Vorwort

Dieses Buch ist als Nachschlagewerk gedacht, mit dem sich die Nutzerinnen und Nutzer wirtschaftsmathematische Aufgabenstellungen und ihre Lösungen gezielt und schnell ins Gedächtnis zurückrufen können.

Jeder Abschnitt wird mit einem kurzen auf das jeweilige Teilgebiet orientierenden Text eingeleitet. Die Anwendung von Formeln wird an Musterbeispielen dargestellt. Andere Lösungswege werden mit Kurzhinweisen erklärt.

Den wirtschaftsmathematischen Teilgebieten sind eine Zusammenstellung der Zahlenmengen und ausgewählter mathematischer Zeichen vorangestellt. Zum besseren Verständnis der Inhalte werden notwendige Inhalte der Bruchrechnung sowie der elementaren Gleichungslehre bereitgestellt und an einfachen Beispielen veranschaulicht.

Die behandelten Formeln der Wirtschaftsmathematik sind durch gerasterte und gerahmte Kästen hervorgehoben, mathematische Lösungsverfahren werden beispielhaft erklärt, sodass sie leicht auf andere Aufgabenstellungen übertragen werden können.

Die durchgerechneten Beispiele sind so gehalten, dass sie aufgrund des gewählten Zahlenmaterials schnell und ohne große Mühe nachvollzogen werden können. Kompliziertere Rechnungen der Finanzmathematik werden mit beigefügten Protokollen für die Taschenrechnereingaben unterstützt.

Die Formeln zur Flächen- und Körperberechnung geometrischer Figuren sind im Anhang aufgeführt.

Günther Thun

Inhaltsverzeichnis

Erläuternde Hinweise zu ausgewählten Kapiteln

Kapitel	Anwendungen (Beispiele)
3 Dreisatzrechnung	Berechnung von Zuordnungen wie Menge und Preis, Masse und Gewicht, Arbeitsumfang und Arbeitszeit usw.
4 Währungsrechnung	Währungsumrechnungen bei Urlaubs- und Geschäftsreisen – Kursvergleiche – Wo tauscht man am besten um? usw.
5 Verteilungsrechnung	Verteilung von Lotteriegewinnen bei Tippgemeinschaften, von Unternehmensgewinnen bei Gesellschaften – von Gewichts- und Wertspesen in der zusammengesetzten Bezugskalkulation – Kostenverteilung von Nebenkosten in Mietwohnungen – Verteilungsprobleme bei Erbauseinandersetzungen usw.
6 Durchschnittsrechnung	Berechnung von Durchschnittspreisen – Durchschnittsverbrauch – Durchschnittsumsatz – Durchschnittsnoten – Lagerkennzahlen (Lagerbestand, Lagerdauer) usw.
7 Prozentrechnung	Relativer Vergleich von Zahlen bei Preisnachlässen (Rabatte, Skonti, Boni) – Ausschussproduktion (Ausschussquote) –Wahlen (Stimmenanteile) – Preisänderungen usw.
8 und 9 Kalkulation	Berechnung von Bezugs- und Verkaufspreisen – Berechnung von aufwendbaren Einkaufspreisen – Berechnung von Gewinnspannen – Berechnung der Selbstkosten usw.
10 Zinsrechnung	Berechnung von Guthaben- und Darlehenszinsen, Verzugszinsen – Effektivzinssatz bei Krediten, Immobilien, Wertpapieren – Effektiver Skontosatz bei gleichzeitiger Kreditaufnahme usw.
11 Finanzmathematik	Entwicklung von Sparkapital – Zinssatzberechnung – Berechnung von Zahlungsreihen – Angebotsvergleiche bei Zahlung in Jahresraten – Tilgungen mit gleichen Raten und Annuitäten usw.
12 Beschreibende Statistik	Kennzahlen von statischen Zahlen: Mittelwerte und Streuungsmaße – Aufteilung von Gesamtgrößen in Gliederungszahlen – Beziehungszahlen (Renditekennzahlen) – Darstellung von Zahlenreihen durch Messzahlen – Betriebskennzahlen usw.

1 Rechnen mit Brüchen

1. 1 Begriff und Arten von Brüchen

Brüche entstehen dann, wenn die Division zweier ganzer Zahlen nicht zu einer ganzen Zahl führt. In diesen Fällen wird die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ um die Brüche zur Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitert. Brüche werden allgemein geschrieben:

Bruch: $\dfrac{a}{b}$ — a: **Zähler des Bruches**, b: **Nenner des Bruches**

a, b sind ganze Zahlen, b darf nicht Null sein.

Ist **a < b**, liegt ein **echter Bruch** vor, zum Beispiel: $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$.

Ist **a > b**, liegt ein **unechter Bruch** vor, zum Beispiel: $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}$.

Eine Zusammensetzung aus ganzer Zahl und echtem Bruch heißt **gemischte Zahl**, zum Beispiel $3\frac{2}{3}, 4\frac{1}{2}$.

Ein **Dezimalbruch** entsteht, indem man die Division **Zähler : Nenner** durchführt, zum Beispiel

$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5;$ $\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6;$ $\frac{3}{2} = 3 : 2 = 1{,}5;$ $\frac{7}{5} = 7 :5 = 1{,}4.$

Die Division des Bruches $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}3333....$ führt zu einem **periodischen Dezimalbruch**. Eine Periode ist eine Ziffer oder Ziffernfolge, die sich nach dem Komma eines Dezimalbruches immer wieder wiederholt. Sie wird durch einen Querstrich über der oder den betreffenden Zahlen gekennzeichnet, zum Beispiel $\frac{1}{3} = 0{,}\bar{3}$.

Vorzeichen von Brüchen:
Brüche, in denen Zähler und Nenner beide positiv oder beide negativ sind, haben ein positives Vorzeichen. Haben Zähler und Nenner ein unterschiedliches Vorzeichen, ist der Bruch negativ.

1. 2 Formänderungen von Brüchen

Um Größenvergleiche von Brüchen durchführen zu können oder um Brüche durch Addition oder Subtraktion zusammenfassen zu können, müssen sie gleichnamig sein, das heißt: Sie müssen den gleichen Nenner haben. Ist dies nicht der Fall, so werden sie durch **Erweitern** oder **Kürzen** auf den gleichen Nenner gebracht. Erst dann sind die gewünschten Operationen durchführbar.

Durch Erweitern und Kürzen wird nur die Form, nicht der Wert des Bruches verändert.

Erweitern von Brüchen

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad (k \neq 0)$$

Ein Bruch wird **erweitert**, indem man Zähler und Nenner mit derselben ganzen Zahl (außer Null) multipliziert. Die Zahl, mit der multipliziert wird, heißt **Erweiterungsfaktor**.

Beispiel:

$\frac{1}{2}$ ist auf den Nenner 6 zu bringen:

Lösung:

Erweiterungsfaktor: 6 : 2 = **3**

$\frac{1 \cdot \mathbf{3}}{2 \cdot \mathbf{3}} = \frac{3}{6}$ Es gilt: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

Kürzen von Brüchen

$$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k} \quad (k \neq 0)$$

Ein Bruch wird **gekürzt**, indem man Zähler und Nenner des Bruches durch dieselbe ganze Zahl (außer Null) dividiert. Die Zahl, durch die geteilt wird, heißt **Kürzungsfaktor**.

Beispiel:

$\frac{12}{18}$ ist auf den kleinstmöglichen Nenner zu bringen:

Lösung:

Größtmöglicher Kürzungsfaktor: 6

$\frac{12 : \mathbf{6}}{18 : \mathbf{6}} = \frac{2}{3}$ Es gilt: $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Der größtmögliche **Kürzungsfaktor** ist der größte gemeinsame Teiler ggT. Um ihn zu bestimmen, zerlegt man Zähler und Nenner in seine Primfaktoren. Der ggT ist das Produkt aus den Primfaktoren von Zähler und Nenner, die in beiden Zerlegungen vorkommen.

Im Beispiel: Zähler: 12 = $\underline{\mathbf{2}} \cdot 2 \cdot \underline{\mathbf{3}}$; Nenner: 18 = $\underline{\mathbf{2}} \cdot \underline{\mathbf{3}} \cdot 3$, daraus folgt: ggT = $\underline{\mathbf{2}} \cdot \underline{\mathbf{3}}$ = 6

Anmerkung: Primfaktoren sind Primzahlen. Unter Primzahlen versteht man alle natürlichen Zahlen, die nur durch sich selbst und durch 1 teilbar sind, außer die 1 selbst.

1. 3 Rechnen mit Brüchen

Addition und Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

Beispiele

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$$

Ungleichnamige Brüche

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} + \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} - \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{c \cdot d}$$

Beachte: c·d = d·c

Ungleichnamige Brüche sind vor dem Addieren oder Subtrahieren durch Erweitern oder Kürzen auf den gleichen Nenner zu bringen. Danach wendet man die Regel zur Addition bzw. Subtraktion gleichnamiger Brüche an.

Beispiele:

$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} =$ | Hauptnenner: 5 · 4 = 20

Erweiterungsfaktor im 1. Bruch: 20 : 5 = **4**

im 2. Bruch: 20 : 4 = **5**

$$\frac{2 \cdot \mathbf{4}}{5 \cdot \mathbf{4}} + \frac{1 \cdot \mathbf{5}}{4 \cdot \mathbf{5}} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$$

$\frac{2}{5} - \frac{1}{4} =$

HN und Erweiterungsfaktor wie oben.

$$\frac{2 \cdot \mathbf{4}}{5 \cdot \mathbf{4}} - \frac{1 \cdot \mathbf{5}}{4 \cdot \mathbf{5}} = \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}$$

Multiplikation und Division von Brüchen

Multiplikation

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \quad (c, d \neq 0)$$

$$\frac{a}{c} \cdot k = \frac{a \cdot k}{c} \quad (c \neq 0)$$

Zwei oder mehr Brüche werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.
Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und das erhaltene Produkt durch den Nenner dividiert.

Beispiel 1: Zwei Brüche

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Beispiel 2: Bruch mit einer Zahl

$$\frac{4}{9} \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{9} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$$

Das Ergebnis ergibt einen gemischten Bruch.

Division

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} \quad (c, d, b \neq 0)$$

$$\frac{a}{c} : k = \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{k} = \frac{a}{c \cdot k} \quad (c, k \neq 0)$$

Ein Bruch wird durch einen anderen Bruch dividiert, indem man ihn mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

Beispiel 1: Zwei Brüche

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

Beispiel 2: Bruch geteilt durch Zahl

$$\frac{4}{9} : 5 = \frac{4}{9 \cdot 5} = \frac{4}{45}$$

Vorzeichenregeln für die Multiplikation und Division von Brüchen

Multiplikation

Gleiche Vorzeichen $\Rightarrow$ positives Ergebnis

$\left(+\frac{a}{c}\right)\cdot\left(+\frac{b}{d}\right)=+\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}\right)=+\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$ $\left(-\frac{a}{c}\right)\cdot\left(-\frac{b}{d}\right)=+\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}\right)=+\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$

Verschiedene Vorzeichen $\Rightarrow$ negatives Ergebnis

$\left(+\frac{a}{c}\right)\cdot\left(-\frac{b}{d}\right)=-\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}\right)=-\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$ $\left(-\frac{a}{c}\right)\cdot\left(+\frac{b}{d}\right)=-\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}\right)=-\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$

Division

Gleiche Vorzeichen $\Rightarrow$ positives Ergebnis

$\left(+\frac{a}{c}\right):\left(+\frac{b}{d}\right)=+\left(\frac{a}{c}:\frac{b}{d}\right)=+\frac{a\cdot d}{c\cdot b}$ $\left(-\frac{a}{c}\right):\left(-\frac{b}{d}\right)=+\left(\frac{a}{c}:\frac{b}{d}\right)=+\frac{a\cdot d}{c\cdot b}$

Verschiedene Vorzeichen $\Rightarrow$ negatives Ergebnis

$\left(+\frac{a}{c}\right):\left(-\frac{b}{d}\right)=-\left(\frac{a}{c}:\frac{b}{d}\right)=-\frac{a\cdot d}{c\cdot b}$ $\left(-\frac{a}{c}\right):\left(+\frac{b}{d}\right)=-\left(\frac{a}{c}:\frac{b}{d}\right)=-\frac{a\cdot d}{c\cdot b}$

1. 4 Umwandlung von Bruchzahlen in Dezimalzahlen

Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ kann durch eine Division Zähler a durch Nenner b in seine Dezimalschreibweise überführt werden. Das daraus entstehende Ergebnis ergibt eine

– abbrechende Dezimalzahl, wenn sich der Nenner des Bruches nur aus den Primfaktoren 2 und/oder 5 zusammensetzt;	**Beispiele:** $\frac{5}{20}$ = 5 : 20 = 0,25 Nenner 20 = 2 · 2 · 5
– rein-periodische Dezimalzahl, wenn im Nenner die Faktoren 2 oder 5 nicht vorkommen;	$\frac{2}{3}=0,\overline{6}$; $\frac{4}{21}$ = 4 : 21 = $0,\overline{190476}$ Nenner 3 bzw. 21 = 3 · 7
– gemischt-periodisch, wenn im Nenner außer 2 oder 5 noch andere Primfaktoren vorkommen.	$\frac{7}{15}=0,4\overline{6}$ (auch. „spät“-periodischer Bruch) Nenner 3 und 5.

2 Das Lösen von Gleichungen

2. 1 Grundbegriffe

Werden zwei mathematische Ausdrücke (**Terme**) durch ein Gleichheitszeichen (=) miteinander verbunden, so entsteht eine Gleichung. Beispiele für Terme sind Zahlen, Variablen und sinnvolle Zusammensetzungen aus Zahlen und Variablen.

Handelt es sich bei den Termen um konkrete Zahlen, so kann unmittelbar entschieden werden, ob die Gleichung richtig (wahr) oder falsch ist (richtig: $2 = \frac{6}{3}$; falsch: $\frac{2}{3} = 0{,}7$). Enthält mindestens einer der Terme eine Variable, so ist der Wert der Variable gesucht, der zu einer richtigen Gleichung führt. Dieser Wert heißt **Lösung** der Gleichung.

2. 2 Umformungsregeln für Gleichungen

Um eine Gleichung so zu vereinfachen, dass ihre Lösung unmittelbar ablesbar ist, muss sie auf ihre **Grundform** gebracht werden, also auf die Form x = … . Dann ist die Lösung für x diejenige Zahl, die auf der rechten Seite der Gleichung steht. Bei der Vereinfachung einer Gleichung sind nur solche Umformungen erlaubt, die zwar die Form der Gleichung verändern, nicht aber die in ihr enthaltene Lösung. Man sagt: Die Gleichung muss auf eine gleichwertige (äquivalente) Form gebracht werden. Deshalb heißen die Umformungen auch **Äquivalenzumformungen**. Folgende Äquivalenzumformungen sind erlaubt: Man darf auf beiden Seiten einer Gleichung …

… dieselbe Zahl **addieren**,	$x - 5 = 7$ Ausgangsgleichung $x - 5 + 5 = 7 + 5$ $\downarrow$ $x = 12$ Grundform 12 ist Lösung der Ausgangsgleichung.
… dieselbe Zahl **subtrahieren**,	$x + 3 = 5$ Ausgangsgleichung $x + 3 - 3 = 5 - 3$ $\downarrow$ $x = 2$ Grundform 2 ist Lösung der Ausgangsgleichung.
… mit derselben Zahl (außer Null) **multiplizieren**,	$\frac{x}{3} = 2$ Ausgangsgleichung $\frac{x \cdot 3}{3} = 2 \cdot 3$ $\downarrow$ $x = 6$ Grundform 6 ist Lösung der Ausgangsgleichung.
… durch dieselbe Zahl (außer Null) **dividieren.**	$3x = 12$ Ausgangsgleichung $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ $\downarrow$ $x = 4$ Grundform 4 ist Lösung der Ausgangsgleichung.

3 Dreisatzrechnung

Die Dreisatzrechnung dient dazu, Zahlenverhältnisse von Größen zu bestimmen: Sind von zwei Zahlenverhältnissen eines Zusammenhanges (Beispiel: Menge und Preis) drei gegeben, so kann die vierte mit dem Rechenschema der Dreisatzrechnung bestimmt werden. Hierbei wird zwischen geradem und ungeradem Verhältnis unterschieden. Es gelten die folgenden Grundregeln:

Grundregeln

<u>**Gerades Verhältnis:**</u>

Je mehr …, desto mehr … .
Je weniger …, desto weniger ….

<u>**Ungerades Verhältnis:**</u>

Je mehr, desto weniger… .
Je weniger, desto mehr… .

3. 1 Einfacher Dreisatz mit geradem Verhältnis

Beispiel:
5 kg einer Ware kosten 24,00 €. Wie viel € kosten 8 kg derselben Ware?

<u>Lösung:</u>

<u>Grundregel</u>:
Je **mehr** kg, desto **mehr** €.

Bedingungssatz: 5 **kg kosten 24,00 €**
Fragesatz: <u>**8 kg kosten x €**</u>

Bruchsatz: $\mathbf{x = \frac{24 \cdot 8}{5} = 38{,}40}$

Antwortsatz:
8 kg der Ware kosten 38,40 €.

<u>Erläuterungen:</u>
Es liegt ein <u>gerades</u> Verhältnis vor.

Die gefragte Größe € steht am Ende des Satzes.
Gleiche Bezeichnungen stehen untereinander.

<u>Entwicklung des Bruchsatzes zur Berechnung von x:</u>
- Die Zahl über dem x (24) steht auf dem Bruch.
- 1 kg der Ware kostet den 5. Teil (5 in den Nenner)
- 8 kg kosten das 8-fache (8 in den Zähler).

3. 2 Einfacher Dreisatz mit ungeradem Verhältnis

Beispiel:
5 Druckmaschinen benötigen für einen Druckauftrag 24 Minuten. Wie viel Minuten benötigen 8 Druckmaschinen desselben Typs für denselben Druckauftrag?

<u>Lösung:</u>

<u>Grundregel</u>: Je **mehr** Druckmaschinen, desto **weniger** Minuten.

Bedingungssatz: **5 Masch. benöt. 24 Min.**
Fragesatz: <u>**8 Masch. benöt. x Min.**</u>

<u>Erläuterungen:</u>
Es liegt ein <u>ungerades</u> Verhältnis vor.

Die gefragte Größe Min. steht am Ende des Satzes.
Gleiche Bezeichnungen stehen untereinander.

Bruchsatz: $x = \frac{24 \cdot 5}{8} = 15$ Antwortsatz: 8 Maschinen benötigen 15 Minuten.	<u>Entwicklung des Bruchsatzes:</u> • Die Zahl über dem x (24) steht auf dem Bruch. • 1 Maschine benötigt die 5fache Zeit in Minuten (5 in den Zähler). • 8 Maschinen benötigen den 8. Teil an Minuten (8 in den Nenner).

Lösungsweg in Kurzform:

<u>1. Schritt:</u> Der Wert über dem x ist der Ausgangswert und wird sowohl beim geraden als auch beim ungeraden Verhältnis auf den Bruchstrich geschrieben.

<u>2. Schritt:</u> Nun wird entschieden, welcher der beiden übrigen Werte auf bzw. unter den Bruchstrich kommt. Wird ein größeres Ergebnis als der Ausgangswert erwartet, kommt die größere Zahl auf und die kleinere Zahl unter den Bruchstrich (siehe Beispiel 1). Wird ein kleineres Ergebnis erwartet, kommt die kleinere Zahl auf und die größere Zahl unter den Bruchstrich (siehe Beispiel 2).

3. 3 Zusammengesetzter Dreisatz

Beispiel:

Fünf Automaten stanzen in einer 5-tägigen Arbeitswoche bei einer täglichen Arbeitszeit von 8 Stunden 4 800 Fertigungsteile. Wie viel Stück dieser Teile können von 8 Automaten gestanzt werden, wenn nur 4 Tage in der Woche produziert wird, dafür die tägliche Arbeitszeit auf 9 Stunden heraufgesetzt wird?

<u>Lösung:</u>

Bedingungssatz:	**5 Automaten – 5 Tage/Woche – 8 Stunden/Tag – 4 800 Teile.**
Fragesatz:	**<u>8 Automaten – 4 Tage/Woche – 9 Stunden/Tag – x Teile.</u>**
Bruchsatz:	$x = \frac{4\,800 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 9}{5 \cdot 5 \cdot 8} = \mathbf{6\,912}$
Antwortsatz:	Es können insgesamt 6 912 Teile gefertigt werden.

Begründung des Lösungsansatzes:

1. Der Bedingungssatz wird so aufgestellt, dass die gesuchte Größe (Teile) ans Ende kommt.
2. Beim Fragesatz ist darauf zu achten, dass gleiche Größenbezeichnungen untereinander stehen.
3. Im Bruchsatz erscheint zunächst die Zahl über dem x (4 800) auf dem Bruchstrich.
4. Nun wird für jede Einflussgröße (Automaten, Tage/(Woche und Stunden/Tag) getrennt entschieden, ob durch die Änderung der Bedingungen die Stückzahl größer oder kleiner wird.

   <u>Im Einzelnen:</u>

   Mehr Automaten produzieren mehr Stücke, d. h. 8 auf und 5 unter den Bruchstrich.

   In weniger Tagen pro Woche wird weniger produziert, d. h. 4 auf und 5 unter den Bruchstrich.

   In mehr Stunden je Tag kann mehr produziert werden, d. h. 9 auf und 8 unter den Bruchstrich.

4 Währungsrechnung

Währungsumrechnungen werden gewöhnlich mit Hilfe der Dreisatzrechnung vorgenommen. Der jeweilige Währungskurs (kurz: **Kurs**), der das Werteverhältnis der Inlands- zur Auslandswährung ausdrückt, wird dabei zum Aufstellen des Bedingungssatzes herangezogen.

Definition:

Der Währungskurs ist der Preis für eine Einheit einer (Inlands-)Währung (z. B. 1 €), ausgedrückt in einer anderen Währung. Das heißt kurz: **1 € = Menge der Auslandswährung.**

Es wird zwischen Ankaufskurs und Verkaufskurs unterschieden.

Ankaufskurs (Geldkurs): Es wird die Inlandswährung gegen eine Auslandswährung getauscht. Der Kunde **kauft** also Auslandswährung zum **Ankauf**skurs. Er ist der niedrigere Kurs.

Verkaufskurs (Briefkurs): Es wird eine Auslandswährung gegen die Inlandswährung zurückgetauscht. Der Kunde **verkauft** also Auslandswährung zum **Verkauf**skurs. Er ist der höhere Kurs.

Es wird zwischen Sorten- (Münzen und Noten) und Devisenkurs (Buchgeld) unterschieden.

4. 1 Umrechnung von Inlands- in Auslandswährung

Beispiel:

Ein Urlauber tauscht vor seiner Abreise in die Schweiz 500,00 € in Schweizer Franken (CHF) um. Wie hoch ist der Gegenwert, wenn der Ankaufskurs mit 1,4051 angegeben wird?

Lösung:

Der Kunde kauft Schweizer Franken zum Ankaufskurs.

Auslandswährung = Ankaufskurs · Inlandswährung

Für 1 € zahlt die Bank 1,4051 CHF aus.
Für 500 € zahlt die Bank x CHF aus.

$$\mathbf{x = 1{,}4051 \cdot 500 = 702{,}55}$$

Der Gegenwert beträgt 702,55 CHF.

4. 2 Umrechnung von Auslands- in Inlandswährung

Beispiel:

Nach seiner Rückkehr aus den USA tauscht ein Geschäftsmann die mitgebrachten 200 US-Dollar (USD) bei seiner Bank in € um. Wie hoch ist der Gegenwert, wenn der Verkaufskurs mit 1,5820 angegeben wird?

Lösung:

Der Kunde verkauft US-Dollar zum Verkaufskurs.

$$\textbf{Inlandswährung} = \frac{\textbf{Auslandswährung}}{\textbf{Verkaufskurs}}$$

Für 1,5820 USD erhält der Kunde 1 €.
Für 200 USD erhält der Kunde x €.

$$\mathbf{x = \frac{1 \cdot 200}{1{,}5820} = 126{,}42}$$

Der Gegenwert beträgt 126,42 €.

5 Verteilungsrechnung

5. 1 Grundlagen

Eine Aufgabe zur Verteilungsrechnung liegt vor, wenn eine **zu verteilende Größe** auf mehrere **Beteiligte a**ufgeteilt werden soll. Hierzu muss eine vorher vereinbarte **Verteilungsgrundlage** festgelegt werden. Mit Hilfe der Verteilungsgrundlage (Verteilungsschlüssel) können das **Verteilungsverhältnis** und somit die **Anteile** berechnet werden, die den Beteiligten zustehen.
Veranschaulichung am Beispiel:

Begriffe der Verteilungsrechnung	**Beispiel**
Zu verteilende Größe	Lotteriegewinn
Beteiligte	Mitspieler
Verteilungsgrundlage	Spieleinsatz
Verteilungsverhältnis	z. B. 1 : 2 : 3

Je nach Aufgabenstellung und vorgegebener Verteilungsgrundlage werden folgende Arten von Verteilungsaufgaben unterschieden:

- Verteilung aufgrund vorgegebener Absolutwerte;
- Verteilung aufgrund vorgegebener Bruchanteile;
- Zusammengesetzte Verteilungsaufgaben.

Die Lösungstechnik dieser Aufgabenarten wird im Folgenden an typischen Beispielen vorgestellt.

5. 2 Verteilungen aufgrund vorgegebener Absolutwerte

Beispiel:
An einer Personengesellschaft sind die Gesellschafter Albers mit 20 000 €, Behrends mit 40 000 € und Claussen mit 60 000 € beteiligt? Der Jahresgewinn von 30 000 € soll im Verhältnis der Beteiligungen an die drei Gesellschafter verteilt werden. Zu berechnen sind die Anteile.

<u>Lösung:</u>

Verteilungstabelle:

Beteiligte	Beteiligung	Teile-verhältnis	Anteile (in €)
Albers	20 000	**1**	5 000
Behrends	40 000	**2**	10 000
Claussen	60 000	**3**	15 000

6 Teile = 30 000

$$1 \text{ Teil} = \frac{30\,000}{6} = 5\,000$$

2 Teile = 5 000 · 2 = 10 000
3 Teile = 5 000 · 3 = 15 000

<u>Erläuterungen:</u>
Aus den Beteiligungen (Verteilungsgrundlage) ergibt sich das Verteilungsverhältnis:
20 000 : 40 000 : 60 000, gekürzt:
1 : 2 : 3.
Die Summe der Teile (= 6) wird dem Jahresgewinn gleichgesetzt.

Mittels Verhältnisrechnung können die Anteile errechnet werden.

5. 3 Verteilungen aufgrund vorgegebener Bruchanteile

Beispiel:

Aufgrund einer Vereinbarung soll ein Gewinn von 6 000 € unter den Gesellschaftern einer Personengesellschaft so verteilt werden, dass Gesellschafter A $\frac{1}{3}$, B $\frac{2}{5}$ und C den Rest erhält. Zu berechnen sind die Anteile der drei Gesellschafter.

<u>Lösung:</u>

Verteilungstabelle:

Beteiligte	Bruch-anteile	Teile-verhältnis		Anteile (in €)
A	$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$	$\frac{\mathbf{5}}{15}$	**5**	2 000
B	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$	$\frac{\mathbf{6}}{15}$	**6**	2 400
C	Rest	$\frac{\mathbf{4}}{15}$	**4**	1 600

15 Teile = 6 000

1 Teil $= \frac{6\,000}{15} = 400$

5 Teile = 400 · **5** = 2 000
6 Teile = 400 · **6** = 2 400
4 Teile = 400 · **4** = 1 600

<u>Erläuterungen:</u>

Die Bruchanteile sind durch Erweitern auf den Hauptnenner 15 zu bringen, damit der Restbruchanteil von C bestimmt werden kann:

$$\frac{\mathbf{1}\cdot 5}{\mathbf{3}\cdot 5} + \frac{\mathbf{2}\cdot 3}{\mathbf{5}\cdot 3} + \text{Rest} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} + \text{Rest} = \frac{15}{15}$$

$$\frac{11}{15} + \text{Rest} = \frac{15}{15}$$

$$\text{Rest} = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

Teileverhältnis: $\frac{\mathbf{5}}{15} : \frac{\mathbf{6}}{15} : \frac{\mathbf{4}}{15}$

Die Zähler der gleichnamigen Brüche ergeben das Verteilungsverhältnis:

5 : 6 : 4

Die Summe der Teile (= 15) wird dem Jahresgewinn 6 000 € gleichgesetzt.
Mittels Verhältnisrechnung werden die Anteile errechnet.

5. 4 Zusammengesetzte Verteilungsaufgaben

Oftmals werden Verteilungen als nicht gerecht oder zu ungenau empfunden, wenn nur eine Verteilungsgrundlage zugrunde gelegt wird. In solchen Fällen wird die zu verteilende Größe zerlegt und ein Teil davon nach einer Verteilungsgrundlage umgelegt und ein anderer Teil nach einer anderen.

Ein ähnlicher Fall liegt vor, wenn sich die Beteiligten darauf einigen, dass einer oder mehrere Personen aus der zu verteilenden Größe Vorausleistungen erhalten sollen. Dies kommt oft bei Erbauseinandersetzungen oder auch im Gesellschaftsrechnen vor. In diesen Fällen spricht man von einer zusammengesetzten bzw. differenzierten Verteilungsrechnung.

Beispiel 1: Mehrere Verteilungsgrundlagen

In einem Mietshaus wohnen die Mietparteien Familie Abel (3 Personen), das Ehepaar Brigant und der Auszubildende Climt. Die im abgelaufenen Abrechnungsjahr angefallenen Kosten für Erdgas in Höhe von 2 100 € sind so zu verteilen, dass $\frac{3}{10}$ entsprechend der Wohnungsgröße und $\frac{7}{10}$ entsprechend den Verbrauchswerten der Wärmemengenmessgeräte umgelegt werden.

Beteiligte	Wohnungsgröße (m^2)	Verbrauchseinheiten
Abel	120	5
Brigant	60	3
Climt	30	2

Es sind die Kostenanteile unter Berücksichtigung der obigen Angaben zu berechnen.

Lösung:

Es werden $\frac{3}{10}$ von 2 100 € = **630** € nach der Wohnungsgröße und $\frac{7}{10}$ von 2 100 € = **1 470** € nach den Verbrauchseinheiten verteilt.

Verteilungstabelle:

Beteiligte	Wohnungs-größe (m^2)	Teile	**Anteil 1** (€) nach m^2	Verbrauchs-einheiten	**Anteil 2 (€)** nach Einh.	**Gesamt-Anteil (€)**
Abel	120	4	360	5	735	1 095
Brigant	60	2	180	3	441	621
Climt	30	1	90	2	294	384
		7 T. =	**630**	10 T. =	**1 470**	**2 100**
		1 T. =	90	1 T. =	147	

Beispiel 2: Verteilung mit Vorausleistungen

Nach dem Tode des Vaters steht für die Kinder A, B und C ein Guthaben von 130 000 € zur Verteilung an. Das Geld soll gleichmäßig an die drei Kinder verteilt werden, allerdings unter der Berücksichtigung, dass Sohn A zu Lebzeiten des Vaters bereits 40 000 € zum Kauf eines Grundstücks erhalten hat und Tochter C für die treue Pflege des Vaters vorab 20 000 € erhalten soll.

Lösung:

Zu verteilen: 130 000 + 40 000 = 170 000
– Vorausleistung Tochter = 20 000
Zu gleichen Teilen = 150 000

Verteilungstabelle:

Beteiligte	Bereits erhalten	Voraus-leistung	Zu gl. Teilen	Noch auszuzahlen
A	– 40 000	-	50 000	**10 000 €**
B	-	-	50 000	**50 000 €**
C	-	+20 000	50 000	**70 000 €**
				130 000 €

Erläuterungen:
Das Erbe des Vaters (zu verteilende Größe) setzt sich zusammen aus dem Bankguthaben und dem zu Lebzeiten bereits ausgezahlten Betrag an den Sohn, also
130 000 € + 40 000 € = 170 000 €.
Von dieser Summe wird zunächst die Tochter mit 20 000 € bedacht, der Rest wird zu gleichen Teilen verteilt.

6 Durchschnittsrechnung

6. 1 Inhalt der Durchschnittsrechnung

Die Durchschnittsrechnung trägt dazu bei, eine Zahlenreihe von Größen beurteilen zu können. Um zum Beispiel die zukünftigen monatlichen Ausgaben für Handy-Gebühren besser einschätzen zu können, kann es sinnvoll sein, auf den durchschnittlichen Verbrauch vergangener Monate zurückzugreifen:

Monat	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**	**Mai**	**Juni**	**Summe**
Ausgaben (€)	50	60	80	40	30	40	**300**

Wenn der Handy-Nutzer in den 6 Monaten des ersten Halbjahres insgesamt 300,00 € verbraucht hat, so entspricht das einem **Durchschnitts-**Verbrauch von 300,00 € **:** 6 Monate = 50,00 € je Monat. Derselbe Gesamtverbrauch würde sich in den sechs Monaten ergeben, wenn der Handy-Nutzer jeden Monat 50,00 € verbraucht hätte.
Mathematisch führt dies zur folgenden Definition des Durchschnitts:
Werden die Zahlen einer Zahlenreihe aus n Zahlen durch jeweils ein und dieselbe Zahl ersetzt, so entsteht eine neue Zahlenreihe. Haben beide Zahlenreihen dieselbe Summe, so heißt die ersetzende Zahl „Durchschnitt der Zahlenreihe".
<u>Daraus folgt:</u> Der n-fache Wert des Durchschnitts ist gleich der Summe der n Einzelwerte der Zahlenreihe, kurz:

Durchschnitt · n = Summe der n Einzelwerte

Je nach Aufgabenstellung wird zwischen dem **einfachen** und dem **gewogenen** Durchschnitt unterschieden.

6. 2 Berechnung des einfachen Durchschnitts

Beispiel:
Ein Konzertveranstalter verzeichnete an 6 Tagen einer Woche die folgenden Zuschauerzahlen:
Montag 2 100; **Dienstag** 2 300; **Mittwoch** 2 200; **Donnerstag** 1700; **Freitag** 1 800; **Samstag** 1 900
Wie viel Besucher kamen durchschnittlich zu den 6 Veranstaltungen?

<u>Lösung:</u>

$$\text{Einfacher Durchschnitt} = \frac{\textbf{Summe der Einzelwerte}}{\textbf{Anzahl der Einzelwerte}}$$

Für den Durchschnitt wird das Symbol $\bar{x}$ verwendet.
$\bar{x}$ wird gelesen: „x quer".

<u>Ausrechnung:</u>

$$\begin{array}{r} 2\,100 \\ +\ 2\,300 \\ +\ 2\,200 \\ +\ 1\,700 \\ +\ 1\,800 \\ \underline{+\ 1\,900} \\ 12\,000 \end{array}$$

Einfacher Durchschnitt:

$$\bar{x} = \frac{12\,000}{6} = 2\,000$$

Die Formel ergibt sich durch Umstellen aus der eingangs dargestellten Beziehung.

Aus $\text{Durchschnitt} \cdot n = \text{Summe der Einzelwerte}$

folgt $$\text{Durchschnitt} = \frac{\text{Summe der Einzelwerte}}{n}$$

6. 3 Berechnung des gewogenen Durchschnitts

Treten die Einzelwerte der Zahlenreihe mehrfach auf, so werden diese zur Abkürzung des Rechenweges zusammengefasst. Die Multiplikation der verschiedenen Einzelwerte mit ihren Häufigkeiten nennt man „gewichten". Daher spricht man auch vom **gewogenen** Durchschnitt.

Die Gewichtung der Werte mit ihren Häufigkeiten stellt sicher, dass die Einzelwerte den zu berechnenden Durchschnitt umso mehr beeinflussen, je häufiger sie vorkommen. Sie haben, so sagt man, ein stärkeres Gewicht.

Beispiel:
Zu den Veranstaltungen einer Konzertreihe wurden insgesamt 6 000 Eintrittskarten zu je 10,00 €, 4 000 zu je 25,00 € und 2 000 zu je 40,00 € verkauft. Zu berechnen ist der durchschnittliche Kartenpreis.

Lösung:

$$\textbf{Gewogener Durchschnitt} = \frac{\textbf{Summe der gewichteten Werte}}{\textbf{Anzahl der Einzelwerte}}$$

$$\text{Gewogener Durchschnitt} = \frac{10 \cdot 6\,000 + 25 \cdot 4\,000 + 40 \cdot 2\,000}{12\,000}$$

$$= 20$$

Tabellarische Lösung:

Preis je Karte in €	Stückzahl	Wert je Kategorie in €
10,00	6 000	60 000,00
25,00	4 000	100 000,00
40,00	2 000	80 000,00

Summe: 240 000,00

: 12 000

Durchschnittspreis je Karte in € = 20,00

<u>Erläuterung:</u>
Der einfache Durchschnitt würde in diesem Fall 25,00 € betragen:
(10 + 25 + 40) : 3 = 75 : 3 = 25
Das wäre aber zu ungenau gerechnet. Da von den billigeren Karten mehr abgesetzt wurden als von den teureren, sind sie stärker zu gewichten. Durch die Multiplikation der Preise mit den abgesetzten Mengen wird dies berücksichtigt.
Weil von den billigen Karten am meisten verkauft wurden, ist der gewogene Durchschnitt (20,00 €) geringer als der einfache Durchschnitt (25,00 €).