Ott
Rosner

Mathematik im Berufskolleg

Prüfungsaufgaben zur Fachhochschulreife 2020 Baden-Württemberg

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser

Roland Ott
Oberstudienrat

Stefan Rosner
Studienrat an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

* * * * *

18. Auflage 2019

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN: 978-3-8120-0459-6

Ablauf der Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik

Zu Beginn: SchülerIn erhält beide Aufgabenteile, jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
1	Analysis	keine	ca. 60 min	30

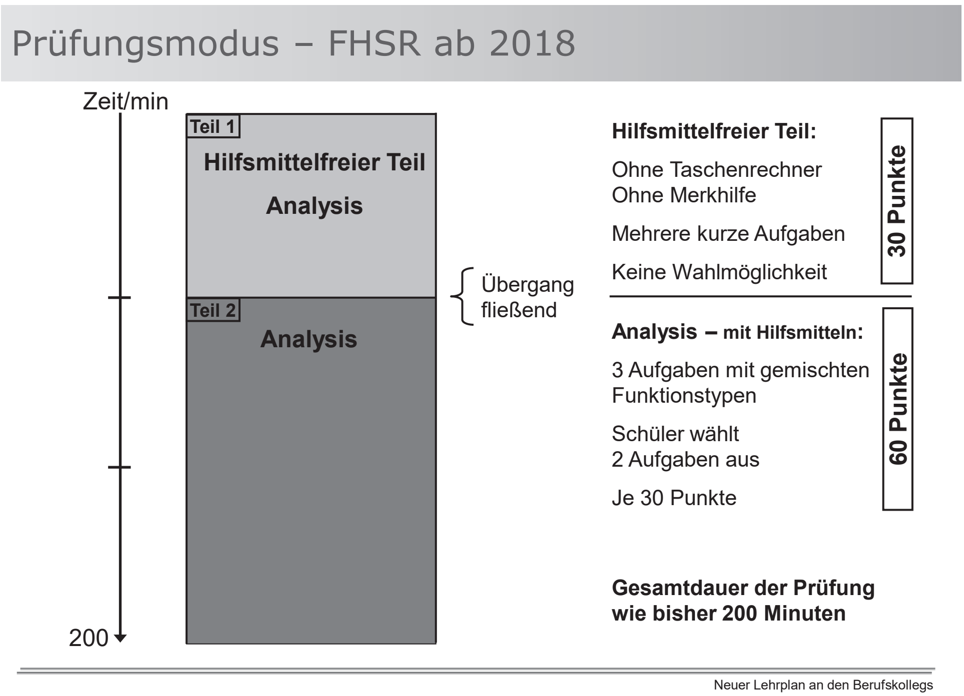
Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (Taschenrechner + Merkhilfe)

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
2	Analysis	SchülerIn wählt **zwei aus drei** Aufgaben	ca. 140 min	60

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 200 Minuten.
  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 90 Punkte.



I Teil 1 der Fachhochschulreife-Prüfung ohne Hilfsmittel

1 Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 21**

1.1 Lösen Sie die Gleichung: $-2x^3 + 6x = 2x$.

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$ in $x = 2$.

1.3 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten.

1.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ x - y &= 3. \end{aligned}$$

1.5 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx$.

1.6 Bestimmen Sie die Art und Lage der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x-2)(x+1)$.

1.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird um 3 nach links verschoben und um 1 nach unten verschoben. Wie lautet die Gleichung der entstandenen Kurve?

1.8 Bilden Sie die erste Ableitung von f mit $f(x) = e^{2x-3} - 2x + 1$.

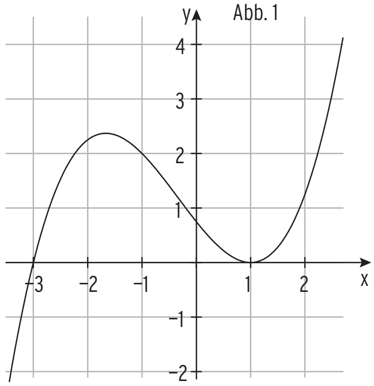
1.9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^4 + 3$ und $g(x) = 2x^2$. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Schaubilder von f und g.

Aufgabe 36

Lösungen Seite 34

Abbildung 1 zeigt das Schaubild $K_{g'}$ der 1. Ableitung der Funktion g.

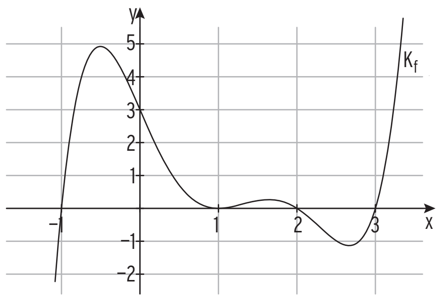
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den abgebildeten Abschnitt richtig, falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



a) Das Schaubild der Funktion g hat einen Punkt, in dem die Tangente die Steigung 3 hat.
b) Die Funktion g hat zwei Extremstellen.
c) Die Funktion g hat für x = 1 eine Nullstelle.
d) Das Schaubild der 2. Ableitung von g hat einen Tiefpunkt mit negativem y-Wert.

Aufgabe 37

Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild K_f einer Funktion f.
Begründen Sie, weshalb K_f nicht das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades sein kann.



Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktion g vom Grad 4, deren Schaubild mit den Koordinatenachsen die gleichen gemeinsamen Punkte wie K_f besitzt.

Aufgabe 38

Die Funktion g hat folgende Eigenschaften:

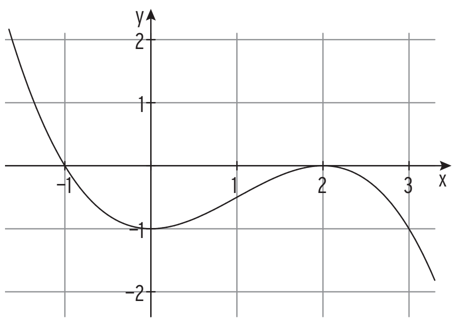
(1) $g(1) = -1$ und $g'(1) = 0$ (2) $g'(0) > 0$

(3) $g''(-2) > 0$ (4) $\int_0^6 g(x)dx = 0$

Welche Bedeutung hat jede einzelne Eigenschaft für das Schaubild von g?

Aufgabe 39

Gegeben ist das Schaubild einer Polynomfunktion f 3. Grades.
Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm.



Lösungen der Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Aufgabe Seite 9**

1.1 Gleichung in Nullform: $-2x^3 + 6x = 2x \Leftrightarrow -2x^3 + 4x = 0$

Auslammern: $2x(-x^2 + 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \vee -x^2 + 2 = 0$

$-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_{2|3} = \pm\sqrt{2}$

1.2 $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$; $f'(x) = -\frac{1}{2}x$

$f(2) = 1$; $f'(2) = -1$ einsetzen in $y = mx + b$: $1 = -1 \cdot 2 + b$ ergibt $b = 3$

Gleichung der Tangente: $y = -x + 3$

1.3 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = -x^2 + 6x$; $f''(x) = -2x + 6$; $f'''(x) = -2 \neq 0$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$f(3) = 17$ ergibt $W(3 \mid 17)$

1.4 Additionsverfahren: $2x + 5y = 1$
$x - y = 3 \quad | \cdot(-2)$ ergibt $7y = -5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7}$

Einsetzen in $x - y = 3$ ergibt $x - (-\frac{5}{7}) = 3 \Leftrightarrow x = 3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7}$

Lösung: $(\frac{16}{7}; -\frac{5}{7})$

1.5 $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x\right]_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{4} - 2) = \frac{7}{4}$

1.6 $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$ Art und Lage der Nullstellen:

$x = 0$ doppelte Nullstelle (K_f berührt die x-Achse)

$x = 2$; $x = -1$ einfache Nullstelle (K_f schneidet die x-Achse)

1.7 $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$

K_f wird um 3 nach links verschoben: $y = 2\sin(x + 3)$ (Ersetze x durch $(x + 3)$)

und um 1 nach unten verschoben: $y = 2\sin(x + 3) - 1$

1.8 Mit der Kettenregel: $f'(x) = 2 \cdot e^{2x-3} - 2$

1.9 Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $-x^4 + 3 = 2x^2$

Nullform: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Substitution: $x^2 = u$ $u^2 + 2u - 3 = 0$

Mit Formel oder $u^2 + 2u - 3 = (u - 1)(u + 3)$: $u_1 = -3$; $u_2 = 1$

Rücksubstitution: $u_2 = x^2 = 1 \Rightarrow x_{1|2} = \pm 1$

($u_1 = x^2 = -3$ hat keine Lösung)

Schnittpunkte der Schaubilder $S_1(-1 \mid 2)$; $S_2(1 \mid 2)$ (vgl. Symmetrie)

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018/2019

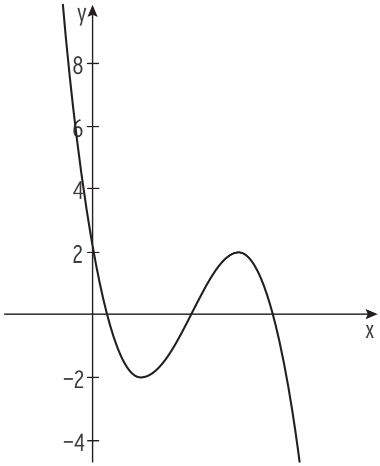
Lösungen Seite 199 - 206

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Punkte**

1.1 Lösen Sie die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 16 = -1$. 5

1.2 Gegeben ist das Schaubild einer Polynomfunktion f dritten Grades. 6

Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.



a) Das Schaubild der ersten Ableitungsfunktion von f ist eine nach unten geöffnete Parabel.

b) Das Schaubild einer neuen Funktion $f_{neu}(x) = f(x) + 1$ schneidet die x-Achse genau zweimal.

c) Das Schaubild einer Stammfunktion von f besitzt genau einen Wendepunkt.

1.3 Gegeben ist eine Funktion g mit $g(x) = x^3 - 2x^2 + 16$, $x \in \mathbb{R}$. 4

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von g an der Stelle $x = 2$.

1.4 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{4\cdot\ln(2)} e^{0,25x}dx$. 4

1.5 Die Funktion k ist gegeben durch $k(x) = 2e^{-x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$. 5

Das Schaubild heißt K.

Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K an. Skizzieren Sie K. In welchem Quadranten schließt K mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein?

1.6 Eine Polynomfunktion p vom Grad 4 soll dieselben Nullstellen haben wie die Funktion h mit $h(x) = 3\sin(\pi x)$, $x \in [0\,;\,3]$. 6

Weiterhin hat p an der Stelle $x = \frac{3}{2}$ den Funktionswert 3.

Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p.

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018/2019

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{2}{27}x^4 - \frac{4}{3}x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

2.1 Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie. 8

Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K_f.

Zeichnen Sie K_f für $-4 \leq x \leq 4$.

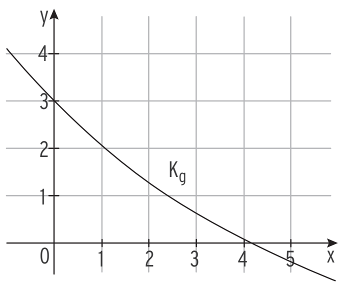
2.2 Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $0 \leq x \leq 4$ schneidet die x-Achse 7

in Punkt A und K_f in Punkt P. Der Ursprung O bildet mit A und P ein Dreieck.

a) Veranschaulichen Sie dies für $u = 2$ im Schaubild aus 2.1.

b) Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OPA maximal ist.

Gegeben sind die Funktion g durch $g(x) = 6e^{-\frac{1}{6}x} - 3$ mit $x \in \mathbb{R}$, ihr Schaubild K_g und die Gerade t mit der Gleichung $y = -x + 3$.



2.3 Zeigen Sie, dass sich die Gerade t und K_g im Schnittpunkt mit der y-Achse berühren. 5

Begründen Sie, warum K_g und t keine weiteren gemeinsamen Punkte haben.

2.4 Berechnen Sie die Nullstelle von g. 6

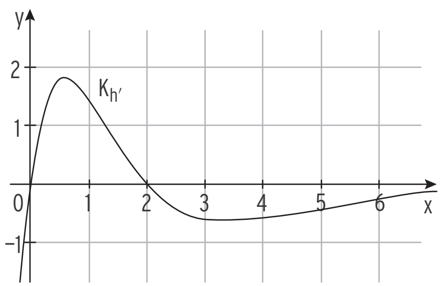
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die K_g mit den Koordinatenachsen einschließt.

2.5 Gegeben ist das Schaubild K_h, der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h. 4

Bestätigen oder widerlegen Sie begründet folgende Aussagen.

(1) K_h hat an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt.

(2) K_h ist für $1 \leq x \leq 2{,}5$ rechtsgekrümmt.



30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018/2019

Aufgabe 3 **Punkte**

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -\cos(2x) + 0{,}5$, $x \in [0; \pi]$.

Ihr Schaubild heißt K_h.

3.1 Geben Sie den Wertebereich von K_h an. 9

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_h mit der x-Achse.

Zeichnen Sie K_h.

3.2 Die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}5$ schließt mit K_h eine Fläche ein. 6

Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.

3.3 Geben Sie jeweils einen veränderten Funktionsterm an, wenn 3

(1) das Schaubild von h an der x-Achse gespiegelt wird.

(2) das Schaubild von h um 2 nach unten verschoben wird.

(3) die Periode der neuen Funktion nun den Wert $\frac{\pi}{2}$ hat.

3.4 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{0{,}5x} + bx + 1$, $x \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$. 6

Das Schaubild von f heißt K_f.

K_f verläuft durch den Ursprung und hat bei $x = 2$ einen Hochpunkt.

Bestimmen Sie den Funktionsterm.

Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes und die Gleichung der Asymptote an.

3.5 Gegeben ist die Ableitungsfunktion g′ einer Funktion g durch 6

$g'(x) = e^{\frac{1}{3}x} - 3$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Extremstelle von g.

Für welche x-Werte verläuft das Schaubild von g steigend?

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2018/2019

Aufgabe 4 **Punkte**

4.1 Eine Polynomfunktion zweiten Grades verläuft durch die Punkte $A(1 \mid 2)$, $B(2 \mid 4)$ und $C(-1 \mid 4)$. 6
Berechnen Sie einen Funktionsterm.

Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = x^5 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_g.

4.2 Zeigen Sie, dass K_g keine Extrempunkte besitzt. 3

4.3 Begründen Sie, dass K_g im Bereich $-1 \leq x \leq 0$ eine Nullstelle hat. 5
Ermitteln Sie näherungsweise die ersten beiden Nachkommastellen dieser Nullstelle.

4.4 Das Schaubild einer Stammfunktion G von g verläuft durch den Punkt $P(1 \mid 2{,}5)$. 4
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G .

Erfahrene Meteorologen sagen voraus, dass der Lufttemperaturverlauf (in °C) an einem bestimmten Ort in den nächsten 24 Stunden näherungsweise durch die Funktion T mit $T(t) = -8\cos(\frac{\pi}{12} \cdot t) + 6$; $t \geq 0$, t in Stunden, beschrieben werden kann. Dabei ist t = 0 um 6:00 Uhr.

4.5 Berechnen Sie, welche Höchst- bzw. Tiefsttemperatur nach diesem Modell in den nächsten 24 Stunden zu erwarten sind. 4
Geben Sie alle Uhrzeiten an, zu welchen die Höchst- bzw. Tiefsttemperatur erreicht wird.

4.6 Bestimmen Sie die Werte von t, für die die Temperaturen über 0° C liegen. 4

4.7 Ermitteln Sie die Uhrzeit, zu der der momentane Temperaturanstieg am größten ist. 4

30

Lösungen zur Prüfung zur Fachschulreife 2018/2019

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.1 Gleichung $x^4 + 2x^2 - 16 = -1$

Nullform $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$

Substitution: $u = x^2$ $u^2 + 2u - 15 = 0$

Mit Formel: $u_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$

$= \frac{-2 \pm 8}{2}$

Lösung: $u_1 = \frac{-2-8}{2} = -5$; $u_2 = \frac{-2+8}{2} = 3$

Rücksubstitution: $x^2 = u$ $x^2 = -5$ keine Lösung

$x^2 = 3 \Rightarrow x_{1|2} = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73...$

1.2 a) Aussage ist wahr; die Funktion f ist vom Grad 3 und das Schaubild verläuft vom 2. in den 4. Quadranten, hat also ein negatives Vorzeichen vor der Potenz mit dem höchsten Exponenten. Somit ist das Schaubild der Ableitungsfunktion eine Parabel (Grad 2) mit negativem Vorzeichen vor der Potenz mit dem höchsten Exponenten, also nach unten geöffnet.

b) Aussage ist falsch; durch Verschiebung des Schaubildes von f um eine Einheit nach oben erhält man das Schaubild von f_{neu}. Dessen Tiefpunkt liegt jedoch weiterhin unterhalb und der Hochpunkt oberhalb der x-Achse Das Schaubild von f_{neu} schneidet die x-Achse dreimal.

c) Aussage ist falsch; Das Schaubild von f hat zwei Extrempunkte, somit hat das Schaubild jeder Stammfunktion zwei Wendepunkte.

1.3 Berechnung des y-Wertes des Tangentialpunktes T:

$g(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 16 = 16 \Rightarrow T\,(2 \mid 16)$

Berechnung der Tangentensteigung mithilfe der Ableitungsfunktion:

$g'(x) = 3x^2 - 4x$; $g'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$

Einsetzen in $y = m \cdot x + b$: $16 = 4 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 8$

Tangentengleichung: $y = 4x + 8$