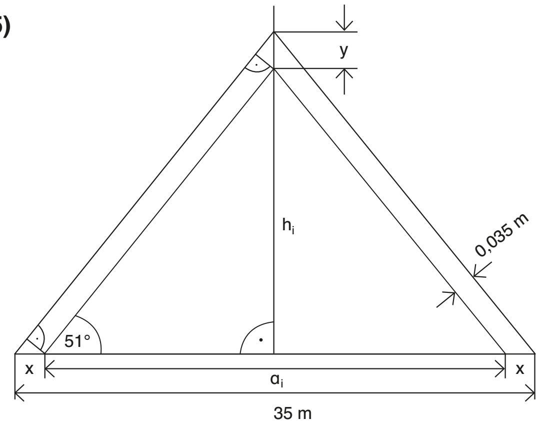
11) 49,99 m

12 a) 5,04 cm **12 b)** 3,26 cm **12 c)** $V = 86,72\ cm^3$; $O = 174,8\ cm^2$

13 a) $723,86\ cm^3$ **13 b)** Eine Vollkugel würde 6,01 kg wiegen. **13 c)** $494,95\ cm^3$ **13 d)** 0,66 cm

14 a) 12,5 cm **14 b)** 8,84 cm

15)



15 a) h = 21,61 m **15 b)** $V = 8\,824,08\ m^3$

15 c) $\sin 51° = \dfrac{0,035\ m}{x} \Rightarrow x = 0,045\ m;\ a_i = 34,91\ m$

$\cos 51° = \dfrac{0,035\ m}{y} \Rightarrow y = 0,0556\ m;\ h_i = 21,554\ m$

$V_i = 8\,756,01\ m^3$

$V_{Diff} = 68,07\ m^3 = 68\,070\,000\ cm^3$

$m = \rho \cdot V$
$= 170,175\ t$
$= 170\ t$

16 a) Differenz 5,77 cm **16 b)** Differenz $192,3\ cm^3$ **16 c)** Differenz 173,07 g