Inhaltsverzeichnis

A Geometrische Abbildungen und Matrizen

Seite

1 Geometrische Abbildungen und Abbildungsgleichungen....4
2 Affine Abbildungen....6
3 Affine Abbildungen durch Matrizen....10
4 Spezielle Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen....12
5 Verkettung affiner Abbildungen - Matrizenprodukt....14
6 Umkehrabbildungen - Determinanten von Abbildungen....16
7 Eigenwerte und Eigenvektoren....18
8 Parallelprojektionen....20

B Prozesse und Matrizen

Seite

1 Prozesse mit Matrizen beschreiben....22
2 Zweistufige Übergangsprozesse der linearen Verflechtung....26
3 Austauschprozesse und Gleichgewichtsverteilung....30

C Stochastik 1

Seite

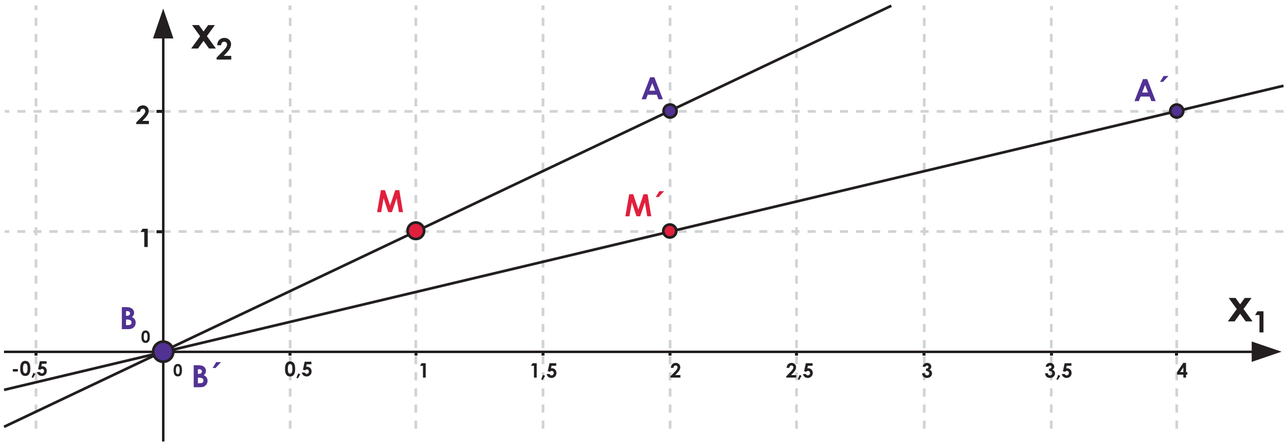
1 Zufallsexperimente beschreiben....34
2 Relative Häufigkeiten werden zu Wahrscheinlichkeiten....36
3 Mehrstufige Zufallsexperimente - Pfadregeln....38
4 Vierfeldertafel....40
5 Urnenmodelle....42
6 Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung....46
7 Binomialverteilung - Taschenrechner und Grafiken....48

D Stochastik 2

Seite

1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten....50
2 Satz von Bayes....54
3 Erwartungswert einer Zufallsgröße....56
4 Varianz und Sigmaregeln....58
5 Hypothesentest mit $\pi = \pi_0$ (zweiseitig)....62
6 Hypothesentest mit π (einseitig)....64
7 Gauss'sche Glockenfunktion....66
8 Normalverteilung ist überall....70

Affinität bedeutet Nähe oder Verwandtschaft und bezeichnet daher geometrische Abbildungen, die geradentreu und umkehrbar sind. Wenn eine Abbildung Geraden auf Geraden abbildet, spricht man von Geradentreue und wenn es zu jedem Bildpunkt genau einen Punkt als sogenanntes Urbild gibt, nennt man dies umkehrbar. Aus der Geradentreue und der Umkehrbarkeit folgt, dass affine Abbildungen parallelentreu und teilverhältnistreu sind. Das bedeutet, sie bilden zueinander parallele Geraden auf zueinander parallele Geraden ab. Außerdem wird angenommen, dass wenn ein Punkt des Urbilds zum Beispiel in der Mitte zwischen zwei anderen Punkten liegt, sich auch der entsprechende Bildpunkt in der Mitte zwischen den Bildpunkten der beiden anderen befindet.



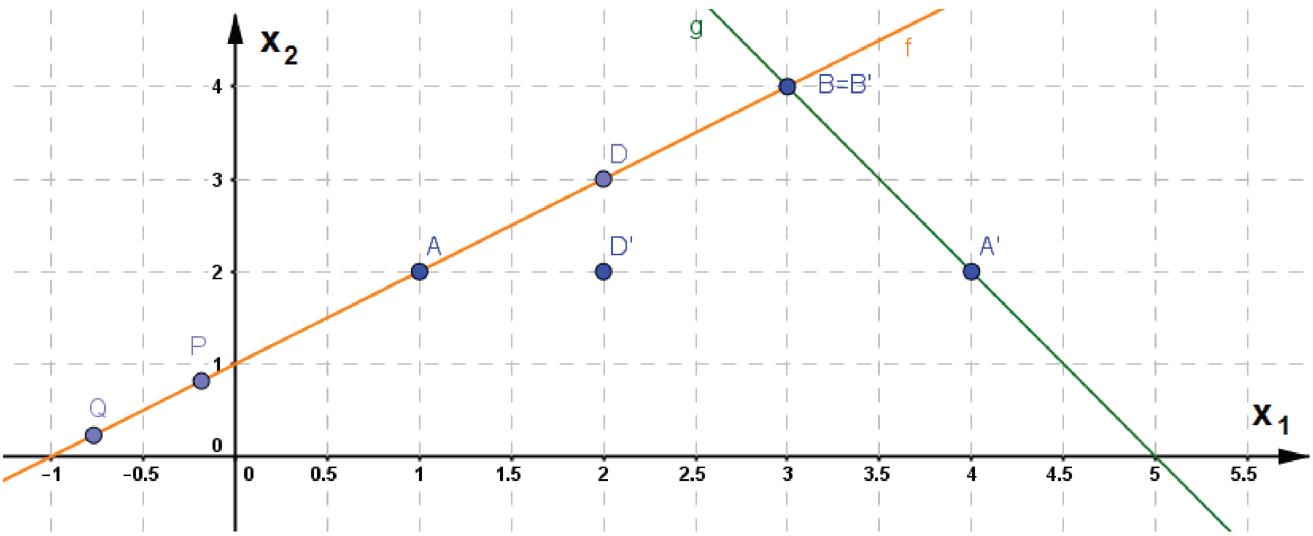
Jede affine Abbildung ist durch die Angabe von drei Punkten und ihren Bildpunkten festgelegt. Dabei dürfen die gesamten Punkte nur nicht auf einer Geraden liegen.

In der gezeigten Figur wird B auf sich selbst abgebildet, A auf A' und D auf D'. Bestimme im Folgenden

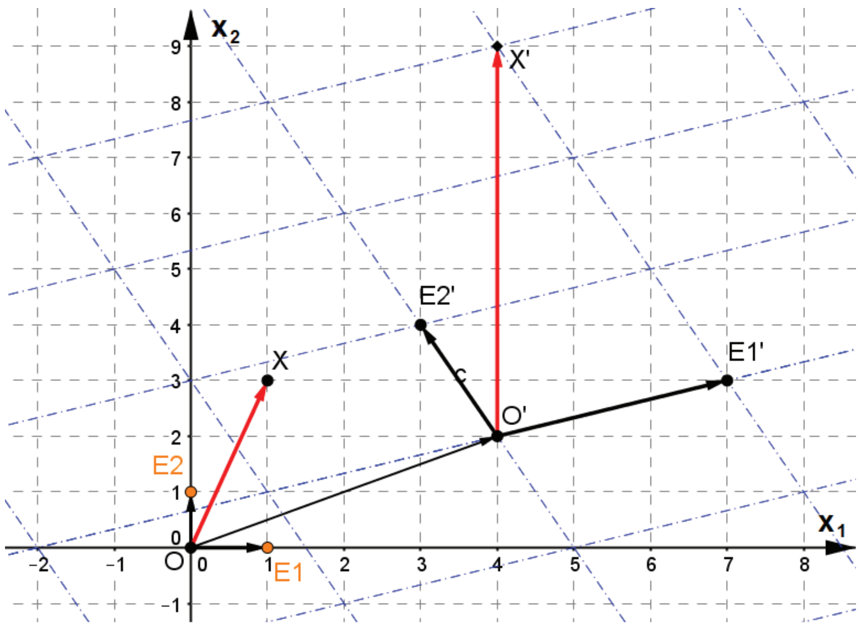
a) P' auf g

b) f'

c) Q' auf f'



Bei affinen Abbildungen lassen sich Bildpunkte durch logisches Denken erschließen. Noch einfacher geht es aber über Berechnungen. Da affine Abbildungen parallelentreu sind, lässt sich das ursprüngliche graue Koordinatengitter in ein zur Abbildung passendes blaues Parallelogrammgitter verwandeln.



Es ist sozusagen das affine Koordinatensystem der gegebenen Abbildung entstanden.
Aufgrund der Teilverhältnistreue wird der Punkt X (mit $\vec{x} = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$) auf den Punkt X' abgebildet. X' hat dabei den Ortsvektor $\vec{x'} = \overrightarrow{OO'} + x_1\,\overrightarrow{O'E_1'} + x_2\,\overrightarrow{O'E_2'}$. Wir wollen im Folgenden mit diesen Notationen arbeiten:

$$\overrightarrow{O'E_1'} = \vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{O'E_2'} = \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OO'} = \vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

Daraus erhält man die Matrixdarstellung einer affinen Abbildung:

$$\vec{x'} = A \cdot \vec{x} + \vec{c} \;=\; \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

Als Gleichungssystem aufgeschrieben:

$$x_1' = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1$$
$$x_2' = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2$$

Gegeben sind die Punkte O(2/1), B(4/9), C(3/10) und O'(2/3), B'(10/6), C'(9/7).

a) Bestimme die Matrixdarstellung dieser Abbildungsgleichung.

b) Berechne den Bildpunkt von P(3/7).

c) Bestimme die Bildgerade g' von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

a) Wir berechnen das affine Koordinatensystem $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{O'B'} = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{O'C'} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$

und stellen die Gleichung der Abbildung in Matrixschreibweise auf: $\alpha: \vec{x'} = \begin{pmatrix}8 & 7\\3 & 4\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

b) Damit bestimmen wir den Vektor zum Bildpunkt von P, indem wir den Vektor zum Punkt P in die Abbildungsgleichung einsetzen: $\vec{p}' = \begin{pmatrix}8 & 7\\3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}73\\39\end{pmatrix}$ Ergebnis: P'(73/39).

c) Die Geradengleichung setzen wir genauso wie eben P, in die Abbildungsgleichung ein:

$$g': \vec{x} = A \cdot \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} + r\left(A \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{g}' = \begin{pmatrix}8 & 7\\3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} + \mathrm{r}\left(\begin{pmatrix}8 & 7\\3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{g}' = \begin{pmatrix}73\\37\end{pmatrix} + \mathrm{r}\begin{pmatrix}15\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}73 + 15r\\39 + 7r\end{pmatrix}$$

zum Video

in Geradenschreibweise: $\vec{g}': \vec{x} = \begin{pmatrix}73\\39\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}15\\7\end{pmatrix}$

Man kann nun entweder mit einer gegebenen Abbildung α bestimmte Bildpunkte ermitteln oder mit Punkten und deren Bildpunkten eine Abbildung α festlegen. Ist O ein Fixpunkt, so entsprechen die Spalten der Matrix A den Ortsvektoren der Bildpunkte von E_1 und E_2.

Übungen

1.

Bei einer affinen Abbildung wird der Ursprung O(0/0) auf O'(2/1), D(1/4) auf D'(3/3) und E(4/2) auf E'(5/6) abgebildet. Zeichne die affine Abbildung und stelle sie in Vektorschreibweise, als Gleichungssystem und in Matrixschreibweise auf.

2.

Berechne dann die Bildpunkte von Q(2/0) und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ algebraisch.

3.

Bei diesen Aufgabenstellungen wird immer der Ursprung auf sich selbst abgebildet. Bestimme die Matrix A, wenn

a) P(2/3) auf P'(4/7) und Q(0/2) auf Q'(3/3) abgebildet wird.

b) eine Scherung an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten vorliegt, bei der P(2/3) auf P'(3/7) abgebildet wird.

c) die Abszisse Fixgerade ist und P(2/3) auf P'(3/7) abgebildet wird.

Werden zwei Prozesse hintereinander ausgeführt, dann spricht man von einem zweistufigen Prozess. Solche Prozesse finden zum Beispiel statt, wenn man aus Rohstoffen zuerst Zwischenprodukte und dann aus diesen Zwischenprodukten Endprodukte herstellt. Diese Prozessfolge nennt man auch Materialverflechtung.
Grundsätzlich verkettet man die Matrizen der einzelnen Prozessschritte, in dem man die Matrizen miteinander multipliziert. Dabei wird immer Zeile mal Spalte gerechnet und die erste Matrix muss stets so viele Spalten enthalten, wie die zweite Matrix Zeilen hat.

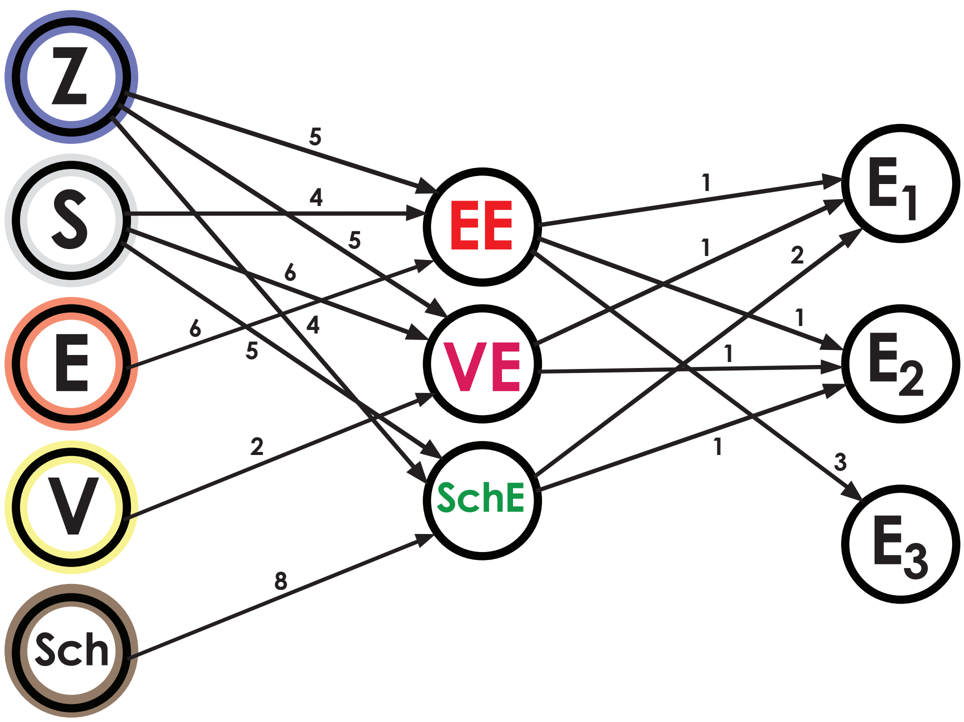
Das Matrizenprodukt von $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ berechnet man so:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 2\cdot 2 + 3\cdot 2 & 2\cdot 1 + 3\cdot 5 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot 4 & 4\cdot 2 + 5\cdot 2 & 4\cdot 1 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 12 \\ 32 & 18 & 29 \end{pmatrix}$$

Aus den Zutaten Zucker, Sahne, Erdbeeren, Vanille und Schokolade (Rohstoffe) werden zunächst die Eissorten Erdbeereis, Vanilleeis und Schokoladeneis (Zwischenprodukte) hergestellt. In einem zweiten Schritt stellt man aus diesen Eissorten die Eisbecher Nr. 1, Nr. 2 und Nr. 3 (Endprodukte) her.

Für diesen zweistufigen Produktionsprozess ergibt sich folgender Übergangsgraph bzw. folgendes Verflechtungsdiagramm, wobei die Einheiten an den Pfeilen für die Anzahl an Esslöffeln (10 g / cm³) stehen:



a) Bestimme die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A_{RZ}, die Zwischenprodukt-Endproduktmatrix B_{ZE} und die Rohstoff-Endproduktmatrix C_{RE}.

b) Berechne den Bedarf an Rohstoffen für eine Bestellung von sieben Eisbechern Nr. 1, zwei Eisbechern Nr. 2 und neun Eisbechern Nr. 3.

Schritt 1: Übertragen der Daten in Matrixschreibweise

zum Video

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } B_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \vec{r} = A \cdot \vec{z} \quad \text{und} \quad \vec{z} = B \cdot \vec{e}$$

$\vec{r}$ ist der Rohstoffvektor; $\vec{z}$ ist der Zwischenproduktvektor; $\vec{e}$ ist der Endproduktvektor.
Es wird viel verständlicher, wenn man die Indizes mitführt. Der erste Buchstabe des Index steht immer für die Zeilen- und der zweite Buchstabe für die Spaltenbeschriftung. So lässt sich auch immer sofort feststellen, welche Produkte sich überhaupt aus Matrizen und Vektoren bilden lassen.

Schritt 2: Multiplikation $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

$$C_{RE} = A_{RZ} \cdot B_{ZE} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \\ 6 & 6 & 18 \\ 2 & 2 & 0 \\ 16 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei RZ · ZE wird quasi das Z „herausgekürzt“ und es bleibt RE übrig.

Schritt 3: Ansatz: $C_{RE} \cdot \vec{e} = \vec{r},$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \\ 6 & 6 & 18 \\ 2 & 2 & 0 \\ 16 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 289 \\ 278 \\ 216 \\ 18 \\ 128 \end{pmatrix}$$

Also braucht man 289 Esslöffel Zucker, 278 Esslöffel Sahne, 216 Esslöffel Erdbeeren, 18 Esslöffel Vanille und 128 Esslöffel Schokolade.

Schaue immer genau auf die Indizes und die Formate der Matrizen. Überprüfe bei allen Rechnungen kurz, ob einzelne Rechenschritte auch wirklich mathematisch und wirtschaftlich Sinn machen.

Übungen

1.

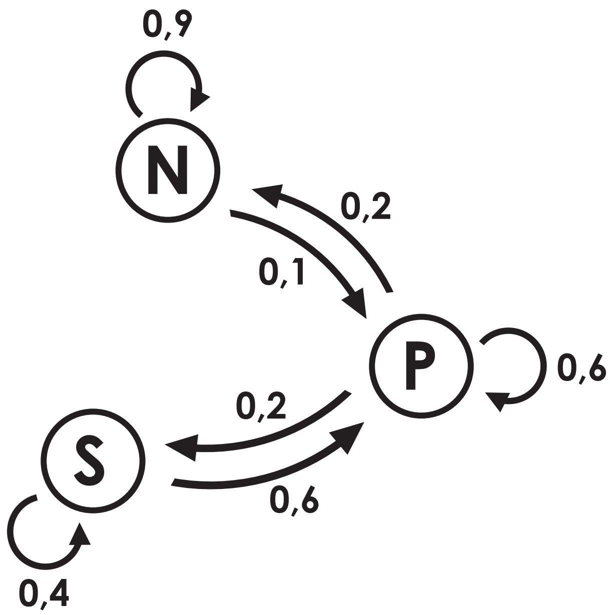
Gegeben sind die Matrizen:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliziere

$D \cdot E, \quad E \cdot D, \quad D \cdot F, \quad F \cdot D, \quad E \cdot F, \quad F \cdot E$

In dem Diagramm weiter unten kannst du erkennen, wie sich ein System mit drei verschiedenen Zuständen von einem Zeitpunkt zum nächsten verändert. Hier könnte das Gefühl von Schülerinnen und Schülern gezeigt werden. Diese könnten für gute Noten lernen (N), Party machen (P) oder schlafen (S) wollen. Angenommen heute (Tag 0) wollen von 504 Jugendlichen 182 lernen, 213 Party machen und 109 schlafen, dann könnte man die veränderten Zustände an den folgenden Tagen mit einer Prozessmatrix berechnen.



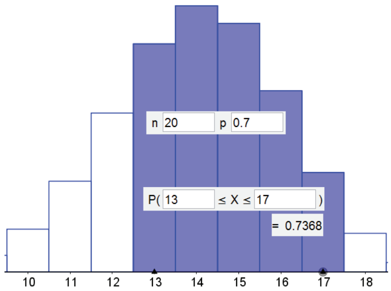
Einen Austauschprozess erkennt man mathematisch immer daran, dass dem Übergangsprozess eine quadratische Matrix zugrunde liegt, bei der die Koeffizienten alle positiv und die Spaltensummen gleich eins sind. Eine gegebene Anfangsverteilung wird durch Multiplikation mit der Prozessmatrix A beliebig häufig verändert. Wird der Austausch mehrfach durchgeführt, spricht man von Iterationsschritten.
Um beispielsweise auf die Verteilung nach dem zweiten Iterationsschritt zu kommen, kann man entweder rechnen: $A \cdot \overrightarrow{x_0} = \vec{x}_1 \quad \rightarrow \quad A \cdot \vec{x}_1 = \overrightarrow{x_2}$, oder man potenziert die Austauschmatrix mit der Anzahl der Iterationsschritte und multipliziert diese danach mit dem Anfangsvektor:
$\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = A \cdot A \cdot \overrightarrow{x_0} = A^2 \cdot \overrightarrow{x_0}$

Bei Austauschprozessen sind zwei Dinge besonders interessant:

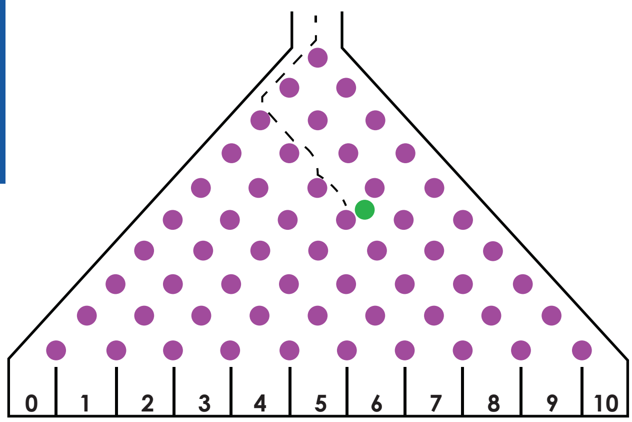
- **stabile Verteilung**: Eine solche Verteilung besitzt einen Vektor $\vec{x}$, sodass die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ erfüllt wird. Dies bedeutet, dass sich die Zustände nach einigen Iterationen nicht mehr verändern und das System „kontrahiert".

- **Grenzmatrix**: Die Matrizen A^k nähern sich für $k \rightarrow \infty$ einer Grenzmatrix G, wenn die Spalten von G alle die gleichen Zahlen aufweisen. Die Spalten der Grenzmatrix geben dann die Verhältnisse bei der Grenzverteilung wieder.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen X kannst du bei wenigen Versuchen ‚**n**' schnell errechnen und grafisch darstellen. Ist beispielsweise n = 3 kann X = k nur die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen. Dies lässt sich leicht in die Formel von Bernoulli einsetzen. Ergibt sich aber n = 10 oder noch größer, ist es nicht mehr so einfach. Hierfür verwendet man Tabellen, Mathematik-Software wie ‚GeoGebra' oder den GTR bzw. CAS. Auf Tabellen verzichten wir. Sie sind aus unserer Sicht veraltet und gehören nicht mehr in den Unterricht.



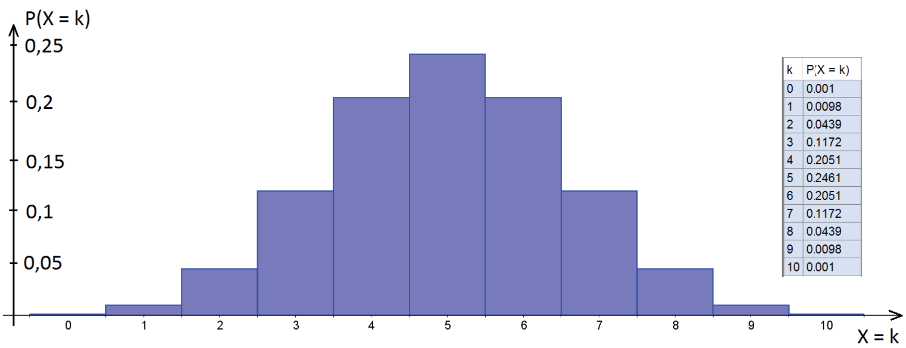
Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie ein passendes Diagramm dar. Auf welches Fach würdest du bei einer einmaligen Durchführung wetten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel mindestens in das vierte und höchstens in das siebte Fach fällt?



zum Video

Das abgebildete Galton-Brett-Experiment besteht aus n = 10 Bernoulli Versuchen mit dem Anteilswert $\pi = 0{,}5$. Schaue dir das Experiment als animierte Simulation im Video an. Eine Kugel, die wir auf die erste Ebene des Bretts fallen lassen, fällt immer entweder nach links oder nach rechts. Wir definieren ‚Abweichung nach rechts' als Erfolg. Die Zufallsvariable X misst also die Richtungsabweichungen nach rechts entlang des Pfades. Die Fächer am unteren Teil des Bretts sind entsprechend der Erfolge durchnummeriert. Fällt die Kugel in das ganz linke Fach, gab es zuvor keine Abweichung nach rechts, also bei n = 10 Versuchen k = 0 Erfolge. Dafür gibt es exakt einen Pfad. Für das Fach mit der ‚6' gab es zuvor bei n = 10 Versuchen k = 6 Erfolge.

Die Anzahl der Pfade berechnet sich mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \binom{10}{6} = 210$. Ein beliebiger Pfad enthält also sechsmal die Erfolgswahrscheinlichkeit $\pi = 0.5$ und viermal die Gegenwahrscheinlichkeit (1 – 0,5). Somit $P(X = 6) = 210 \cdot 0{,}5^6 \cdot (1 - 0{,}5)^4 = 0{,}2051$



k	P(X = k)
0	0.001
1	0.0098
2	0.0439
3	0.1172
4	0.2051
5	0.2461
6	0.2051
7	0.1172
8	0.0439
9	0.0098
10	0.001