Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Ronald Deusch
Oberstudienrat

* * * * *

1. Auflage 2011

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0604-0

Vorwort

Der Übergang von beruflichen Gymnasien (BG), Berufskollegs (BK), Fachoberschulen (FOS) und Berufsoberschulen (BOS) zu naturwissenschaftlichen, wirtschaftswissenschaftlichen und technischen Studiengängen an Fachhochschulen, Berufsakademien und Universitäten stellt für viele Studentinnen und Studenten gerade im Fach Mathematik eine hohe Hürde dar. Häufig wird aufgrund fehlender Grundkenntnisse das Fach Mathematik zu einem Problemfach. Wissenslücken in elementarer Mathematik erschweren den Studieneinstieg. Um diese Hürde zu überwinden, benötigen die Studentinnen und Studenten individuelle Förderung und Hilfestellung.

Deshalb bieten mittlerweile Dozenten und Studentenmentoren Vorbereitungs- und Stützkurse an, die diesen Übergang ohne Zeit- und Motivationsverlust bewältigen helfen.

Das vorliegende Werk ist ein Arbeitsbuch für alle Vorbereitungskurse an Fachhochschulen, Berufsakademien und Universitäten mit naturwissenschaftlichen, wirtschaftswissenschaftlichen und technischen Studiengängen sowie für alle Vorbereitungskurse an den abgebenden Schulen. Die Inhalte wurden in enger Absprache und in Zusammenarbeit mit Dozenten von Fachhochschulen, Berufsakademien und Universitäten ausgewählt.

Anhand von Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen werden die grundlegenden Vorkenntnisse für die ersten Semester erarbeitet, d. h., die rechentechnischen Grundfertigkeiten werden trainiert und der Aufbau von grundlegenden mathematischen Kompetenzen wird gefördert. Dabei wird auf den Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern und CAS-Rechnern verzichtet.

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ab. Diese eignen sich zur Ergebnissicherung und zur Übung. Am Ende des Buches sind zur Selbstkontrolle die Lösungen abgedruckt.

Um den Studentinnen und Studenten eine schnelle Orientierung über die Inhalte zu ermöglichen, werden Farben als Gestaltungsmittel eingesetzt.

Aufgabenbeispiele und Aufgaben sind grau hinterlegt.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige Grundlagen sind rot hinterlegt.

Bemerkungen, Hinweise und Beachtenswertes sind blau hinterlegt.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlenmengen

Eine Zahlenmenge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Zahlen.

Mengen werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Beispiel: Gegeben sind die Mengen $A = \{1; \frac{3}{2}; 2\}$ und $C = \{1; \frac{3}{2}; 8, 10; 14\}$.

1 ist **ein Element** aus A: $1 \in A$ $\quad\quad$ $\frac{1}{2}$ ist **kein Element** aus C: $\frac{1}{2} \notin C$

Schreibweisen für Mengen

$B = \{1; \frac{3}{2}; 8\}$ $\quad$ aufzählende Darstellung

$\quad = \{x \in C \mid x < 10\}$ $\quad$ beschreibende Darstellung

In Worten: Menge aller x aus C, für die gilt: $x < 10$.

Leere Menge $\{x \in A \mid x < 0{,}5\} = \varnothing$ d. h., die Menge enthält kein Element.

Teilmenge: Jedes Element von B ist auch Element von C: $B \subseteq C$

Beispiel: $\{1; \frac{3}{2}; 8\} \subseteq \{1; \frac{3}{2}; 8, 10; 14\}$

Mengenverknüpfungen

Vereinigungsmenge: $A \cup B$ enthält alle Elemente, die zu A **oder** zu B gehören

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ $\quad$ $\boxed{\vee \text{ bedeutet „oder“}}$

Beispiel: $A \cup B = \{1; \frac{3}{2}; 2\} \cup \{1; \frac{3}{2}; 8\} = \{1; \frac{3}{2}; 2; 8\}$

Schnittmenge: $A \cap B$ enthält alle Elemente, die zu A **und** zu B gehören

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ $\quad$ $\boxed{\wedge \text{ bedeutet „und“}}$

Beispiel: $A \cap B = \{1; \frac{3}{2}; 2\} \cap \{1; \frac{3}{2}; 8\} = \{1; \frac{3}{2}\}$

Differenzmenge: $A \backslash B$ enthält alle Elemente, die zu A **aber nicht** zu B gehören

$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Beispiel: $A \backslash B = \{1; \frac{3}{2}; 2\} \backslash \{1; \frac{3}{2}; 8\} = \{2\}$

Besondere Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3...\}$

Menge der **natürlichen Zahlen ohne null:** $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3...\}$ *** bedeutet ohne null**

Menge der **ganzen Zahlen:** $\mathbb{Z} = \{... -2; -1; 0; 1; 2; 3...\}$

Menge der **rationalen Zahlen:** $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\}$

(Menge aller Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen.)

In Worten: Menge aller Bruchzahlen $\frac{p}{q}$ für die gilt: $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$.

Menge der **irrationalen Zahlen,** die Elemente sind nicht als Bruch darstellbar.

Beispiele für irrationale Zahlen: $\sqrt{3}; \sqrt{\frac{1}{2}}; \pi$

Menge der **reellen Zahlen:** $\mathbb{R}$

Sie besteht aus der Menge der rationalen und der Menge der irrationalen Zahlen.

Menge der **reellen Zahlen ohne null:** $\mathbb{R}^*$

Menge der **positiven reellen Zahlen:** $\mathbb{R}_+$ (Null ist enthalten.)

Menge der **negativen reellen Zahlen:** $\mathbb{R}_-$ (Null ist enthalten.)

Beachten Sie:

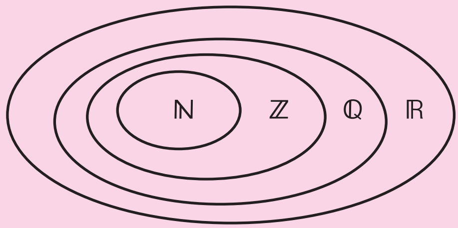
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ bedeutet:

$\mathbb{N}$ ist Teilmenge von $\mathbb{Z}$,

d. h., jede natürliche Zahl

ist auch eine ganze Zahl.



Teilmengen der Menge der reellen Zahlen (Intervalle)

Beispiele

Menge A der reellen Zahlen, die größer oder gleich 0 **und** kleiner oder gleich 6 sind.

A in **Mengenschreibweise:** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x \leq 6\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 6\}$

A in **Intervallschreibweise:** $A = [0; 6]$

Darstellung des Intervalls am Zahlenstrahl:

Menge B der reellen Zahlen, die größer 3 und kleiner 7 sind: $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 7\}$

B in **Intervallschreibweise:** $B =]3; 7[$

Darstellung des Intervalls am Zahlenstrahl:

Menge C der reellen Zahlen, die kleiner – 2 **oder** größer 2 sind: $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee x > 2\} = \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$

Darstellung des Intervalls am Zahlenstrahl:

Aufgaben

1. Die Elemente der Menge A haben eine gemeinsame Eigenschaft. Welche?
   Geben Sie drei weitere Elemente von A an.

   a) $A = \{2; 4; 6; 8; ...\}$ b) $A = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; ...\}$ c) $A = \{0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; ...\}$

2. Gegeben sind die Mengen $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x > 4\}$ und $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$.
   Bestimmen Sie $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

3. Geben Sie vier Elemente der Menge B an. Geben Sie eine Zahl an, die die Bedingung erfüllt, aber nicht zu B gehört.

   a) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 < x < -5\}$

4. Welche Zahlen gehören zu welcher Zahlenmenge?

   Verwenden Sie die Zeichen $\notin$ oder $\in$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-4				
$\frac{2}{7}$				
$-28{,}352$				
$\sqrt{19}$				
$\sqrt{-4}$				
2π				

5. Schreiben Sie als Intervall. Kennzeichnen Sie die Menge am Zahlenstrahl.

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x \leq 6\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 9\}$

   c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1{,}5 \leq x \leq 1\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2{,}25\}$

6. Beschreiben Sie die Menge in Worten.

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4{,}2\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \wedge x < 3\}$

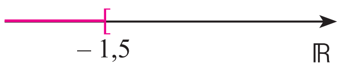
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5 \wedge x \geq 0{,}5\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -6 \vee x \leq 2\}$

7. Schreiben Sie in Mengenschreibweise.

   a) $[-1; 0]$ b) $]-\infty; 0]$ c) $]2; 12[$ d) $[-5; \infty[$

8. Beschreiben Sie die rot markierte Menge.

   a)



   b)

2 Rechnen mit Termen

2.1 Algebraische Begriffe

Beachten Sie: Ein **Term** ist ein mathematischer Ausdruck.

Terme sind Zahlen	$2; 3^2; 2; 4; \ldots$
oder **Variablen**	$x; a; x^3; \sqrt{x}; \ldots$
oder sinnvolle Kombinationen von	
Variablen, Zahlen und Rechenzeichen.	$7 \cdot 3 + 15; x + 5y; \ldots$

Addition

Summanden

$$\underbrace{a + b}_{\text{Summe}}$$

Subtraktion

$$\underbrace{a - b}_{\text{Differenz von a und b}}$$

Multiplikation mit Variablen:

Variable

$$3 \cdot x$$

Koeffizient

$$\underbrace{x + x + x}_{\text{Summe}} = \underbrace{3 \cdot x}_{\text{Produkt}}$$

Faktoren

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{Produkt}} = \underbrace{x^3}_{\text{Potenz}}$$

a^n	Potenz
a	Basis
n	Exponent

Division

Zähler

Nenner

$$\left.\frac{a}{b}\right\} \text{Quotient (Bruch)}$$

$$\frac{1}{a}$$

Kehrwert von a

Vereinbarungen:

Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Festlegung: $0! = 1$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $0 \leq k \leq n$ Festlegung: $\binom{n}{0} = 1$

Summenzeichen: $\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$

Summe über a_i für i von 1 bis k

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten aus den beiden Zahlen.

a) 14; 22 b) 3,5; 2,5 c) $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$

2. Zerlegen Sie in ein Produkt.

a) 3^4 b) $4\pi + 4$ c) $2x + 5x + 4{,}5x$

3. Kürzen Sie den Bruch soweit wie möglich.

a) $\frac{156}{9}$ b) $\frac{24}{176}$ c) $\frac{102abc^2}{60a^3b^2c}$

4. Bilden Sie den Kehrwert.

a) 5 b) 2,3 c) $\frac{3}{7}$ d) $5\frac{1}{2}$ e) $\frac{a}{3}$

5. Vereinfachen Sie.

a) $\frac{\frac{13}{7}}{3}$ b) $\frac{2}{\frac{5}{9}}$ c) $(4 + \frac{3}{7}) \cdot \frac{7}{6}$ d) $\frac{5}{17} \cdot 2 + \frac{5}{17} \cdot 8$

6. Vereinfachen Sie.

a) $(\sqrt{3})^2$ b) $\sqrt{50} + \sqrt{2}$ c) $(\sqrt{a})^3$ d) $\frac{1}{2}(\sqrt{2})^3$

7. Berechnen Sie ohne TR.

a) $1{,}02 \cdot 15$ b) 8 % von 550 c) $\frac{4}{5}$ von 30 d) $\frac{12}{5}$ von 40

8. Ordnen Sie die nachfolgenden Brüche. Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl.

$1{,}3;\ -2{,}1;\ -\frac{16}{9};\ -\frac{9}{8};\ \frac{3}{4};\ 0{,}76;\ \frac{28}{20};\ 1{,}45;\ \frac{29}{15}.$

9. Berechnen Sie den Wert der folgenden Terme für $a = 2$, $b = -6$ und $c = -\frac{2}{3}$.

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ b) $\sqrt{abc}$ c) $(c - b)^a$ d) $a^3 + b^2 - c^2$

10. Setzen Sie =, < oder > ein.

a) $\frac{3}{4} \square \frac{4}{5}$ b) $\frac{6}{5} \square \frac{19}{20}$ c) $\frac{5}{7} \square \frac{61}{84}$ d) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \square \frac{1}{10}$

11. Lösen Sie die Formeln nach den gegebenen Variablen auf.

a) $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$ b) $V = \frac{1}{3} Gh$ c) $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

12. Berechnen Sie.

a) $8!$ b) $\frac{5!}{3!2!}$ c) $\binom{10}{2}$ d) $\binom{9}{3} + \binom{9}{6}$

13. Berechnen Sie.

a) $\sum\limits_{i=1}^{5} (\frac{1}{2i})$ b) $\sum\limits_{n=1}^{4} \left((-1)^n(n + 1)\right)$ c) $\sum\limits_{k=0}^{2} \left(\binom{2}{k} \cdot x^{2-k} \cdot 4^k\right)$

2.2 Rechnen mit Summen und Differenzen

1) **Gleichartige Glieder lassen sich zusammenfassen.**

$2x + 5y - 4x - 15y - 23x + 2{,}5y = 2x - 4x - 23x + 5y - 15y + 2{,}5y = -25x - 7{,}5y$

2) **Rechenzeichen und Vorzeichen vor der Klammer beachten.**

$-(4a - 2b) - (b - a) + 5a = -4a + 2b - b + a + 5a = 2a + b$

3) **Jedes Glied der Summe wird mit dem Faktor multipliziert.**

Gliedweise ausmultiplizieren.

$6(x - 2y) - 8(3 - 4x - 2y) + 1 = 6x - 12y - 24 + 32x + 16y + 1 = 38x + 4y - 23$

4) **Faktoren dürfen vertauscht werden.**

$\frac{2}{3}xy \cdot (-3x) = \frac{2}{3} \cdot (-3) \cdot x \cdot x \cdot y = -2x^2y$

5) **Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.**

$a - \frac{1}{2}[5a - (b - 8a)] = a - \frac{1}{2}[5a - b + 8a] = a - \frac{1}{2}(13a - b) = a - \frac{13}{2}a + \frac{1}{2}b = -\frac{11}{2}a + \frac{1}{2}b$

6) **Multiplikation von Summen.**

$(a - 3)(a + 8) = a^2 - 3a + 8a - 3 \cdot 8 = a^2 + 5a - 24$

Beachten Sie: **Ausmultiplizieren** von Summen heißt, **jeden Summanden** der einen Summe mit **jedem Summanden** der anderen Summe **multiplizieren.**

Unterscheiden Sie: $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$

$x - 4 \cdot (x - 2) = x - 4x + 8 = -3x + 8$

Punktrechnung vor Strichrechnung

Aufgaben

1. Vereinfachen Sie.

a) $18a - 3x + 6a - 3(x + a) - 5(a - 2x)$

b) $15ax + 3ax - 7a \cdot (-2x)$

c) $2 \cdot 4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b - 18ab$

d) $-3(x^2 - x) + (x^2 - 2x + 3) \cdot (-2)$

e) $6{,}5x^2 - [5x - x(3 - 4x) + 2] \cdot (-0{,}5)$

f) $x - 5x(x^2 - 3x) \cdot (-4) - 5x^2$

g) $1{,}2 \cdot (x + x \cdot 1{,}2) + 1{,}2^2 \cdot x$

h) $-\frac{a^2}{2} - (\frac{3}{2}a)^2 + \frac{1}{4}(2 - 2a^2)$

i) $\frac{1}{5}x - 3[x - x(1 - 4a) + ax]$

j) $\frac{3}{2}[5(x - 2(x - 4)) + 2]$

2. Multiplizieren Sie aus (Schreiben Sie ohne Klammern.).

a) $(x - 5)(2x - 3)$

b) $\frac{2}{3}(x - 2)(x + 3)$

c) $-(3a + 5b)(3a + 4b)$

d) $\frac{3}{2}(x + 4)(x + 4)$

e) $(4 - 2x)(-2x + 4)$

f) $\frac{x - 5}{2} \cdot (4x + 8)$

g) $a(b + c) - 2ab$

h) $(a + b)(a - c)$

i) $(3a + 2b)^2$

2.3 Rechnen mit Bruchtermen

Bruchterm: $\frac{x^2-4x}{2x-1}$ **Zählerterm:** x^2-4x

Nennerterm: $2x-1$

Der Term ist nur definiert für $2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0{,}5$

Der Term hat den (maximalen) **Definitionsbereich** $D = \mathbb{R}\backslash\{0{,}5\}$.

1) **Kürzen**

a) $\frac{65}{143} = \frac{5 \cdot 13}{11 \cdot 13} = \frac{5}{11}$

b) $\frac{36abc^3}{3a^2bc} = \frac{12c^2}{a}$

c) $\frac{3x^2+6x}{2(x+2)} = \frac{3x(x+2)}{2(x+2)} = \frac{3x}{2}$ Zähler- und Nennerterm durch denselbenTerm kürzen.

2) **Gleichnamige Brüche addieren, heißt Zähler addieren und Nenner beibehalten.**

a) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} + 1 = \mathbf{\frac{3-4+5}{5}} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{x}{y} + \frac{7x}{y} = \frac{x+7x}{y} = \frac{8x}{y}$

3) **Ungleichnamige Brüche werden zunächst gleichnamig gemacht (erweitert) und dann addiert.**

a) $\frac{1}{2} - \frac{6}{5} = \mathbf{\frac{5}{10}} - \mathbf{\frac{12}{10}} = -\frac{7}{10}$

b) $-\frac{x}{4} - \frac{3x}{2} = -\frac{x}{4} - \frac{6x}{4} = -\frac{7x}{4} = -\frac{7}{4}x$

c) $\frac{6}{x-3} + \frac{1}{x^2-3x} = \frac{6}{x-3} + \frac{1}{x(x-3)} = \frac{6 \cdot x}{(x-3) \cdot x} + \frac{1}{x(x-3)} = \frac{6 \cdot x + 1}{(x-3) \cdot x}$

4) **Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.**

a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \mathbf{\frac{5 \cdot 1}{8 \cdot 7}} = \frac{5}{56}$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{6} = \frac{3 \cdot x}{4 \cdot 6} = \frac{x}{8} = \frac{1}{8}x$ (kürzen)

c) $\frac{3x^2+6x}{2} \cdot \frac{1}{(x+2)} = \frac{3x(x+2)}{2(x+2)} = \frac{3x}{2}$ (kürzen)

d) $\frac{1}{2}x \cdot \frac{12}{7}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{7}x^2 = \frac{6}{7}x^2$

e) $\frac{5a+5b}{4a} \cdot \frac{5a^2}{a^2-b^2} = \frac{5(a+b)}{4a} \cdot \frac{5a^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{5 \cdot 5a}{4(a-b)} = \frac{25a}{4(a-b)}$

5) **Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dessen Kehrwert multipliziert.**

a) $\frac{\frac{7}{8}}{\frac{7}{4}} = \frac{7}{8} \cdot \mathbf{\frac{4}{7}} = \frac{1}{2}$ (kürzen)

b) $\frac{\frac{45}{8b}}{\frac{9c}{4b}} = \frac{45}{8b} \cdot \frac{4b}{9c} = \frac{5}{2 \cdot c}$

c) $\frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{m}{s^2}$

d) $\frac{\frac{x}{5y}}{\frac{x+1}{y^2}} = \frac{x}{5y} \cdot \frac{y^2}{x+1} = \frac{xy}{5(x+1)}$

Beachten Sie: $\mathbf{\frac{0}{1} = 0}$, **aber** $\mathbf{\frac{1}{0}}$ **ist nicht definiert.**

Aufgaben

1. Vereinfachen Sie.

a) $\frac{2}{5}+\frac{21}{5}-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{15}$ b) $\frac{1}{7}-\frac{3}{14}+\frac{1}{21}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

d) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-3x$ e) $\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}-\frac{3}{8}x$ f) $\frac{1}{a}-\frac{3}{a}+\frac{1}{2a}$

g) $\frac{\frac{3}{x}}{2}+\frac{5}{x}$ h) $\frac{\frac{2}{x}}{4x}-\frac{5}{x^2}$ i) $\frac{5}{\frac{1}{a}}+3a$

j) $\frac{4}{3a}\cdot\frac{a}{5}$ k) $\frac{x}{3}:\frac{x}{5}$ l) $\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{3}{2t}\right)^2$

m) $\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{a}{\frac{b}{c}}$ n) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x}$ o) $\frac{5x}{x+1}\cdot\frac{4x+4}{x}$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Brüche: $\frac{\frac{1}{a}}{7}$; $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}}$; $\frac{\frac{1}{a}}{a}$; $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{5}{4a}}$; $\frac{\frac{3a}{4}}{\frac{6a}{8}}$.

3. Überprüfen Sie, ob die Rechenausdrücke x^2-bx+c und $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2-4c}{4}$ gleich sind.

4. Überprüfen Sie, ob die beiden Bruchterme $\frac{1}{\frac{p}{q}}$ und $\frac{\frac{1}{p}}{q}$ den gleichen Wert haben.

5. Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich.

a) $\frac{3x^2+6x}{2(x+2)}$ b) $\frac{3x}{x^2+2}$ c) $\frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$

6. Fassen Sie zusammen.

a) $\frac{1}{2a}+\frac{2}{3a}-\frac{3}{4a}$ b) $\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x-1}-\frac{x+3}{x-1}$ c) $\frac{5}{2x+4}-\frac{10}{x+2}+\frac{2x+1}{3x+6}$

7. Vereinfachen Sie.

a) $\frac{2}{a}+\frac{5}{b}$ b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-1}{x-3}$ c) $\frac{5}{x+y}-\frac{4}{x-y}+\frac{3}{x^2-y^2}$

d) $\frac{\frac{4+x^2}{2x}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{2}}$ e) $\frac{1}{2+\frac{1}{x+3}}$ f) $\frac{8a+6}{5ab-b^2}\cdot\frac{25ab-5b^2}{2ab}$

g) $2+\frac{2}{x+2}$ h) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\frac{x}{3}$ i) $\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{(x-y)^2}{4xy}+1}$

j) $\left[\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{y}\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{5x-2y}$ k) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{x+y}$

2.4 Vereinfachung durch Ausklammern

Vorgehensweise beim Ausklammern: Man zerlegt alle Summanden in Faktoren.
Dann wird der (größte) gemeinsame Faktor ausgeklammert.

Beispiele

1) $7x - 14 = 7x - 7 \cdot 2 = 7(x - 2)$ $\qquad -4x + 2 = -2 \cdot 2x + 2 = 2(-2x + 1) = -2(2x - 1)$

2) $\underbrace{30x + 39y - 51}_{\text{Summe}} = 3 \cdot 10x + 3 \cdot 13y - 3 \cdot 17 = 3 \cdot \underbrace{(10x + 13y - 17)}_{\text{Produkt}}$

Summe **gemeinsamer Faktor** **Produkt**

Probe durch Ausmultiplizieren.

3) $-\frac{3}{8} - x - \frac{7}{8}y = -\frac{3}{8} - \frac{8}{8}x - \frac{7}{8}y = -\frac{1}{8}(3 + 8x + 7y)$

Beim Ausklammern eines negativen Faktors Vorzeichen beachten.

$-9 + 9x = -9 \cdot (1 - x) = 9(x - 1)$

4) $x^2 - 8x = x(x - 8)$

5) $4(x - 5) + x(x - 5) = (x - 5)(4 + x)$

(x – 5) ist der gemeinsame Faktor.

6) $\frac{6 - 12x}{6} = \frac{6(1 - 2x)}{6} = 1 - 2x$ $\qquad \frac{18x - 15x^2}{3} = \frac{1}{3}(18x - 15x^2) = 6x - 5x^2$

Keine Summanden, sondern nur Faktoren kürzen.

Beachten Sie: Das **Ausklammern** macht aus einer **Summe** ein **Produkt.**

Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Klammerausdruck.

a) $18x - 12 = 3 \cdot (...)$ b) $\frac{5}{4}a - \frac{3}{4}b = \frac{1}{4} \cdot (...)$ c) $-x + 2xy = -x \cdot (...)$

d) $ax^2 - 8x = x(...)$ e) $\frac{4}{3}a + a^2 = \frac{4}{3}a(...)$ f) $2{,}5a - 1{,}5ab - 0{,}5a^2 = 0{,}5a(...)$

2. Klammern Sie einen geeigneten Faktor aus und vereinfachen Sie.

a) $\frac{1}{2}(2x - 2) - \frac{3}{8}(2x - 2)$ b) $4x - ax + 5bx$ c) $x \cdot t - 2x \cdot t + 4t$

d) $\frac{1}{5}(x - 3) - \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$ e) $\frac{4x - 12}{4} - 6 \cdot \frac{5x - 15}{5}$ f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 6y}{5}$

g) $ab - ax + 2ca - a^2d$ h) $\frac{2}{3}(4 - 2x) - \frac{4x - 2}{3}$ i) $\frac{8x - 2}{2} - \frac{3}{8}(32x - 8)$

2.5 Zerlegung in Linearfaktoren

Beispiele

1) $(x-2)(x-5) = x^2 - 5x - 2x + 10 = x^2 - 7x + 10$

d. h. $-7 = -2 - 5$ und $10 = (-2) \cdot (-5)$

$(x-2)(x-5)$ ist die Zerlegung von $x^2 - 7x + 10$ in Linearfaktoren.

2) $x^2 - 5x + 6 = (x + \square)(x + \square)$

Für die gesuchten Werte gilt: Die Summe ist gleich -5 und das Produkt ist gleich 6.

Die Bedingungen sind erfüllt für die Zahlen -3 und -2.

Zerlegung: $x^2 - 5x + 6 = (x-3) \cdot (x-2)$

Binome als Sonderfälle

1) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)(x-4)$

2) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3)$

3) $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 18 = \frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36) = \frac{1}{2}(x-6)(x-6)$

Diese drei **Sonderfälle** treten in vielen Umformungen auf. Deshalb ist es sinnvoll, sich die nachfolgenden binomischen Formeln zu merken.

Binomische Formeln:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Aufgaben

1. Schreiben Sie in Produktform.

a) $x^2 + 10x + 25$	b) $4x^2 - 8x + 4$	c) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$
d) $25x^2 - 9$	e) $x^2 + 7x + 10$	f) $-x^2 + 6x - 9$
g) $k^2 + 6k + 5$	h) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$	i) $u^2 - 7u - 8$
j) $\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 5)$	k) $4t^2 - 4t + 1$	l) $81b^2 - 169a^2$

2. Füllen Sie die Leerfelder aus.

a) $x^2 + \square x + 2{,}25 = (x + \square)^2$ b) $x^2 - x - \square = (x - \square)(x+4)$

c) $x^2 - 8x + \square = (x - \square)^2$ d) $x^2 - \square x + 6 = (x - \square)(x-3)$

3. Vereinfachen Sie: $(3a - 4b)^2 - (3a + 4b)^2$

4. Faktorisieren Sie: $4a^2x + 12abxy + 9b^2xy^2$

2.6 Rechnen mit Potenzen

Potenzgesetze

1. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert (dividiert), indem man die Hochzahlen addiert (subtrahiert), und die Basis beibehält:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\qquad$ **$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $a \neq 0$**

Beispiele

a) $5^4 \cdot 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$

b) $x \cdot x^3 = x^1 \cdot x^3 = x^{1+3} = x^4$

c) $\frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5^1$

d) $\frac{2^4}{2^4} = 2^{4-4} = 2^0 = 1$

e) $\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

f) $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$

Sinnvolle Festlegungen: $a^0 = 1$; $a \neq 0$ $\qquad$ **$a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a \neq 0$** $\qquad$ **$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a \neq 0$**

2. Potenzen mit gleicher Hochzahl werden multipliziert (dividiert), indem man das Produkt (den Quotienten) der Basen mit der gemeinsamen Hochzahl potenziert:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad$ **$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$; $b \neq 0$**

a) $(-16)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-16 \cdot \frac{1}{2}\right)^3 = (-8)^3 = -512$ $\qquad$ b) $\left(-\frac{x}{4}\right)^3 = -\frac{x^3}{4^3} = -\frac{x^3}{64}$

3. Eine Potenz wird potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert und die Basis beibehält: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

a) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$ $\qquad$ b) $(x^3)^2 = x^6$ $\qquad$ c) $(-x^2)^4 = (x^2)^4 = x^8$

Bemerkung: Die Potenzgesetze gelten auch für Hochzahlen aus der Menge $\mathbb{Z}$.

Zehnerpotenzen

$10^0 = 1$; $\quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$; $\quad 3 \cdot 10^{-3} = \frac{3}{1000}$; $\qquad 2{,}4 \cdot 10^6$ mm $= 2{,}4 \cdot 10^3$ m $\qquad$ 2,4 km

Aufgaben

1. Vereinfachen Sie.

a) $2x^2 \cdot x^4$ $\quad$ b) $4x^2 \cdot (x^4 - 5x)$ $\quad$ c) $\left(\frac{1}{4}x^2\right)^3$ $\quad$ d) $\frac{21x^5}{3x}$

e) $\frac{10^4}{2^4} + 5^4 + \frac{5}{x^{-2}}$ $\quad$ f) $\left(-\frac{4}{7}x\right)^3$ $\quad$ g) $\frac{1}{5}a^4 \cdot a$ $\quad$ h) $\frac{2a^5b^{-2}}{a^{-3}b^2}$

2. Schreiben Sie ohne Hochzahl.

a) $6{,}1 \cdot 10^6$ $\quad$ b) $4 \cdot 10^{-3}$ $\quad$ c) $0{,}3 \cdot 10^{-4}$ $\quad$ d) $1{,}25 \cdot 10^3$

3. Schreiben Sie nur mit positiven Hochzahlen: $\left(\frac{x^2y^{-2}z^4}{ab^{-2}}\right) : \left(\frac{xy^2}{z^{-1}a^{-4}b^2}\right)$.

2.7 Rechnen mit Wurzeln

Die **Quadratwurzel** aus einer **nichtnegativen Zahl a** ist die Zahl größer oder gleich null, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.
Für $a \geq 0$: $\sqrt{a} \geq 0$ und $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$

Rechnen mit Quadratwurzeln

a) $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ $\qquad$ $3\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + \sqrt{2} = -5\sqrt{7} + \sqrt{2}$

Nur Wurzeln mit gleichem Radikand (Zahl unter der Wurzel) lassen sich zusammenfassen.

b) $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$, **aber** $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$

c) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

d) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

e) $\sqrt{18} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$; $a \geq 0$, $b > 0$

Potenzschreibweise: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $a \geq 0$

Die **3. Wurzel (n-te Wurzel)** aus einer nichtnegativen Zahl a ist die Zahl größer oder gleich null, deren 3. (n-te) Potenz a ergibt.

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

Potenzschreibweise ($a \geq 0$): $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $a \geq 0$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Bemerkung: Die Potenzgesetze gelten auch für Hochzahlen aus der Menge $\mathbb{Q}$.

Aufgaben

1. Vereinfachen Sie.

a) $\sqrt{3}\ \sqrt{27t}$ b) $(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$ c) $(e^{0,5} - e^{-0,5})\sqrt{2e}$ d) $0{,}5e\sqrt{e^{-2}} + 2$

e) $\sqrt[3]{5}\ \sqrt[3]{25}$ f) $\sqrt[3]{t}\ \sqrt[3]{t^2}$ g) $(\sqrt[4]{6})^8$ h) $\sqrt{e}\ e^{x-0,5}$ i) $(\sqrt[4]{e^2} + \sqrt{e})e^{0,5}$

2. Schreiben Sie als Potenz.

a) $\sqrt[3]{t}$ b) $(\sqrt{x})^5$ c) $\sqrt[4]{a^3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{e} \cdot e^x$

f) $\sqrt[3]{5}\ \sqrt{5}$ g) $a^{\frac{1}{2}}\ a^2\ \sqrt{a}$ h) $\sqrt[4]{e^2} + 4e^{0,5}$ i) $\sqrt[3]{e^{a+3}}\ e^{-a}$ j) $(\sqrt{a})^{0,5}$

3. Ein Kapital wächst bei gleichbleibendem Zinssatz in 5 Jahren mit Zinseszinsen um 30 % an. Wie hoch ist der jährliche Zinssatz?

2.8 Rechnen mit Logarithmen

Logarithmus-Definition:

$a^x = b \iff x = \log_a(b)$; $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $a \neq 1$ Der **Logarithmus einer Zahl b** zur Basis a ist die Zahl x, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

$e^x = b \iff x = \ln(b)$ ln(b) ist die **Hochzahl zur Basis** e, sodass die Potenz den Wert b hat (zu e vgl. Seite 42).

Beispiele: $\log_a(1) = 0$, denn $a^0 = 1$ $\log_a(a^2) = 2$

$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$ $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ denn $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Folgerungen: $a^{\log_a(b)} = b$ $\log_a(a^x) = x$ $\log_a(1) = 0$ $\log_a(a) = 1$

$e^{\ln(b)} = b$ $\ln(e^x) = x$ $\ln(1) = 0$ $\ln(e) = 1$

Logarithmus-Regeln: (vgl. Potenzgesetze für Potenzen mit gleicher Basis)

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x)$ $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$

aber: $\log_a(x + y) \neq \log_a(x) + \log_a(y)$

Beispiele: (Die Basis a wird weggelassen.)

$\log(7x) = \log(7) + \log(x)$ $\log(\frac{1}{8}) = \log(1) - \log(8) = -\log(8)$

$\log(\sqrt{x}) = \log(x^{0,5}) = 0{,}5\log(x)$

$\log(x^4) + \log\sqrt[5]{x^2} = 4\log(x) + \frac{2}{5}\log(x) = \frac{22}{5}\log(x) = \log(x^{\frac{22}{5}}) = \log(\sqrt[5]{x^{22}})$

$\log(x - 3)$ ist definiert für $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

Zusammenhang von Potenz, Wurzel und Logarithmus

Basis x: $x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ **Exponent x:** $a^x = b \Rightarrow x = \log_a(b)$

Aufgaben

1. Zerlegen Sie.

a) $\log(abc)$ b) $\log(100x^2)$ c) $\log((x + 1)^2)$

d) $\log(\frac{a}{b + c})$ e) $\log(\sqrt[3]{x})$ f) $\log(\sqrt{(\frac{x}{y})^3})$

2. Zeigen Sie: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ für $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

3. Bestimmen Sie den Definitionsbereich des Terms $\log(6x + 13)$.

4. Fassen Sie zusammen: $\frac{1}{2}\log x^{2m+1} - (m + 1)\log\sqrt[3]{x^2}$

2.9 Rechnen mit Betrag

Definition: Betrag einer Zahl a $|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$

Beispiele

$$|-7a| = \begin{cases} 7a & \text{für } a \geq 0 \\ -7a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{für } x \geq -3 \\ -(x+3) & \text{für } x < -3 \end{cases}$$

$|a-3| = 5 \Leftrightarrow a-3 = 5 \vee a-3 = -5 \Leftrightarrow a = 8 \vee a = -2$

Alle (reellen) Zahlen, die von 3 **genau 5** entfernt sind.

Rechnen mit Beträgen

Beispiele

$$|x-4| - 2x = \begin{cases} x-4-2x = -4-x & \text{für } x \geq 4 \\ -(x-4)-2x = -3x+4 & \text{für } x < 4 \end{cases}$$

Bemerkung: $x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$$|x^2-9| + 3 = \begin{cases} x^2-9+3 = x^2-6 & \text{für } x < -3 \vee x > 3 \\ -x^2+9+3 = -x^2+12 & \text{für } -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Bemerkung: $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

$5 - a \leq y \leq 5 + a;\ a \geq 0$ in Betragsschreibweise: $|5-y| \leq a$

Alle (reellen) Zahlen, die von 5 **höchstens a** entfernt sind.

Aufgaben

1. Schreiben Sie betragsfrei.

   a) $|2x| - 1$ b) $|6-4x| + 2$

   c) $|\frac{1}{2}x - 1| + x$ d) $|x^2 - 1| - 7$

2. Welche Zahlen erfüllen die Bedingung?

   a) $|4x| = 1$ b) $|4-x| = 1$

   c) $|x-4| = 1$ d) $|4-x| \leq 1$

3. Schreiben Sie in Betragsschreibweise ($x \in \mathbb{R}$).

   a) $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$ b) $\{x \mid -1 \leq x \leq 7\}$

   c) $\{x \mid -2a \leq x \leq 2a\}$ d) $\{x \mid 1-2u \leq x \leq 1+2u\}$

2.10 Polynomdivision

Polynom

Ein **Polynom n-ten Grades** ist eine Summe der Art $\mathbf{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n}$**.**

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ heißen **Koeffizienten.**

Mit Hilfe der **Polynomdivision** kann z. B. ein gebrochen-rationaler Term in einen ganzrationalen Term mit oder ohne Rest umgeschrieben werden.

Beispiel

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 17x^2 + 7x - 8) : (x + 1) = 2x^2 + 15x - 8 \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2)} \quad \longleftarrow 2x^2(x+1) \\
\qquad 15x^2 + 7x \\
\qquad \underline{-(15x^2 + 15x)} \quad \longleftarrow 15x(x+1) \\
\qquad\qquad -8x - 8 \\
\qquad\qquad \underline{-(-8x - 8)} \quad \longleftarrow -8(x+1) \\
\qquad\qquad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

d. h. $\dfrac{2x^3 + 17x^2 + 7x - 8}{x + 1} = 2x^2 + 15x - 8$

Beispiel

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + 3) : (x - 1) = x^2 - 2x - 2 + \frac{1}{x-1} \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad -2x^2 + 3 \\
\quad \underline{-(-2x^2 + 2x)} \\
\qquad\quad -2x + 3 \\
\qquad \underline{-(-2x + 2)} \\
\qquad\qquad\quad 1
\end{array}
$$

d. h. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3}{x - 1} = x^2 - 2x - 2 + \dfrac{1}{x-1}$

Aufgaben

1. Führen Sie die Polynomdivision durch:

   a) $(0{,}5x^3 - x + 2) : (x + 2)$ b) $(x^3 + 5x^2 - 17x - 21) : (x - 1)$

2. Vereinfachen Sie.

   a) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4}$ b) $\dfrac{-3x^3 + 4x^2 + 10}{x - 2}$

3. Zeigen Sie mithilfe der Polynomdivision:

   $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = (x - 1)^2 (x + 1)(x + 3).$

4. Lösen Sie folgende Gleichungen durch Polynomdivision.

   a) $x^3 + 5x^2 - 17x - 21 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ c) $-3x^3 + 4x^2 + 8 = 0$

3 Gleichungen

3.1 Gleichungen und Ungleichungen 1. Grades

Beispiele

1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(x-1) = 4x + 3;\ x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Beide Seiten mit 2 multiplizieren:	$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(x-1) = 4x + 3$	$\mid \cdot\ 2$
Klammer ausmultiplizieren:	$3x - (x-1) = 8x + 6$	
	$3x - x + 1 = 8x + 6$	
Auf beiden Seiten (8x) subtrahieren:	$2x + 1 = 8x + 6$	$\mid -8x$
Auf beiden Seiten 1 subtrahieren:	$-6x + 1 = 6$	$\mid -1$
Beide Seiten durch (– 6) teilen:	$-6x = 5$	$\mid : (-6)$
Lösung:	$x = -\frac{5}{6}$	
Lösungsmenge:	$L = \{-\frac{5}{6}\}$	

Bemerkung: Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern, nennt man **Äquivalenzumformungen.**

Beachten Sie: Eine **lineare Gleichung** in x kann auf die Form

$ax = b;\ a \neq 0$, gebracht werden.

Die **Lösungsvariable x** tritt nur in der **1. Potenz** auf.

2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $1 - \frac{3}{2}x \leq 2;\ x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Auf beiden Seiten 1 subtrahieren:	$1 - \frac{3}{2}x \leq 2$	$\mid -1$
Beide Seiten mit 2 multiplizieren:	$-\frac{3}{2}x \leq 1$	$\mid \cdot\ 2$
Beide Seiten durch (– 3) teilen:	$-3x \leq 2$	$\mid : (-3)$
	$x \geq -\frac{2}{3}$	

Lösungsmenge: $L = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -\frac{2}{3}\}$

Beachten Sie: Beim Multiplizieren (und Dividieren) mit einer **negativen Zahl,** dreht sich das **Ungleichheitszeichen** um.

Beispiel: $-4 < -1$, aber $4 > 1$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Lösung ($x, a, u \in \mathbb{R}$).

a) $10x - 2(5x + 7) = -2(2 - x)$

b) $4x - (18 + 9x) = 10$

c) $-\frac{4}{5}x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$

d) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}x + 4$

e) $(x - 3)(x - 3) = (x - 1)(x - 8) + 6$

f) $-\frac{1}{2}(x + 5) = 4x - 3$

g) $\frac{x}{16} - \frac{5}{2} = \frac{2x + 5}{8} - 4$

h) $\frac{2x}{3} - 4 = -\frac{5x}{6} - 1$

i) $6 - \frac{x - 5}{4} = 2 + \frac{x + 1}{2}$

j) $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 3x - \frac{x^2}{2} = -4$

k) $16x - 9 - 2(13 - 9x) = 15x - (7 - 4x)$

l) $\frac{1}{x} + 2 = \frac{3}{x}$

m) $2x - 3 - \frac{7}{4}(5x - 3) = -\frac{1}{2}(2x + 5)$

n) $(x + 2)^2 - (x - 3)^2 = -x^2 + (x + 2)^2$

o) $\frac{1}{2}a - \frac{3}{2} = 4a + 1$

p) $-\frac{1}{2}(u + 5) - 3 = 5$

q) $4 - \frac{a - 5}{4} = \frac{a + 1}{2} - \frac{a - 3}{3}$

r) $\frac{1}{7}(u - 1)^2 - \frac{5}{7}u = \frac{u^2}{7}$

2. Lösen Sie nach x auf: $a_1x + a_2y = b_1x + b_2y$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge ($x \in \mathbb{R}$).

a) $4x - 2 > 2x + 1$

b) $\frac{x}{2} - 8 \leq 10$

c) $1 - \frac{2}{3}x < 5$

d) $\frac{1}{12}(x - 5) > 0$

e) $3(1 - 2x) - 2 > 2(x - 3) - (3x + 5)$

f) $\frac{1}{3}x - 5 \leq \frac{1}{4}x + 3$

4. Bestimmen Sie die Lösung in Abhängigkeit von t.

a) $3x + 5t = 2x - 2t$

b) $t - 2x = \frac{3}{4}x - \frac{t}{3}$

c) $\frac{5}{2}(x + 4t) = 0$

d) $tx - 4 = 2;\ t \neq 0$

e) $tx + 5t = 2x;\ t \neq 2$

f) $t(x - 3) = 2tx + 1;\ t \neq 0$

g) $\frac{t}{6}(x - 3t) = 0;\ t \neq 0$

h) $t^2x - 3t = -2t;\ t \neq 0$

5. Lösen Sie nach x auf.

a) $2x + 4ax + 5a = x - a$

b) $ax - 2bx = 8b - 4a$

c) $5ax + 3b = ax + 7 - 4b$

d) $2{,}5ax + 5x - 1{,}2bx = 14x - 8$

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten

Lösen Sie das Gleichungssystem $3x - 2y = 4$
$x - 5y = -3; \quad x, y \in \mathbb{R}.$

Lösung

Durch **Additionsverfahren:**

$$\begin{array}{lr} 3x - 2y = 4 & (1) \\ x - 5y = -3 \quad | \cdot (-3) & (2) \\ \hline 3x - 2y = 4 & (1) \\ -3x + 15y = 9 & (2^*) \end{array}$$

Addition von (1) und (2*): $13y = 13$

Auflösen nach y: $y = 1$

Einsetzen in Gleichung (1): $3x - 2 \cdot 1 = 4 \;\Rightarrow x = 2$

Lösung des linearen Gleichungssystems: (2; 1) d. h., $x = 2$ und $y = 1$

Durch **Einsetzungsverfahren:**

$$\begin{array}{lr} 3x - 2y = 4 & (1) \\ x - 5y = -3 & (2) \\ \hline \end{array}$$

Auflösen von (2) nach x: $x = -3 + 5y$

Einsetzen in Gleichung (1): $3(-3 + 5y) - 2y = 4$

Auflösen nach y: $-9 + 15y - 2y = 4 \;\Rightarrow\; y = 1$

Einsetzen in Gleichung (1): $x = 2$

Durch **Gleichsetzungsverfahren:**

$$\begin{array}{lr} 3x - 2y = 4 & (1) \\ x - 5y = -3 & (2) \\ \hline \end{array}$$

Auflösen von (1) und (2) nach x:

$$\begin{array}{lr} x = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3} & (1^*) \\ x = -3 + 5y & (2^*) \end{array}$$

Gleichsetzen: $\frac{2}{3}y + \frac{4}{3} = -3 + 5y \Rightarrow y = 1$

Einsetzen in Gleichung (1): $3x - 2 = 4 \Rightarrow x = 2$

Aufgaben

Bestimmen Sie die Lösung.

a) $10x - 6y = -2$
$x - 4y = -2$

b) $3x + y = 0$
$-3x + 4y = 6$

c) $2a + 10b = 5$
$a + 3b = -2$

d) $-a + 4b = 0$
$2{,}5a + 5b = 10$

e) $x = -3$
$2x - 5y = 4$

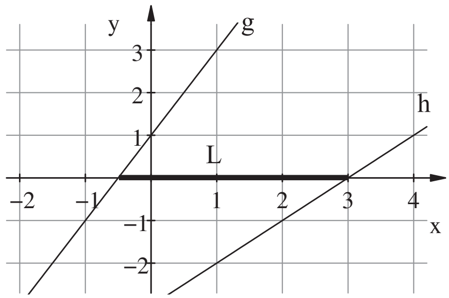
f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$\frac{1}{4}x - y = -1$

Lineare Ungleichungssysteme

Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die folgenden Bedingungen $2x + 1 \geq 0 \wedge x - 1 < 2$

Lösung

Skizze mit Gerade g: $y = 2x + 1$
und Gerade h: $y = x - 1 - 2 = x - 3$



$2x + 1 \geq 0 \wedge x - 3 < 0$ ist erfüllt wenn **g oberhalb der x-Achse** und gleichzeitig **h unterhalb der x-Achse** verläuft.

Lösungsmenge: $L = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 3\}$

Bemerkung: Die wichtigen Stellen sind die Nullstellen von g und h.

Bestimmen Sie den Lösungsraum des Ungleichungssystems
$y \leq -\frac{3}{2}x + 60 \wedge x \leq 30 \wedge y \leq 40 \wedge y \leq -x + 50 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0.$

Lösung

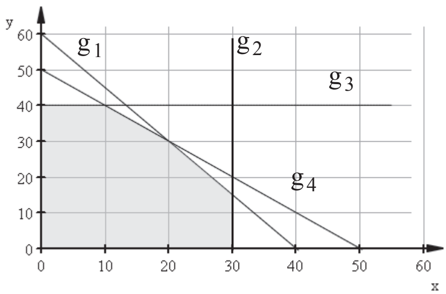
Zeichnerische Lösung
mit Hilfe der Randgeraden:

g_1: $y = -\frac{3}{2}x + 60$

g_2: $x = 30$

g_3: $y = 40$

g_4: $y = -x + 50$



Der Lösungsraum ist ein Vieleck mit den Eckpunkten
(0 | 0), (30 | 0); (30 | 15); (20 | 30); (10 | 40) und (0 | 40).

Aufgaben

1. Bestimmen Sie grafisch den Lösungsraum des linearen Ungleichungssystems ($x, y \in \mathbb{R}$).

a) $x \geq 0, y \geq 0$
$2x + y \geq 8$
$x + y \geq 5$

b) $x \geq 3$
$y \leq 8$
$x + 2y \leq 20$

c) $0 \leq x \leq 100$
$x + 3y \leq 900$
$2x + 4y \geq 400$

2. Welche Punkte der Ebene erfüllen die folgenden Ungleichungen?

$y > 1 - x \wedge x \geq 0 \wedge y \geq -1$

Gauß-Algorithmus

Beispiel

1) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \wedge -12x_1 - 7x_2 - 18x_3 = -2 \wedge 5x_1 + x_2 + 6x_3 = -9.$$

Lösung mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{rcl|l}
-x_1 - x_2 - 2x_3 &=& -3 & \cdot(-12) \quad \cdot 5 \\
-12x_1 - 7x_2 - 18x_3 &=& -2 & + \\
5x_1 + x_2 + 6x_3 &=& -9 & + \\
\hline
-x_1 - x_2 - 2x_3 &=& -3 & \\
5x_2 + 6x_3 &=& 34 & \cdot 4 \\
-4x_2 - 4x_3 &=& -24 & \cdot 5 \quad + \\
\hline
-x_1 - x_2 - 2x_3 &=& -3 & \\
5x_2 + 6x_3 &=& 34 & \\
4x_3 &=& 16 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|r|l}
-1 & -1 & -2 & -3 & \cdot(-12) \quad \cdot 5 \\
-12 & -7 & -18 & -2 & + \\
5 & 1 & 6 & -9 & + \\
\hline
-1 & -1 & -2 & -3 & \\
0 & 5 & 6 & 34 & \cdot 4 \\
0 & -4 & -4 & -24 & \cdot 5 \quad + \\
\hline
-1 & -1 & -2 & -3 & \\
0 & 5 & 6 & 34 & \text{Dreiecksform} \\
0 & 0 & 4 & 16 &
\end{array}$$

Einsetzen ergibt $x_3 = 4;\ x_2 = 2;\ x_1 = -7$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit der Lösung $(-7 \quad 2 \quad 4)$.

Beachten Sie: Die zulässigen Elementarumformungen, um die Dreiecksform zu erreichen, sind die **Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl** ungleich null und das Ersetzen einer Gleichung durch **Addition einer anderen Gleichung.**

Aufgaben

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (LGS).

a) $$\begin{array}{l} -2x_1 - 4x_2 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_2 - 3x_3 = -12 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 18 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{array}$$

e) $$\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \\ 2x + 4y + 3z = 9 \end{array}$$

f) $$\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3x + 4y + 3z = 9 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \end{array}$$

3.2 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

Lösung mit Formel

Beachten Sie: Eine **quadratische Gleichung** in x kann auf die Form

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0}$, gebracht werden.

Die **Lösungsvariable x** tritt in der **2. Potenz** auf.

Beispiele

1) Lösen Sie die Gleichung.

a) $6x^2 - 3x - 2 = 0$ b) $-0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5 = 0$ c) $3x^2 - tx + t^2 = 0$

Lösungsformel für $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)}$: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante.

Lösung

a) Mit a = 6, b = – 3 und c = – 2: $x_{1|2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$

Diskriminante D = 57

Wegen D > 0 gibt es **zwei Lösungen** $x_{1|2} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$.

b) Mit (– 2) multiplizieren: $-0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5 = 0$

Nullform: $x^2 - 10x + 25 = 0$

Mit a = 1, b = – 10 und c = 25: $x_{1|2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = 5$

Diskriminante D = 0

Wegen D = 0 gibt es **eine (doppelte) Lösung** $x_{1|2} = 5$.

c) Quadratische Gleichung in Nullform: $3x^2 - tx + t^2 = 0$

Mit a = 3, b = – t und c = 5: $x_{1|2} = \frac{t \pm \sqrt{(-t)^2 - 4 \cdot 3 \cdot t^2}}{2 \cdot 3} = \frac{t \pm \sqrt{-11\,t^2}}{6}$

Diskriminante $D = -11t^2 < 0$

Wegen D < 0 hat die Gleichung **keine Lösung.**

Die Wurzel aus einer negativen Zahl kann in **R nicht** gezogen werden.

2) Lösen Sie die Gleichung.

a) $x^2 - 3x - 2 = 0$ b) $-0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5 = 0$

Lösungsformel für $x^2 + px + q = 0$: $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ mit $D = \frac{p^2}{4} - q$

Lösung

a) Mit p = – 3 und q = – 2: $x_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} - (-2)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$

Diskriminante $D = \frac{17}{4}$

Wegen $D > 0$ gibt es **zwei Lösungen** $x_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$.

b) Mit (– 2) multiplizieren: $-0{,}5x^2 + 5x - 12{,}5 = 0$

Geeignete Nullform: $x^2 - 10x + 25 = 0$

Mit p = – 10 und q = 25: $x_{1|2} = 5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 25} = 5 \pm \sqrt{0} = 5$

Diskriminante $D = 0$

Wegen $D = 0$ gibt es **eine (doppelte) Lösung** $x_{1|2} = 5$.

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante (D) ab.

$$\boxed{\mathbf{D = b^2 - 4ac}} \qquad \boxed{\mathbf{D = \frac{p^2}{4} - q}}$$

D > 0	D = 0	D < 0
zwei Lösungen	**eine (doppelte) Lösung**	**keine Lösung**

Aufgaben

1. Lösen Sie die quadratische Gleichung.

a) $4x^2 + 8x - 48 = 0$ b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}$ c) $3 + \frac{1}{3}x^2 = 2x$

d) $x^2 + x + 7 = -3x + 2$ e) $-2x^2 - 3x = 2{,}5$ f) $(x - 3)^2 - 9 = 0$

g) $3x^2 + 5x - 8 = 0$ h) $\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 5) = 0$ i) $-x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{5}{4}$

j) $0 = 1{,}5x(x + 2) - 3$ k) $(2x + 5)^2 = 4$ l) $x(2x + 1) - 5 = 0$

2. Bestimmen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von a.

a) $x^2 + ax - 24 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 + ax = a$ c) $1 - x + ax^2 = 0$

3. Für welche Werte von t hat die Gleichung 2, 1, 0 Lösung(en)?

a) $x^2 - tx = 2$ b) $x(x - t) + 1 = 0$ c) $(x + 3)^2 - 2t + 1 = 0$

Lösung ohne Formel

1) $ax^2 + c = 0$

Lösen Sie die Gleichung $0{,}5x^2 - 5 = 0$.

Lösung

Quadratische Gleichung: $0{,}5x^2 - 5 = 0 \iff x^2 = 10$

Wurzelziehen ergibt: $x_1 = \sqrt{10}$; $x_2 = -\sqrt{10}$

Die Gleichung hat die zwei Lösungen $x_{1|2} = \pm\sqrt{10}$.

2) $ax^2 + bx = 0$

Lösen Sie durch Ausklammern: $x^2 + ax = 0$; $a \in \mathbf{R}$.

Lösung

x ausklammern: $x(x + a) = 0$

Satz vom Nullprodukt anwenden: $x = 0$ oder $x + a = 0$

Die Gleichung hat zwei Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = -a$

Die Gleichung hat für $a = 0$ genau eine Lösung, für $a \neq 0$ zwei Lösungen.

Satz vom Nullprodukt: Ein **Produkt ist null,** wenn **mindestens ein Faktor null** ist:

$u \cdot v = 0 \iff u = 0 \vee v = 0$ („$\vee$“ bedeutet „oder“)

3) $a(x - u)(x - v) = 0$

Lösen Sie die Gleichung: a) $4(2x - 6)(2t - x) = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Lösung

a) **Bemerkung: $4 \neq 0$ ist ein konstanter Faktor.**

Nullprodukt: $(2x - 6)(2t - x) = 0$.

Satz vom Nullprodukt anwenden: $2x - 6 = 0 \vee 2t - x = 0$

Die Gleichung hat zwei Lösungen: $x_1 = 3$; $x_2 = 2t$

Die Gleichung hat für $t = 1{,}5$ genau eine Lösung, für $t \neq 1{,}5$ zwei Lösungen.

b) Der Term kann mit Hilfe einer binomischen Formel faktorisiert werden.

Quadratische Gleichung: $x^2 + 6x + 9 = 0$

Binom: $(x + 3)^2 = 0$

Faktorform: $(x + 3)(x + 3) = 0$

Die Gleichung hat eine (doppelte) Lösung $x_{1|2} = -3$.

Lösen Sie die Gleichung a) $x^2 + 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x - 5 = 0$

Lösung

Für die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Damit kann der Term $x^2 + px + q$ faktorisiert werden: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0$

a) Aus $x_1 + x_2 = -6$ und $x_1 \cdot x_2 = 8$ ergibt sich $x_1 = -4$ und $x_2 = -2$

Gleichung in Faktorform: $(x + 4)(x + 2) = 0$

b) Aus $x_1 + x_2 = -4$ und $x_1 \cdot x_2 = -5$ ergibt sich $x_1 = -5$ und $x_2 = 1$

Gleichung in Faktorform: $(x + 5)(x - 1) = 0$

Aufgaben

1. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 + 3x = 0$ b) $4x^2 - x = 0$ c) $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x^2$

d) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}x^2 = 0$ e) $\frac{14}{15}(x^2 - 7x) = 0$ f) $\frac{x^2}{7} + \frac{x}{7} = 0$

g) $-\frac{1}{8}x^2 + tx = 0$ h) $x^2 - tx = 0$ i) $tx - \frac{x^2}{t} = 0;\ t \neq 0$

j) $3x(x - 4) = 0$ k) $(5x + 2)x = 0$ l) $ax - 2x^2 = 0$

m) $-\frac{1}{8}(x^2 - 8x) = 0$ n) $4x^2 = (t - 1)x$ o) $\frac{x - 5x^2}{12} = 0$

p) $5 - (x^2 + 4x + 5) = 0$ q) $(2x + 1)x = 3$ r) $5(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}x^2) = 0$

s) $0{,}5k^2 - 2k = -3$ t) $\frac{u^2 + u}{2} = 4$ u) $x^2 + 9x + 20 = 0$

2. Lösen Sie möglichst ohne Formel.

a) $(x + 4)(x - 5) = 0$ b) $(2x + 7)(4x - a) = 0$ c) $(x + t)(x - 2t) = 0$

d) $x^2 + 8x + 16 = 0$ e) $x^2 = 14x - 49$ f) $3a(2x - x^2) = 0;\ a \neq 0$

g) $x(x - 12) = -36$ h) $3(1 - x)^2 - 3 = 9$ i) $k^2 + k - 12 = 0$

j) $n^2 - 16n + 60 = 0$ k) $(x - 1)^2 - 2x = 0$ l) $1 = a + a^2$

3. Lösen Sie die quadratische Gleichung nach x auf.

a) $6t - x^2 = 0$ b) $\frac{4}{5}(x^2 - 5) = 0$ c) $\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x^2 = x^2$

d) $3x^2 + 6 = 15$ e) $\frac{1}{2}x^2 = 9$ f) $\frac{4}{5}x^2 = 2x^2$

g) $6x^2 = 0$ h) $3x^2 + 4 = -x^2 + 1$ i) $7(x - 1)^2 = -14x$

j) $x^2 - 2t^2 = 0$ k) $x^2 = \frac{a^2}{2}$ l) $ax = x(x + a)$

4. Für welche Werte von a ($a \in \mathbf{R}$) hat die Gleichung $ax^2 + 1 = 0$ keine Lösung?

Was man wissen sollte... zum Lösen quadratischer Gleichungen

Die quadratische Gleichung wird in Nullform umgeformt (wenn nötig).

Lösung mit Formel:

$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$ — **Lösung mit der abc-Formel**

$x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$

$x^2 + px + q = 0$ — **Lösung mit der pq-Formel**

$x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ mit $D = \frac{p^2}{4} - q$

Die **Anzahl der Lösungen** hängt von der **Diskriminante D** ab.

$D > 0$	**$D = 0$**	**$D < 0$**
zwei Lösungen	**eine Lösung**	**keine Lösung**

Lösung ohne Formel:

$ax^2 + c = 0;\ a \neq 0$ — **Umformung** zu $x^2 = -\frac{c}{a}$

Lösung durch **Wurzelziehen.**

$ax^2 + bx = 0;\ a \neq 0$ — Lösung durch **Ausklammern**

$x(ax + b) = 0$

Satz vom Nullprodukt anwenden.

Zerlegung in Linearfaktoren (Faktorisieren) — $\mathbf{x^2 + px + q} = (x - x_1)(x - x_2) = 0$

mithilfe der **Binomischen Formeln:**

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$

oder

mithilfe des **Satzes von Vieta:** $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Quadratische Ungleichungen

Beispiele

Bestimmen Sie die Lösung der Ungleichung $x^2 + 2x \leq 3$.

Lösung

Ungleichung in Nullform: $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

Lösung der Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$: $x_1 = -3;\ x_2 = 1$

Der **Term** $T(x) = x^2 + 2x - 3$ wechselt das Vorzeichen in -3 bzw. in 1.

Einsetzen von $x = 0$ ergibt: $T(0) = -3$

Vorzeichentabelle:	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
T(x)	positiv	0	negativ	0	positiv

$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \quad x \geq -3 \wedge x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq x \leq 1$

Bemerkung: $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \quad x < -3 \vee x > 1$

$x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \quad x < -3 \vee x > 1$

Bestimmen Sie die Lösung der Ungleichung $(x + 2)(1 - x) > 0$.

Lösung

Lösung der Gleichung $(x + 2)(1 - x) = 0$: $x_1 = -2;\ x_2 = 1$

(Satz vom **Nullprodukt**)

Der **Term** $T(x) = (x + 2)(1 - x)$ wechselt das Vorzeichen in -2 bzw. in 1.

Einsetzen von $x = 0$ ergibt: $T(0) = 2 > 0$

Vorzeichentabelle:	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
T(x)	negativ	0	positiv	0	negativ

$(x + 2)(1 - x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 1$

Aufgaben

Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $2x(x - 5) \leq 0$ b) $-\frac{1}{2}x^2 - x + 7 > 0$ c) $(1 - x)^2 \geq 3$

d) $(x - 5)(x + 1) > 0$ e) $x^2 + 4x < 4$ f) $x^2 + x + 1 < 0$

g) $x^2 + 2x + 1 > 0$ h) $x^2 + 4 \geq -4x$ i) $(x + 5)(x + 2) > 1$