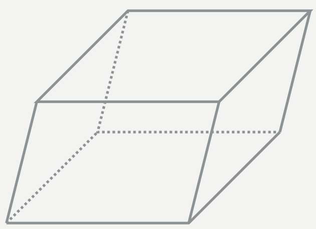
Abitur

Intensivkurs Mathematik

# Lineare Gleichungssysteme und Vektorgeometrie

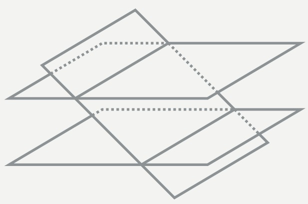
## Die optimale Vorbereitung auf das Abitur



$$|\vec{n}| = 7$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



+ Erklärung des gesamten Stoffes
+ Aufgaben auf allen Niveaustufen
+ mit allen Lösungswegen

Florian Timmermann
www.intensivkurs-mathematik.de

http://www.intensivkurs-mathematik.de

1. Auflage, 1. Druck 2016



Druck: WIRmachenDRUCK GmbH, Backnang

ISBN: 978-3-9817902-1-4

# Inhaltsverzeichnis

# Arbeiten mit dem Buch

Liebe Schüler/innen,

Dieses Buch soll Ihnen die Vorbereitung auf die anstehenden Abiturprüfungen erleichtern, egal aus welchem Bundesland Sie kommen. Es setzt sich aus den folgenden Abschnitten zusammen:

- **Bezeichnungen und Grundlagen**: Hier werden die wichtigsten Bezeichnungen und Symbole zusammengefasst.
- **Theorie & Aufgaben**: Nach einem Theorieteil werden jeweils Aufgaben zu dem entsprechenden Thema gestellt. Die Aufgaben unterscheiden sich – wie im Abitur auch – sowohl in den Kompetenzen (bloßes Rechnen, erklären, darstellen, ...) als auch im Schwierigkeitsgrad (● leicht, ●● mittel, ●●● schwer). Alle Aufgaben, die per Hand gerechnet werden müssen, haben **einfache Lösungen**.
- **Lösungen**: Hier stelle ich Ihnen alle Lösungen inklusive der Lösungswege zur Verfügung. Gelegentlich kann es auch alternative Lösungswege geben. Versuchen Sie bitte stets, die Aufgaben zu lösen, ohne einen Blick auf die Lösungen zu werfen. Erst wenn Sie nach zwei Versuchen nicht auf die Lösung kommen, sollten Sie sich diese ansehen.

Einige graphische Elemente sollen Ihnen die Arbeit im Buch zusätzlich erleichtern.

- Die wichtigsten Aufgaben sind rot markiert (z.B. **115.**). Sie bilden den Schwerpunkt der Abiturvorbereitung.
- Bei den mit 🖩 markierten Aufgaben dürfen Sie einen wissenschaftlichen Taschenrechner einsetzen.
- Die mit ★ markierten Aufgaben haben einen Schwierigkeitsgrad über dem Schulniveau und müssen im Abitur nicht beherrscht werden. Mit ihnen können Sie aber einen Blick über den Tellerrand der Schulmathematik werfen.
- Kapitel, die eher selten im Unterricht behandelt werden, sind mit * gekennzeichnet.

Auf der Internetseite

http://www.intensivkurs-mathematik.de

erhalten Sie zusätzliche Informationen sowie eine Übersicht über die weiteren Bücher dieser Reihe.
Nun wünsche ich Ihnen eine erfolgreiche Vorbereitung auf die Abiturprüfungen in Mathematik!

# Teil I.

# Theorie & Aufgaben

## 1.3. Gauß-Verfahren

Liegt ein lineares Gleichungssystem bzw. die dazugehörige Koeffizientenmatrix **A** in oberer Dreiecksform (*Stufenform*) vor, dann ist die Lösung durch *Rückwärtseinsetzen* leicht zu bestimmen.

Beispiel

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem durch Rückwärtseinsetzen.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \phantom{6}x_3 &= 7 \\ x_2 - 6x_3 &= -4 \\ 20x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Lösung

Wir bezeichnen die einzelnen Gleichungen mit römischen Zahlen. Wir lösen III nach $x_3$ auf: $20x_3 = 20 \Rightarrow x_3 = 1$. Nun setzen wir $x_3$ in II ein: $x_2 - 6 \cdot 1 = -4 \Rightarrow x_2 = 2$. Dann setzen wir $x_2$, $x_3$ in I ein: $x_1 + 2 + 1 = 7 \Rightarrow x_1 = 4$. Somit erhalten wir die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(4;\ 2;\ 1)\}$.

Unser Ziel ist es nun, jedes lineare Gleichungssystem in die Stufenform umzuformen. Hier hilft uns das *Gauß-Verfahren*. Bei diesem wird die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \vec{b})$ Spalte für Spalte mit Hilfe von *Gauß-Schritten* in Stufenform gebracht. Dabei müssen alle Zahlen unter den Diagonalelementen den Wert 0 annehmen. In einem Gauß-Schritt sind folgende Äquivalenzumformungen erlaubt:

- Zeilen untereinander vertauschen (z.B. $\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}$)
- eine Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren (z.B. $2 \cdot \mathrm{I}$)
- eine Zeile mit einer anderen Zeile (oder einem Vielfachen) addieren bzw. von ihr subtrahieren (z.B. $\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}$)

Interpretieren wir ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten $x_1$, $x_2$ und $x_3$ geometrisch, so entspricht jede Gleichung einer Ebene im dreidimensionalen Raum. Ein lineares Gleichungssystem ist dann eindeutig lösbar, wenn sich die drei Ebenen in genau einem Punkt $S(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ schneiden (Abb. 1.4).

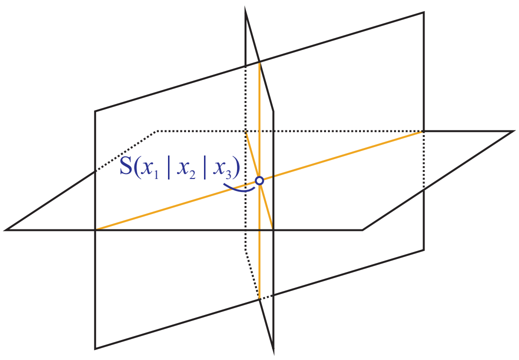



Abb. 1.4.: Geometrische Visualisierung *eindeutig lösbarer* linearer Gleichungssysteme

**Hinweise zum Erkennen eines geeigneten Gauß-Schrittes**

Stets vergleichen wir das Diagonalelement (**blau**) mit den darunterliegenden Werten (**orange**). Wir müssen den Umformungsschritt so wählen, dass diese orangen Zahlen den Wert 0 annehmen. Wir stellen die wichtigsten Fälle vor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & * & * & * \\ \mathbf{2} & * & * & * \\ \mathbf{-1} & * & * & * \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+1\cdot\text{I}]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & * & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & * \end{array}\right)$$

Im ersten Schritt überlegen wir beim Vergleich von blauem und orangem Wert, mit welchem Vielfachen wir den kleineren Wert jeweils multiplizieren müssen, damit wir den größeren Wert erhalten. Dieses Vielfache der Zeile müssen wir dann jeweils addieren bzw. subtrahieren, um eine Null zu erhalten. Dabei wird die zu aktualisierende Zeile immer zuerst geschrieben. Hier: $\text{II} - 2 \cdot \text{I}$ und $\text{III} + 1 \cdot \text{I}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & * & * & * \\ \mathbf{2} & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & * & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right)$$

Steht in einem Diagonalelement eine Null, so muss man diese Zeile „nach unten tauschen“. Hier: $\text{I} \leftrightarrow \text{II}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & * & * & * \\ 0 & \mathbf{1} & * & * \\ 0 & \mathbf{3} & * & * \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-3\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & * & * & * \\ 0 & \mathbf{1} & * & * \\ 0 & \mathbf{0} & * & * \end{array}\right)$$

Um in der *zweiten* Spalte den orangen Wert unter dem Diagonalelement zu Null werden zu lassen, wählen wir das Diagonalelement aus der *zweiten* Zeile als Vergleichswert. Hier: $\text{III} - 3 \cdot \text{II}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & * & * & * \\ 0 & \mathbf{3} & * & * \\ 0 & \mathbf{5} & * & * \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot\text{III}-5\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & * & * & * \\ 0 & \mathbf{3} & * & * \\ 0 & \mathbf{0} & * & * \end{array}\right)$$

Vergleichen wir in einem Gauß-Schritt zwei Elemente mit Werten $\neq 0$, so versuchen wir stets, mit ganzzahligen Werten weiterzurechnen. Das Multiplizieren „über Kreuz“ ist dabei immer ein geeigneter Schritt. Hier: **3** $\cdot$ III – **5** $\cdot$ II.

**Beispiel**

Bringen Sie das lineare Gleichungssystem in obere Dreiecksform.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

**Lösung**

In der verkürzten Schreibweise berechnen wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-3\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right)$$

Nun kann die Aufgabe durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden (siehe voriges Beispiel).

- **6.** Ergänzen Sie die fehlenden Werte.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 9 & 17 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{II}+\text{I} \\ \text{III}-4\cdot\text{I}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ \square & \square & \square & 6 \\ \square & 1 & \square & \square \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & \square & \square & 6 \\ 0 & \square & 2 & \square \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -4 & 8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\square \\ \square}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 10 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\square} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \end{array}\right)$

- **7.** Erläutern Sie die Umformungsschritte in diesem Lösungsweg des linearen Gleichungssystems.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot\text{II}+3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 10 & -3 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & -18 & 7 \end{array}\right)$$

- **8.** Welche Schritte bringen die Koeffizientenmatrix näher an die Stufenform? Begründen Sie.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 6 \end{array}\right)$ (b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Mögliche Umformungen:

(i) II − I (ii) 2 · II − I (iii) 2 · I − II (iv) III − 2 · I (v) 2 · III − I (vi) 4 · III − II

- **9.** Finden Sie alle Rechenfehler und verbessern Sie.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2\cdot\text{II}+\text{I} \\ \text{III}-3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- **10.** Berechnen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

(a) $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 4 \\ -8x_1 + 3x_2 &= 7 \end{aligned}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

- **11.** Berechnen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 15 \\ 4x_1 - x_2 + 10x_3 &= -3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 12x_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

•• **12.** Berechnen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{+ x_3} + x_4 &= 0 \\ 2x_2 \phantom{+ x_3} - x_4 &= 8 \\ 3x_1 \phantom{+ x_2} + x_3 \phantom{+ x_4} &= 1 \\ 4x_2 - 3x_3 \phantom{+ x_4} &= 0 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_4 &= 8 \end{aligned}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

•• **13.** Berechnen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit des Parameters $k$ mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 &= 3k \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -3k \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= k \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 3k \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2k \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15k - 3 \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4k - 2 \end{aligned}$

•• **14.** Zahlenrätsel erfreuen sich großer Beliebtheit.

(a) Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen in Abb. 1.5 so, dass die Summe in jedem der drei Kreise genau 100 beträgt. Begründen Sie Ihre Lösung mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems.

(b) Erfinden Sie ein eigenes Bilderrätsel mit drei Unbekannten, das mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems gelöst werden kann.

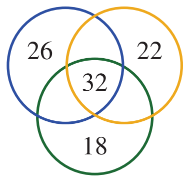



Abb. 1.5.: Schaubild zu Aufgabe 14

•• **15.** Eine ganzrationale Funktion dritten Grades verläuft durch die Punkte P(−1 | −6), Q(0 | −2), R(1 | −2) und S(2 | 0). Berechnen Sie den Funktionsterm.

••• **16.** Finden Sie je ein lineares Gleichungssystem, das die angegebene Lösungsmenge hat.

(a) $\mathbb{L} = \{(-1; 3)\}$

(b) $\mathbb{L} = \{(2; 4; 1)\}$

••• **17.** In Abb. 1.6 ist ein Zahlenmuster gegeben. Die Summe der Zahlen auf jeder Dreiecksseite soll genau den Wert $S \in \mathbb{R}$ ergeben.

(a) Ermitteln Sie rechnerisch die Zahlen in den leeren Feldern in Abhängigkeit von $S$, damit die Bedingung erfüllt ist.

(b) Für welchen Wert von $S$ ist die Summe aller gesuchten Zahlen gleich 111?

(c) Wie groß muss $S$ mindestens sein, damit jede gesuchte Zahl positiv ist?

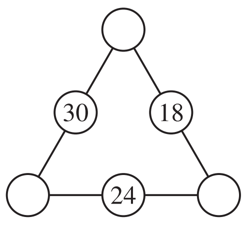



Abb. 1.6.: Schaubild zu Aufgabe 17

••• **18.** Tim, Sophie und Mareike wollen in ihrem gemeinsamen Garten alle Äpfel ernten. Würden nur Tim und Sophie pflücken, so würden sie 6h 40min benötigen, Sophie und Mareike würden 5h benötigen, Tim und Mareike würden 4h benötigen. Wie viel Zeit würden die drei benötigen, wenn sie alle gemeinsam pflücken würden?

★ **19.** (*Nichtlineares Gleichungssystem*) Gesucht ist eine dreistellige Zahl. Ihre Quersumme beträgt 8. Die Summe der Quadrate ihrer Ziffern beträgt 26. Addieren wir 198 zu unserer Zahl, so erhalten wir eine Zahl, die aus den Ziffern der gesuchten Zahl in umgekehrter Reihenfolge besteht.

## 3.2. Darstellung von Ebenen

Eine *Ebene* ist in der *Parameterform* definiert durch einen *Stützvektor* (= Ortsvektor des *Aufhängepunktes*) und zwei *Richtungsvektoren*.

$$E\colon \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektoren}},$$

wobei $s, t \in \mathbb{R}$. Jeder Kombination von $(s, t)$ entspricht einem eigenen Punkt in der Ebene (Abb. 3.5). Bei allen nun folgenden Ebenen werden wir aus Gründen der Übersichtlichkeit auf diesen Zusatz verzichten, wohlwissend dass eine Ebene weiterhin eine Punktmenge aus vielen Punkten ist, deren Koordinaten von genau diesen $s$ und $t$ abhängig sind.

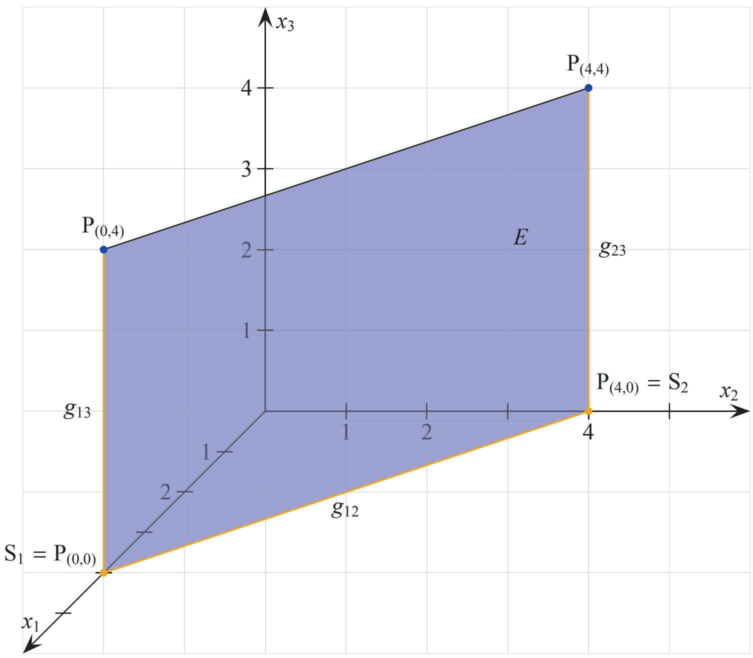



Abb. 3.5.: Schaubild zur gegebenen Ebene inkl. Spurpunkte und Spurgeraden

Besondere Ebenen sind:

$$E_{12}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$

$x_1x_2$-Ebene

$$E_{13}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$

$x_1x_3$-Ebene

$$E_{23}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$x_1 = 0$

$x_2x_3$-Ebene

*Hinweis*: Um eine Ebene aus gegebenen Informationen aufzustellen, müssen wir stets einen Aufhängepunkt und zwei Richtungsvektoren ermitteln.

**Beispiel**

Geben Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform an, die durch die Punkte A(1 | 2 | 1), B(4 | 3 | 3) und C(2 | 0 | 2) verläuft.

**Lösung**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Definition 3.3 (Spurpunkt und Spurgerade):**

(a) Die *Spurpunkte* einer Ebene sind ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(b) Die *Spurgeraden* einer Ebene sind ihre Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen.

**Beispiel**

Es ist die Ebene $E$ aus dem Eingangsbeispiel gegeben. Berechnen Sie

(a) die Spurpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen.

(b) die Spurgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen.

**Lösung**

Schaubild siehe Abb. 3.5. Wir berechnen

(a) Spurpunkt mit der $x_1$-Achse ($x_2 = x_3 = 0$): II: $4 - s = 0 \Rightarrow s = 4 \Rightarrow$ S$_1$(4 | 0 | 0). Spurpunkt mit der $x_2$-Achse ($x_1 = x_3 = 0$): I: $s = 0$, III: $t = 0 \Rightarrow$ S$_2$(0 | 4 | 0). Spurpunkt mit der $x_3$-Achse ($x_1 = x_2 = 0$): I: $s = 0$, III: $4 - s = 0 \Rightarrow s = 4 \neq 0 \Rightarrow$ kein Spurpunkt.

(b) Spurgerade mit der $x_1x_2$-Ebene ($x_3 = 0$): III: $t = 0 \Rightarrow g_{12}$. Spurgerade mit der $x_1x_3$-Ebene ($x_2 = 0$): II: $4 - s = 0 \Rightarrow s = 4 \Rightarrow g_{13}$. Spurgerade mit der $x_2x_3$-Ebene ($x_1 = 0$): I: $s = 0 \Rightarrow g_{23}$. Wir erhalten

$$g_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• **147.** Es ist die Ebene $E$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte für $(s,t) \in \{(-2, -4); (-1, -2); (-1, 1); (2, -2); (2, 1); (2, 4)\}$ in der Ebene an.

(b) Zeichnen Sie die Ebene in ein geeignetes Koordinatensystem.

(c) Prüfen Sie, ob der Punkt P(0 | 7 | 2) in der Ebene enthalten ist.

• **148.** Geben Sie die fehlenden Koordinaten an, so dass der Punkt P in der Ebene $E$ enthalten ist.

(a) P(0 | $\square$ | 9), $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}$  (b) P(2 | −1 | 3), $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\\square\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}$

• **149.** Geben Sie die Gleichung der Ebene in Parameterform an, die

(a) durch die Punkte A(3 | 0 | 0), B(6 | 1 | 2) und C(4 | 1 | −2) verläuft.

(b) durch den Punkt A(2 | 4 | 1) verläuft und die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ enthält.

(c) die zueinander parallelen Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ enthält.

(d) die sich schneidenden Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\\-8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$ enthält.

•• **150.** In Abb. 3.6 sind Ausschnitte von Ebenen dargestellt. Ermitteln Sie jeweils eine Parametergleichung.

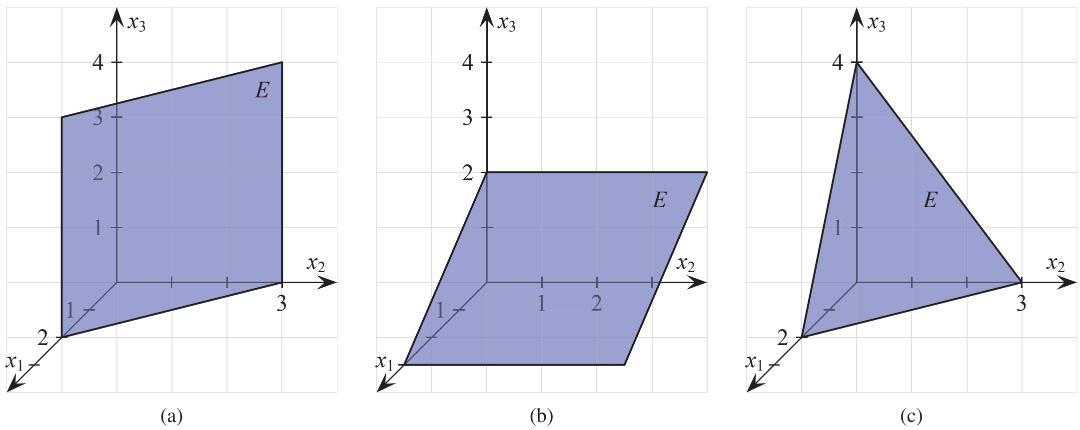



Abb. 3.6.: Schaubilder zu Aufgabe 150

•• **151.** Tim sagt: „Die Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ sehen zwar auf den ersten Blick unterschiedlich aus, sind aber vollkommen identisch.“

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix},\quad E_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

(a) Begründen Sie, dass Tim Recht hat.

(b) Geben Sie eine weitere Darstellung der Ebene an, die über einen unterschiedlichen Aufhängepunkt und andere Richtungsvektoren verfügt.

●● **152.** Es sind die vier Punkte A(1 | 3 | 1), B(2 | 2 | −4), C(3 | 1 | 1) und D(4 | 0 | 1) gegeben. Zeigen Sie

(a) mit Hilfe Ihres Wissens über Ebenen,

(b) mit Hilfe des Spatprodukts,

dass A, B, C und D auf einer gemeinsamen Ebene liegen.

●● **153.** Ermitteln Sie für die Ebene $E$ sowohl die Spurpunkte mit den Koordinatenachsen als auch die Spurgeraden mit den Koordinatenebenen.

(a) $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$ (b) $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}$ (c) $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$

●●● **154.** Es ist für $a \in \mathbb{R}$ eine Ebenenschar $E_a$ gegeben:

$$E_a : \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\a\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

*Hinweis*: Ist eine Ebene von einem (Schar-)Parameter $a$ abhängig, so nennt man sie *Ebenenschar*. Für jeden Wert von $a$ ergibt sich eine eigene (Schar-)Ebene.

(a) Zeigen Sie: Jede Scharebene $E_a$ verläuft durch den Punkt S(3,5 | 0 | 0).

(b) Für welchen Wert von $a$ enthält $E_a$ den Punkt P(5 | 0 | 6)?

●●● **155.** Für welche Geradenpaare lässt sich genau eine Ebene angeben, die beide Geraden $g$ und $h$ enthält?

(a) $g$ und $h$ haben den gemeinsamen Schnittpunkt P.

(b) $g$ und $h$ verlaufen echt parallel.

(c) $g$ und $h$ sind windschief.

●●● **156.** Geben Sie die Gleichung derjenigen Ebene an, die sich gleichzeitig durch die folgenden Eigenschaften auszeichnet:

- Sie verläuft durch den Punkt P(1 | −3 | 5).
- Ihre Spurpunkte mit der $x_2$ und $x_3$-Achse sind jeweils doppelt so weit vom Ursprung entfernt wie ihr Spurpunkt mit der $x_1$-Achse.
- Sie verläuft nicht durch den Koordinatenursprung.

# Teil II.

# Lösungen

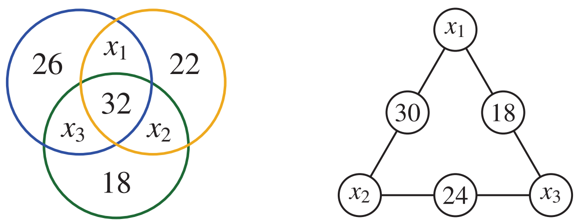
**17.** (a) Wir legen die drei gesuchten Zahlen wie in Abb. 4.1b fest. Dann berechnen wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & S-30 \\ 1 & 0 & 1 & S-18 \\ 0 & 1 & 1 & S-24 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & S-30 \\ 0 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & S-24 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & S-30 \\ 0 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & S-12 \end{array}\right)$$

Wir lösen III nach $x_3$ auf: $2x_3 = S - 12 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}S - 6$. Wir setzen $x_3$ in II ein: $-x_2 + \frac{1}{2}S - 6 = 12 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}S - 18$. Wir setzen $x_2$ in I ein: $x_1 + \frac{1}{2}S - 18 = S - 30 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}S - 12$. Somit erhalten wir die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(\frac{1}{2}S - 12;\ \frac{1}{2}S - 18;\ \frac{1}{2}S - 6)\}$.

(b) Es gilt $\frac{1}{2}S - 12 + \frac{1}{2}S - 18 + \frac{1}{2}S - 6 = 111 \Rightarrow S = 98$.

(c) Damit die kleinste Komponente $x_2$ positiv ist, muss gelten: $\frac{1}{2}S - 18 > 0 \Rightarrow S > 36$. Alle weiteren Komponenten sind dann auch positiv.




(a) Lösungsskizze zu Aufgabe 14 (b) Lösungsskizze zu Aufgabe 17

Abb. 4.1.: Lösungsschema der Zahlenrätsel

**18.** Mit $x_i$ bezeichnen wir den Gesamtanteil des Apfelbestandes (in %), den die Personen pro Stunde pflücken können. Tim und Sophie pflücken in einer Stunde genau $\frac{1\,\text{h}}{6{,}67\,\text{h}} = 15\%$ des Bestandes, Sophie und Mareike $\frac{1\,\text{h}}{5\,\text{h}} = 20\%$, Tim und Mareike $\frac{1\,\text{h}}{4\,\text{h}} = 25\%$. Somit erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right).$$

Wir berechnen die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(10;\ 5;\ 15)\}$. Gemeinsam pflücken die drei also 30% des Bestandes in einer Stunde und somit den gesamten Bestand in $\frac{100}{30}\,\text{h} = 3\,\text{h}\ 20\,\text{min}$.

**19.** $x \mathrel{\hat{=}}$ Hunderterziffer, $y \mathrel{\hat{=}}$ Zehnerziffer, $z \mathrel{\hat{=}}$ Einerziffer. Mit den Angaben erhalten wir das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 26 \\ 100x + 10y + z + 198 & = & 100z + 10y + x \end{array}$$

Wir drücken in I und III jeweils $y$ und $z$ in Abhängigkeit von $x$ aus und erhalten für II: $x^2 + (6 - 2x)^2 + (x + 2)^2 = 26 \Rightarrow x = 1$. Die gesuchte Zahl lautet 143.

Mit diesem Übungsbuch können Sie sich langfristig und gezielt auf die Abiturprüfung in Ihrem Bundesland vorbereiten.

Alle Grundlagen und die neuen Unterrichtsinhalte werden anschaulich und mit vielen Bildern erklärt

Für alle Aufgaben ist der Schwierigkeitsgrad angegeben. Alle Lösungswege stehen zur Verfügung und ermöglichen so eine individuelle und selbständige Vorbereitung.

mit „einfachen" Zahlen

viele Bilder

Beispielaufgaben

Erklärungen

viele Übungen

alle Lösungswege

individuell

für leistungsschwache und -starke Schüler

ISBN 978-3-9817902-1-4

9 783981 790214