2 Anwendung der Laplace-Transformation auf gewöhnliche Differenzialgleichungen

2.1 Häufig auftretender Typ von Differenzialgleichungen

Das dynamische Verhalten technischer Systeme wird häufig, zumindest näherungsweise, durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Eine wirksame mathematische Methode zu ihrer Lösung ist die Laplace-Transformation. Solche Differenzialgleichungen treten z. B. in der Mechanik bei der Beschreibung von Feder-Masse-Dämpfungs-Systemen auf, in der Elektrotechnik bei Netzwerken, die aus Ohmschen Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten bestehen, aber auch sonst in unzähligen Anwendungsproblemen.

Ehe wir zur Anwendung der Laplace-Transformation übergehen, soll wenigstens an zwei Beispielen, die unter vielen herausgegriffen sind, die Entstehung und der Typ solcher Differenzialgleichungen gezeigt werden.

Als erstes betrachten wir ein elektromechanisches System aus der Energietechnik, nämlich einen **konstant erregten Gleichstrommotor**, der eine Last, z. B. eine Arbeitsmaschine, antreibt. Bild 2/1 zeigt die grundsätzliche Anordnung.

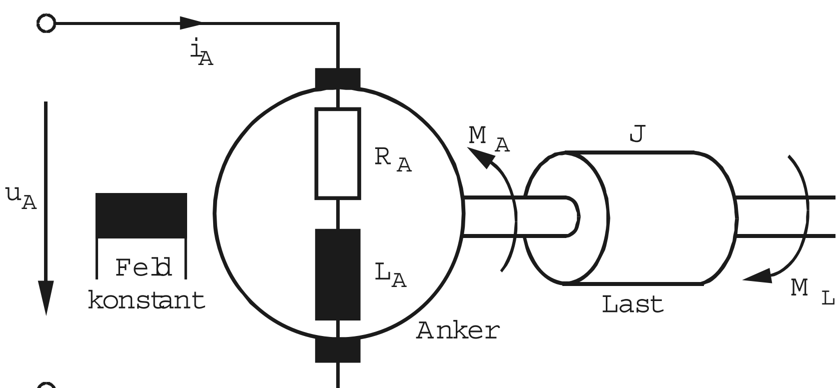

Bild 2/1: Gleichstrommotor mit Last

Der Widerstand R_A und die Induktivität L_A des Ankerkreises sind in den Motoranker eingezeichnet. Dieser sei starr mit der von ihm angetriebenen Last gekoppelt. J sei ihr gemeinsames Trägheitsmoment. Da die zur Winkelgeschwindigkeit ω proportionale Gegen-EMK des Motors

$$e_M = k_M \omega$$

der von außen angelegten Ankerspannung $u_A(t)$ entgegenwirkt, gilt die Maschinengleichung

$$u_A - k_M \omega = R_A i_A + L_A i'_A \quad .$$

Für die mechanische Seite gilt nach dem 2. Newton´schen Gesetz für Drehbewegungen

$$J\omega' = M_A - M_L \quad ,$$

wobei $M_L(t)$ das Lastmoment und

$$M_A = k_A i_A$$

das zum Ankerstrom proportionale Antriebsmoment des Motors ist.

Damit hat man ein System von zwei Differenzialgleichungen 1. Ordnung, welche das Verhalten des Motors beschreiben:

$$L_A i'_A + R_A i_A + k_M \omega = u_A(t) \qquad \text{(Elektrische Gleichung),}$$

$$J\omega' - k_A i_A = -M_L(t) \qquad \text{(Mechanische Gleichung).}$$

Man kann mit diesem System von Differenzialgleichungen weiterarbeiten. Man kann es aber auch in *eine* Differenzialgleichung 2. Ordnung verwandeln. Da man sich meist für ω in Abhängigkeit von den äußeren Größen u_A und M_L interessiert, löst man die zweite Differenzialgleichung nach i_A auf und setzt dann i_A in die erste Differenzialgleichung ein. Wegen

$$i_A = \frac{J}{k_A}\omega' + \frac{1}{k_A}M_L \quad \text{, also}$$

$$i'_A = \frac{J}{k_A}\omega'' + \frac{1}{k_A}M'_L$$

erhält man so:

$$\frac{JL_A}{k_A}\omega''+\frac{JR_A}{k_A}\omega'+k_M\omega=u_A-\frac{R_A}{k_A}M_L-\frac{L_A}{k_A}M'_L \quad . \tag{2.1}$$

Setzt man hierin $M_L = 0$ bzw. $u_A = 0$, so erhält man die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von u_A bzw. M_L allein.

Als Beispiel aus der Nachrichtentechnik werde ein **Operationsverstärker** betrachtet, der dazu benutzt wird, bestimmte mathematische Operationen, z. B. die Integration, nachzubilden. Bild 2/2 zeigt die prinzipielle Anordnung. Dabei kommt es uns nicht auf die physikalischen Vorgänge im Verstärker an, sondern lediglich auf die Beziehung zwischen der Eingangsspannung $u_e(t)$ und der Ausgangsspannung $u_a(t)$ des beschalteten Verstärkers.

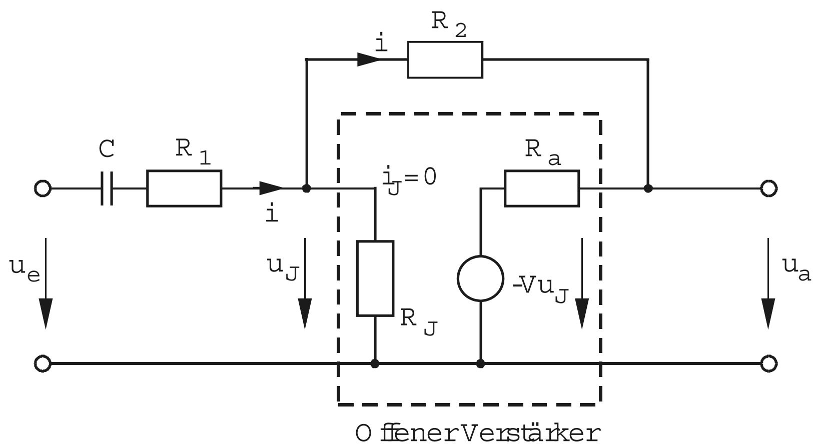

Bild 2/2: Operationsverstärker

Es handelt sich um einen Gleichspannungsverstärker mit großem negativem Verstärkungsfaktor –V, hohem Eingangswiderstand $(R_J = \infty)$ und vernachlässigbarem Ausgangswiderstand $(R_A = 0)$, der mit RC-Netzwerken beschaltet wird. Im Bild 2/2 ist der unbeschaltete Verstärker durch eine unterbrochene Linie umgrenzt.

Aus Bild 2/2 folgt:

$$u_e = \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau + R_1 + u_J \tag{2.2}$$

$$u_J = R_2 i + u_a \quad , \text{ da } R_J = \infty \text{ , also } i_J = 0 \quad ; \tag{2.3}$$

$$u_a = -Vu_J \quad , \text{ da } R_a = 0 \quad . \tag{2.4}$$

Aus (2.4) folgt

$$u_J = -\frac{u_a}{V} \approx 0 \quad ,$$

da V sehr groß ist. Damit wird aus (2.2) und (2.3)

$$u_e = \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau + R_1 i \quad ,$$

$$i = -\frac{u_a}{R_2} \quad .$$

Setzt man die letzte Gleichung in die vorhergehende ein, so ergibt sich

$$u_e = -\frac{1}{R_2 C}\int_0^t u_a d\tau - \frac{R_1}{R_2} u_a \quad .$$

Durch Differenzieren folgt hieraus

$$u'_e = -\frac{1}{R_2 C} u_a - \frac{R_1}{R_2} u'_a \quad \text{oder}$$

$$R_1 C u'_a + u_a = -R_2 C u'_e \quad . \tag{2.5}$$

Wie man sieht, werden nicht nur RLC-Netzwerke, sondern auch Verstärkerschaltungen durch gewöhnliche Differenzialgleichungen beschrieben, die allerdings nicht immer wie in diesem Fall linear zu sein brauchen.

Diese Beispiele, die sich beliebig vermehren ließen, zeigen den Typ der Differenzialgleichung, durch die in vielen Fällen ein technisches System beschrieben werden kann. Es gibt eine zeitveränderliche Größe, die von außen auf das System einwirkt, ohne selbst von ihm beeinflusst zu sein: die **Eingangsgröße** (oder Anregung), die wir im allgemeinen Fall mit $u(t)$ bezeichnen wollen. Es gibt eine weitere zeitveränderliche Größe des Systems, deren Zeitverhalten interessiert, z. B. deshalb, weil sie in einem übergeordneten System eine Rolle spielt: die **Ausgangsgröße**, die im allgemeinen Fall mit $y(t)$ bezeichnet sei. Beide werden durch eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten verknüpft, die folgendes Aussehen hat:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_0 u + b_1 u' + \ldots + b_n u^{(n)} \quad . \tag{2.6}$$

Dabei sind die a_ν und b_ν reelle Zahlen, $a_n \neq 0$ und mindestens ein $b_\nu \neq 0$ (aber nicht unbedingt b_n).

Von den aus der Mathematik geläufigen linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten unterscheidet sich (2.6) dadurch, dass auf der rechten Seite nicht nur die Eingangsgröße u selbst auftritt, sondern zusätzlich Ableitungen vorkommen können. Das hat beträchtliche Auswirkungen auf die dynamischen Eigenschaften des Systems.

Gibt es mehrere Eingangsgrößen wie im Beispiel des Gleichstrommotors, so kann man alle bis auf eine Null setzen und hat dann die Gleichung (2.6). Zu jeder Eingangsgröße gehört so eine Differenzialgleichung vom Typ (2.6) und damit eine Ausgangsgröße. Diejenige Ausgangsgröße, die sich bei gleichzeitiger Einwirkung mehrerer Eingangsgrößen ergibt, erhält man durch Überlagerung dieser einzelnen Lösungen.
Die Aufgabe besteht nun darin, aus der gegebenen Funktion $u(t), t > 0$, und gegebenen Anfangsbedingungen die Ausgangsgröße $y(t)$ der Differenzialgleichung (2.6) für $t > 0$ mittels der Laplace-Transformation zu berechnen.

Es liegt auf der Hand, dass wir zunächst einmal wissen müssen, was aus der Ableitung $f'(t)$ einer Funktion $f(t)$ bei der Laplace-Transformation wird. Dies wird durch eine Regel beschrieben, welche man als „Differenziationsregel für die Originalfunktion“ bezeichnet und die wir nun herleiten wollen.

2.2 Differenziationsregel für die Originalfunktion

Wir betrachten eine Funktion $f(t)$, die für $t > 0$ differenzierbar und damit auch stetig sein soll, aber in $t = 0$ eine Sprungstelle haben darf (Bild 2/3), die z. B. durch einen Einschaltvorgang verursacht ist.

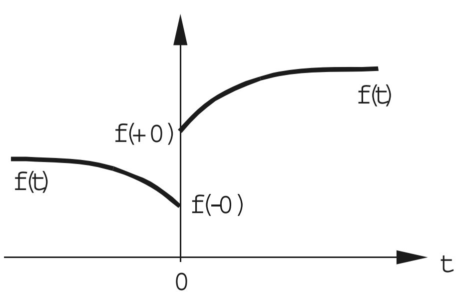

Bild 2/3: Sprungstelle in t = 0

Im Bild 2/3 ist

$$f(-0) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t<0}} f(t)$$