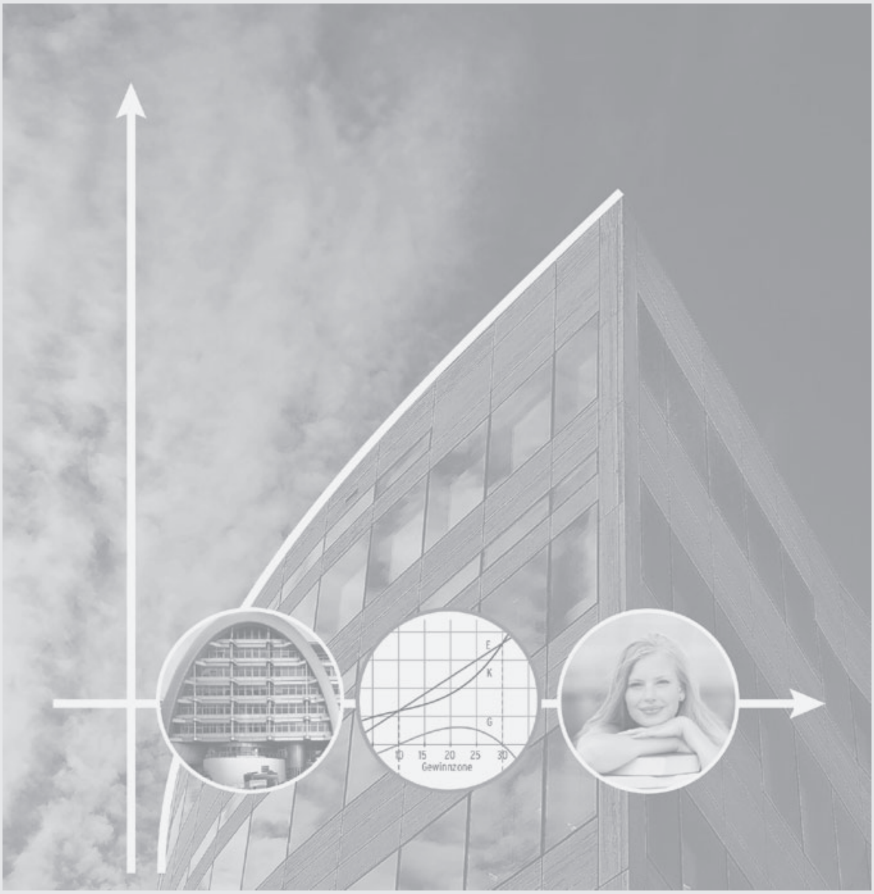
Ott

Abitur 2020 | *eA – GTR und CAS*

Nach den Vorgaben des Kerncurriculum

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik an Beruflichen Gymnasien
– Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Niedersachsen



Merkur
Verlag Rinteln

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für Fachgymnasien in Niedersachsen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2020 an Beruflichen Gymnasien der Richtung Wirtschaft sowie Gesundheit und Soziales.
In dieser Ausgabe sind **Aufgaben** zu inhaltsbezogenen Kompetenzen aufgrund der Bildungsstandards **besonders für den Hilfsmittelfreien Teil der Abiturprüfung 2020** enthalten.

Die Aufgaben eA für CAS und GTR sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra.
Seit dem Abitur 2012 gibt es keine thematischen Schwerpunkte mehr.
Es gelten die Vorgaben des Kerncurriculums.

Alle Aufgaben sind für das erhöhte Anspruchsniveau GTR/CAS ausgelegt.
Die Aufgaben sind vollständig aus den Gebieten entnommen, die in den Vorgaben des Kernkurriculums für den Leistungskurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft, Gesundheit und Soziales, aufgeführt sind.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, im Umfang und in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den Beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autor und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Zentralabitur

Berufliches Gymnasium Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Erhöhtes Anforderungsniveau

Rechnertyp: GTR bzw. CAS

Hinweise für den Prüfling

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik besteht aus zwei Teilen: **1. Pflichtteil**

2. Wahlteil

Pflichtteil:

- Bearbeitung ohne elektronische Hilfsmittel, ohne Formelsammlung
  Als Hilfsmittel sind nur die üblichen Zeichenmittel zugelassen.
- 60 Minuten Bearbeitungszeit
- Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.
- Es sind 26 Bewertungseinheiten (BE) der insgesamt 120 BE erreichbar.
- Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Wahlteil:

Nach Abgabe der Unterlagen des Pflichtteils werden die Hilfsmittel und die Aufgabenstellungen für den Wahlteil ausgegeben.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 240 Minuten
- Der Prüfling wählt aus jedem der 3 Blöcke jeweils eine Aufgabe aus.

Block 1 Analysis 48 BE	**Block 2** Stochastik 24 BE	**Block 3** Lineare Algebra 24 BE
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- Die Gewichtung der drei Blöcke beträgt etwa 2: 1: 1
- Es sind 94 BE der insgesamt 120 BE erreichbar.
- Hilfsmittel: Zeichenmittel; eingeführter Taschenrechner (mit Handbuch):
  GTR oder CAS und von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

1 Hilfsmittelfreier Teil der Prüfung

1.1 Aufgaben zur Vorbereitung für die Abiturprüfung 2020

(Vorgaben aufgrund der Bildungsstandards)

Analysis **Lösungen Seite 19**

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Lösungen für x.

a) $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$

b) $\frac{3}{4}x^2 - 6x + \frac{3}{2} = 0$

c) $\frac{a}{2}(x + 3)(2x - 5a) = 0;\ a \neq 0$

d) $4 \cdot e^{-3 \cdot x} - 10 = 0$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{2 \cdot x} - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Nullstelle von f.

b) Bestimmen Sie die Schnittstelle der Graphen von f und g mit $g(x) = e^x - 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems: $2x + 3y = 7 \wedge -x + 4y = 1$

Aufgabe 4

Ermitteln Sie die 1. Ableitung von f.

a) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ b) $f(x) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x}$ c) $f(x) = x^2 - 0{,}2 \cdot \sqrt{x}$

Aufgabe 5

Gegeben sind die Funktion f und g mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$.

a) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von g aus dem Schaubild von f entsteht.

b) Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder von f und g im Punkt $P(0 \mid 1)$ berühren.

Aufgabe 6

Gegeben ist das eindeutig lösbare Gleichungssystem LGS 1:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 4x_2 - 8x_3 &= -12. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Lösung von LGS 1.

b) Begründen Sie, warum alle Lösungen des gegebenen Gleichungssystems LGS 1 auch Lösungen des nachfolgenden Gleichungssystems LGS 2 sind.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \\ 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= -12. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 **Lösungen Seite 20/21**

1 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$2x_3 = 2 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 2 \wedge x_2 - x_3 = 2$ 2

2 Gegeben sind die Gleichungssysteme A und B:

A
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 + x_2 &= -8 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

B
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 + x_2 &= -8 \\ x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, welches der Gleichungssysteme A und B nicht lösbar ist,

und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Stochastik **Lösungen Seite 20/21**

Aufgabe 1

Ein Unternehmen stellt Speicherbausteine auf zwei Produktionsanlagen „A“ und „B“ und in zwei Qualitätsstufen „Q1“ und „Q2“ her. Die Produktion erfolgt auf beiden Anlagen zu gleichen Teilen. Die Bausteine von Anlage „A“ genügen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 den Anforderungen an die höhere Qualität „Q1“; hingegen erreichen die Bausteine von Anlage „B“ diese Qualitätsstufe nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4.
Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar. 3 BE

Aufgabe 2

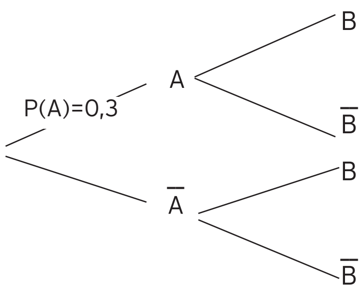
Von den 100 Schülerinnen und Schülern einer Jahrgangsstufe wählt die eine Hälfte als Naturwissenschaft Physik, die andere Hälfte Biologie. Die Jahrgangsstufe umfasst insgesamt 60 Mädchen. 30 % sind Jungen und haben Physik gewählt.

a) Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar. 3 BE

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten,
   – dass eine zufällig ausgewählte Schülerin Physik gewählt hat,
   – dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer des Biologie-Kurses männlich ist. 3 BE

Aufgabe 3

Gegeben sind ein Zufallsexperiment und die Ereignisse A und B mit $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ und $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}1$.



a) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm, indem die die Schreibweise für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten als auch deren Werte eintragen. (3 BE)

b) Es sei weiterhin $P(A) = 0{,}3$ und $P_A(B) = 0{,}6$.
   Bestimmen Sie nun $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ so, dass die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind. 2 BE

2.1 Analysis

Mathematische Formeln, Fachgymnasium

Kostenfunktionen
x: Ausbringungsmenge in ME
y: Gesamtkosten in GE

Gesamtkostenfunktion	$K(x) = K_v(x) + K_f(x)$
Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
Funktion der fixen Gesamtkosten	$K_f(x)$
Funktion der gesamten Stückkosten (Funktion der Durchschnittskosten)	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Funktion der variablen Stückkosten	$k_v(x)$
Funktion der fixen Stückkosten	$k_f(x)$
Grenzkostenfunktion	$K'(x)$
Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
Betriebsoptimum (BO) - Tiefstelle von k(x)	x_{BO}
Langfristige Preisuntergrenze (LPU)	$k(x_{BO})$
Betriebsminimum (BM) - Tiefstelle von $k_v(x)$	x_{BM}
Kurzfristige Preisuntergrenze (KPU)	$k_v(x_{BM})$
Nachfragefunktion, Preis-Absatz-Funktion	$p_N(x)$ Bei Preiselastizitätsberechnungen kommt auch die Umkehrfunktion $x(p)$ zum Einsatz.
Angebotsfunktion	$p_A(x)$ Angebotspreis in Abhängigkeit von der angebotenen Menge x.
Gleichgewichtsmenge	x_G : Schnittstelle von $p_N(x)$ mit $p_A(x)$
Gleichgewichtspreis	$y_G = p_G = p_A(x_G) = p_N(x_G)$
Erlösfunktion	$E(x) = p(x) \cdot x$
Grenzerlösfunktion	$E'(x)$
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
Gewinnschwelle / Nutzenschwelle	x_S 1. Nullstelle der Gewinnfunktion
Gewinngrenze / Nutzengrenze	x_G 2. Nullstelle der Gewinnfunktion
Cournot'scher Punkt Gewinnmaximale Ausbringungsmenge	$C(x_C \mid p_N(x_C))$ x_C
Produzentenrente	$P_R = \int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx$ Differenz aus erzieltem Umsatz und mindestens erwartetem Umsatz.
Konsumentenrente	$K_R = \int_0^{x_G} (p_n(x) - p_G)dx$ Differenz zwischen den theoretisch möglichen und den tatsächlichen Ausgaben für ein Gut.
Preiselastizität der Nachfrage	$e_{x;p} = \frac{\text{relative (proz.) Mengenänderung } \frac{\Delta x}{x}}{\text{relative (proz.) Preisänderung } \frac{\Delta p}{p}}$
Elastizitätsfunktion	$e_{f(x);x}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$
Elastizitätsfunktion der Nachfrage	$e_{x;p}(p) = \frac{x'(p)}{x(p)} \cdot p$ mit x(p) als Umkehrfunktion der Preis-Absatz-Funktion bzw. $e_{x;p}(x) = \frac{p(x)}{p'(x) \cdot x}$ mit p(x) als Preis-Absatz-Fkt.

Bezeichnungen: $\mathbb{N}_{>0} = \{1; 2; \ldots\} = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$

$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$

Intervalle: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$

$]a; b[= (a; b) = \{x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$

Aufgaben eA - GTR/CAS - zur Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 48/49**

Ein Industriebetrieb stellt Vollmilchschokolade her. Aufgrund der gestiegenen Preise für Milchprodukte überlegt die Unternehmensleitung, einen Teil der Vollmilch durch Milchpulver zu ersetzen. Alle anderen Faktoren bleiben konstant. Der Geschmack der Schokolade soll dadurch nicht beeinträchtigt werden. Tests mit mehreren Probanden haben ergeben, dass sich dieses Ziel durch folgende Mengenkombinationen erreichen lässt:

x : Milchpulver in Mengeneinheiten [ME]	3	4	7
y: Milch in ME	9	7	5

Mit diesen Faktormengenkombinationen kann das Unternehmen jeweils 200 ME produzieren. Das Milchpulver kostet 3 Geldeinheiten pro ME [GE/ME], die Milch 4 GE/ME .

a) Insgesamt sind für den Einkauf von Milchpulver und Milch 48 GE eingeplant. Zeigen Sie, dass die Gleichung der Isokostengeraden dann $I_k(x) = -\frac{3}{4}x + 12$ lautet.

Ermitteln Sie die Anzahl der Mengeneinheiten an Milchpulver bzw. Milch für den Fall, dass die Geschäftsleitung nur einen der beiden Rohstoffe beschaffen möchte. Skizzieren Sie den Graphen von I_k in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Die allgemeine Funktionsgleichung einer Isoquante soll lauten: $I(x) = \frac{a}{x-b} + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Isoquante für die Ausgangssituation. Skizzieren Sie den Graphen von I in das Koordinatensystem aus a).

Berechnen Sie die Faktormengenkombinationen, bei denen unter diesen Umständen 200 ME produziert werden können. Berechnen Sie die Maßzahl für die Fläche, die von den beiden Graphen eingeschlossen wird.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der kostenminimalen Isokostengeraden. Skizzieren Sie diese in Ihr Koordinatensystem aus a). Erläutern Sie die grafische Ermittlung der minimalen Isokostengeraden. Berechnen Sie die zugehörigen minimalen Kosten.

d) Die Geschäftsleitung beschließt, das Budget für den Einkauf von Milchpulver und Milch auf insgesamt 38 GE zu beschränken. Das Verhältnis von Milchpulver zu Milch in ME muss in diesem speziellen Fall 1: 1,75 betragen. Ermitteln Sie die Faktormengenkombination, die unter diesen Umständen das Budget vollständig ausschöpft.

Der Geschäftsleitung ist bekannt, dass die Funktionsgleichung der zugehörigen Isoquante I* folgendermaßen lautet: $I^*(x) = 3 + \frac{a^*}{x-1}$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von I*. Interpretieren Sie die Veränderung der Isoquante aus ökonomischer Sicht.

(Abitur Fachgymnasium Niedersachsen 2009.)

Lösungen 2.1 Analysis

Lösung Analysis Aufgabe 1 **Seite 1/2** (Aufgabe Seite 34)

a) Ansatz: $I_k(x, y) = xp_x + yp_y$

Einsetzen ergibt: $48 = 3x + 4y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 12$; also $I_k(x) = -\frac{3}{4}x + 12$

Nur Milch (kein Milchpulver, x = 0):

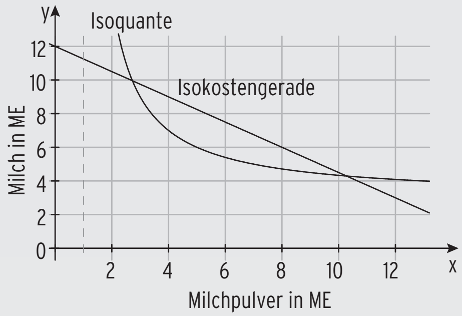
$I_k(0) = 12$

Nur Milchpulver (keine Milch, y = 0):

$I_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 16$

Graph von I_k

(Isoquante zu Aufgabenteil b):



b) Isoquante: $I(x) = \frac{a}{x-b} + c$

Bedingungen: $I(3) = 9 = \frac{a}{3-b} + c \Leftrightarrow 27 = a + 9b + 3c - bc$

$I(7) = 5 = \frac{a}{7-b} + c \Leftrightarrow 35 = a + 5b + 7c - bc \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} -8 = 4b - 4c \\ 7 = -2b + 3c \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} b = 1 \\ c = 3 \end{array}$

$I(4) = 7 = \frac{a}{4-b} + c \Leftrightarrow 28 = a + 7b + 4c - bc$

Lösung des Gleichungssystems: a = 12; b = 1; c = 3

Bemerkung: Auflösen nach a und Gleichsetzen ergibt z. B. $8 = 4c - 4b \wedge 1 = c - 2b$

Isoquante: $I(x) = \frac{12}{x-1} + 3 = \frac{12 + 3(x-1)}{x-1} = \frac{3x+9}{x-1}$

Berechnung der Faktormengenkombinationen: $I_k(x) = I(x) \Leftrightarrow x_1 \approx 2{,}73 \vee x_2 \approx 10{,}27$

Mit $I(x_1) \approx 9{,}96$ und $I(x_2) \approx 4{,}29$ erhält man: (2,73; 9,96) und (10,27; 4,29)

Maßzahl der von den Graphen I und I_k **eingeschlossenen Fläche:**

$\int_{2,73}^{10,27} (I_k(x) - I(x))\,dx = \int_{2,73}^{10,27} \left(-\frac{3}{4}x + 12 - \frac{3x+9}{x-1}\right) dx \approx 10{,}96$ (GTR/CAS)

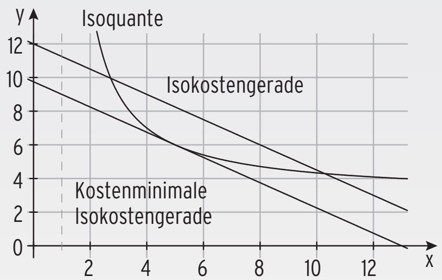
c) **Kostenminimale Isokostengerade:**

$I'(x) = \frac{-12}{(x-1)^2}$; $m_k = -\frac{3}{4}$

Bedingung: $I'(x) = m_k \Leftrightarrow \frac{-12}{(x-1)^2} = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow x_1 = 5 \vee x_2 = -3$

Nur $x_1 \in D_{ök}$, also sinnvoll.



I(5) = 6 und y = mx + b ergibt:

$-\frac{3}{4} \cdot 5 + b = 6 \Leftrightarrow b = 9{,}75$; also $y = -\frac{3}{4} \cdot x + 9{,}75$

Veränderter Graph: Parallelverschiebung einer Isokostengeraden bis zum Berührpunkt mit der Isoquante.

Minimale Kosten: $K(x, y) = xp_x + yp_y \Rightarrow K(x, y) = 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 39$

Beim Einsatz von 5 ME Milchpulver und 6 ME Milch betragen die Kosten 39 GE.

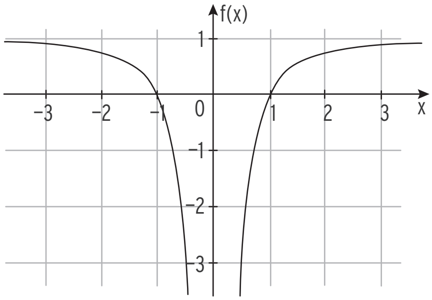
Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Pflichtteil eA

Lösungen Seite 260/261

Aufgabe P1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Die Abbildung zeigt den Graphen von f , der symmetrisch bezüglich der Ordinatenachse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit $g(x) = -3$ gegeben.



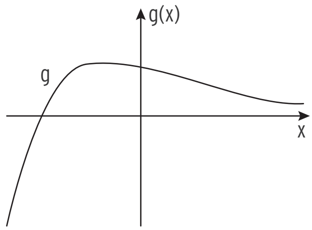
a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat. (1 BE)

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die Abszissenachse und die Gerade g einschließen. (4 BE)

Aufgabe P2

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g.

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.



a) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat. (2 BE)

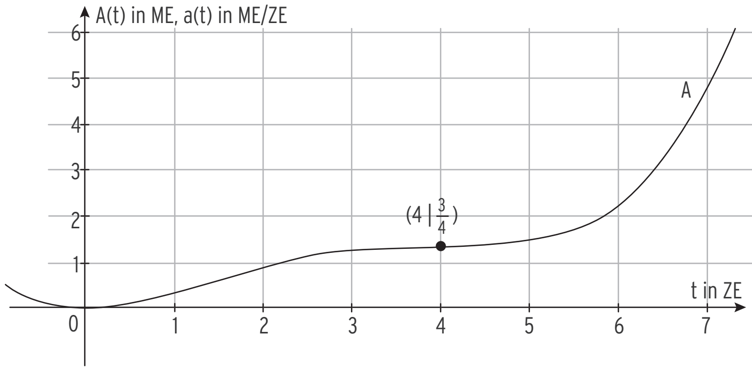
b) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat. (3 BE)

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Pflichtteil eA

Aufgabe P3

Das Unternehmen Nokateo möchte für die anstehende Sommersaison den Unisex-Pullover Habicht auf den Markt bringen und analysiert den Produktlebenszyklus für den Pullover aus der Vorsaison. Die Abbildung zeigt den Graphen der Gesamtabsatzfunktion A des Vorgängermodells.



a) Skizzieren Sie den Graphen des Produktlebenszklus a in das vorgegebene Koordinatensystem. (2 BE)

b) Kennzeichnen Sie in der Grafik den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich. (1 BE)

c) Der Produktlebenszyklus a kann durch eine Funktion der Funktionenschar $a_b(t) = \frac{1}{16}t^3 - bt^2 + t$ beschrieben werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der oben eingezeichneten Gesamtabsatzfunktion A. (3 BE)

Aufgabe P4

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“, die beiden anderen zwei Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

a) Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden. (2 BE)

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt. (3 BE)

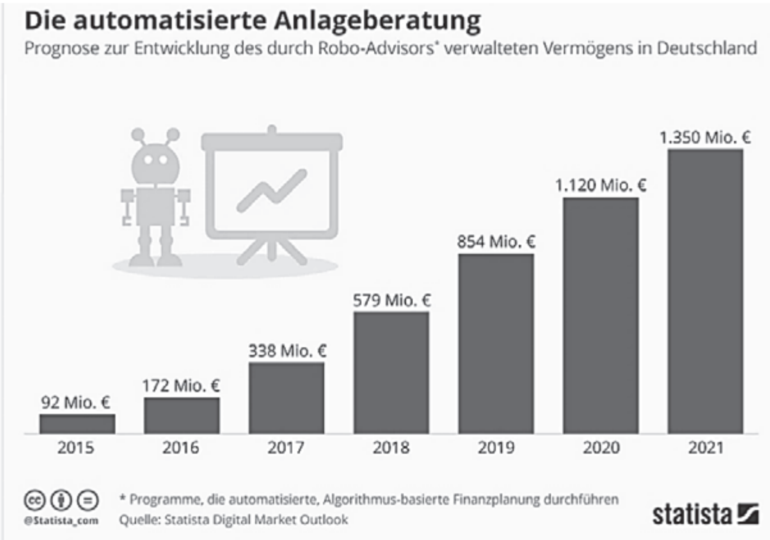
Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS **Lösungen Seite 262 - 272**

Aufgabe 1A

Eine niedersächsische Privatbank analysiert die Auswirkungen von Robotereinsätzen als Robo-Advisor bei der Automatisierung und Digitalisierung. John Cryan, ehemaliger Vorstandsvorsitzender der Deutschen Bank AG, sagte 2017 zu diesem Thema: „In unserer Bank haben wir Leute, die wie Roboter arbeiten. Morgen werden wir Roboter haben, die wie Menschen handeln." (Quelle: https://de.statista.com/infografik/11003/von-robo-advisors-verwaltetes-anlagevermoegen-in-deutschland-bis-2021/, Zugriff am 15.05.2018).

a) Als Basis für die unternehmenseigene Analyse der Automatisierung verwendet die Controlling-Abteilung der Privatbank u. a. die nachfolgende Grafik.



Quelle: https://de.statista.com/infografik/11003/von-robo-advisors-verwaltetes-anlagevermoegen-in-deutschland-bis-2021/, Zugriff am 15.05.2018.

Die Bezeichnung **Robo-Advisor** setzt sich aus den englischen Wörtern *Robot* (Roboter) und *Advisor* (Berater) zusammen. Robo-Advisor nutzen einen systematischen, größtenteils automatisierten Prozess, um mehr Menschen Zugang zu einer professionellen Vermögensverwaltung zu geben und gleichzeitig Anleger vor emotional getriebenen und daher suboptimalen Anlageentscheidungen zu schützen. (Quelle: https://de.scalable.capital/robo-advisor, Zugriff am 15.08.2018).

In fünf Jahren (2024) werden fünf Mitarbeiter aus der Anlageabteilung der Privatbank in den Ruhestand gehen. Die Geschäftsführung prüft, ob diese Stellen durch Nachbesetzungen erhalten bleiben oder ob diese auf Grund des Einsatzes von Robo-Advisorn eingespart werden können. Die Geschäftsführung geht davon aus, dass die Entwicklung der Vermögensverwaltung durch Robo-Advisor in der eigenen Bank genauso verlaufen wird, wie die oben abgebildete Grafik es für Deutschland prognostiziert, und modelliert diese Entwicklung mit Hilfe des logistischen Wachstums.

Fortsetzung Aufgabe 1A a)

Lösungen Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Pflichtteil eA

Aufgabe P1

a) $f(x) = g(x)$ $\quad 1 - \frac{1}{x^2} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$

oder $f(\frac{1}{2}) = -3$ wahre Aussage

b) Gerade g: Waagrechte durch (0 | − 3)

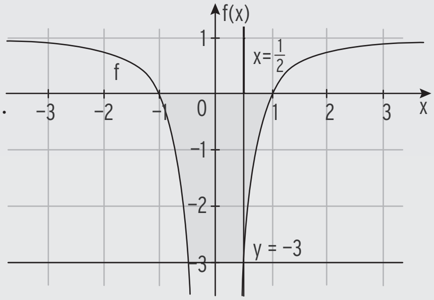
Inhalt der Fläche = Rechtecksinhalt +

2 · Inhalt der Fläche unter dem Graphen auf $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \left[x + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 2 - 2{,}5 = -0{,}5$

$A = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0{,}5 = 4$

Der Flächeninhalt beträgt 4 FE.



Aufgabe P2

a) Extrempunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

Wegen $f'(x) = e^{g(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat der Graph von f keinen Extrempunkt.

b) Wendepunkt: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ oder $f''(x_1) = 0$ und $f''(x)$ ändert das Vorzeichen in x_1.

Mit der Kettenregel: $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

An der Stelle, an der g ein Maximum annimmt, ändert sich das Vorzeichen von $g'(x)$.

Wegen $e^{g(x)} > 0$ ändert sich damit an dieser Stelle auch das Vorzeichen von $f''(x)$,

d. h. der Graph von f hat einen Wendepunkt.

Aufgabe P3

a) Skizze des Graphen der Absatzfunktion a und Kennzeichnung des $D_{ök}$

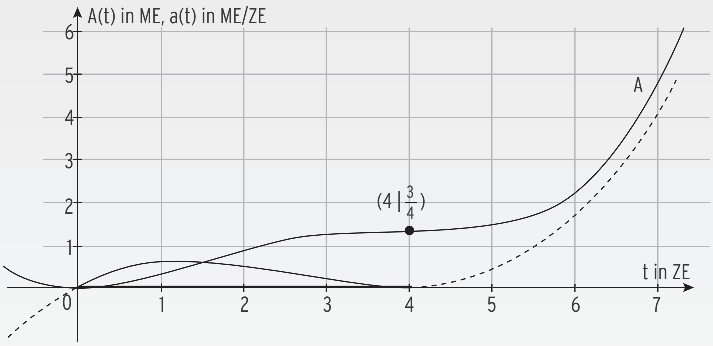
Hinweise:

$A'(t) = a(t)$

$A'(4) = 0$; $A'(0) = 0$

a wird maximal auf

$D_{ök} = [0; 4]$



Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium
Lösungen Pflichtteil eA

Aufgabe P3 (Fortsetzung)

b) Ergänzen $D_{ök}$: siehe markierter Abschnitt auf der Abszissenachse; $D_{ök} = [0; 4]$

c) Bestimmung der Funktionsgleichung der Gesamtabsatzfunktion A

$a_b(t) = \frac{1}{16}t^3 - bt^2 + t$

Stammfunktion: $A_b(t) = \frac{1}{64}t^4 - \frac{b}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$ mit $C = 0$

da die Gesamtabsatzfunktion im Ursprung startet

Punkt $S(4 \mid \frac{4}{3})$ einsetzen in $A_b(t) = \frac{1}{64}t^4 - \frac{b}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$: $\frac{4}{3} = \frac{1}{64}4^4 - \frac{b}{3}4^3 + \frac{1}{2}4^2$

Mit $4^2 = 16$; $4^3 = 64$ $\frac{4}{3} = 4 - \frac{64b}{3} + 8 \Leftrightarrow \frac{64b}{3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

$A(t) = \frac{1}{64}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2$

Hinweis: S ist ein Sattelpunkt.

Aufgabe P4

$P(0) = P(1) = P(2) = \frac{1}{5}$; $P(9) = \frac{2}{5}$

a) $P(\{2; 0; 1{,}9\}) = (\frac{1}{5})^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$

b) Summe größer oder gleich 11 bei zwei Drehungen {9; 9} oder {2; 9} oder {9; 2}:

$P(\text{Summe} \geq 11) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$

Aufgabe P5

a) Zweistufiger Prozess: $R \rightarrow M \rightarrow K$

$A_{RM} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 11 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; $B_{MK} = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 20 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$$C_{RK} = A_{RM} \cdot B_{MK} = \begin{pmatrix} 30 \cdot 8 + 20 \cdot 6 & 20 \cdot 6 + 10 \cdot 11 \\ 30 \cdot 8 + 20 \cdot 10 & 20 \cdot 10 + 10 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 & 230 \\ 440 & 250 \end{pmatrix}$$

Der Matrixeintrag 360 bedeutet, dass für die Gesamtbestellung des ersten Kunden 360 ME des ersten Rohstoffes notwendig sind.

b) x: Kosten für eine Mengeneinheit von R_2 ; $\frac{3}{4}x$: Kosten für eine Mengeneinheit von R_1

Aus $8 \cdot \frac{3}{4}x + 8 \cdot x = 2800 \Rightarrow 6x + 8x = 14x = 2\,800 \Rightarrow x = 200$

Die Kosten für eine ME von R_2 betragen 200 EUR.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS
Lösungen Wahlteil Aufgabe 1A

a) **Untersuchen des Stellenabbaus**

Regression zur Bestimmung des Funktionsterms mit Hilfe des logistischen Wachstums (Hinweis: Je nach GTR-Modell, weicht die vierte Nachkommastelle ab und es ergeben sich etwas andere Werte)

mit t = 0 → 2015 (wenn t = 1 → 2015, dann ändern sich die Werte entsprechend)

$f(t) = \frac{1632{,}4118}{1 + 16{,}3285e^{-0{,}7216 \cdot t}}$

Prognose für 2024 (t = 9): $f(9) \approx 1593{,}0837$

Durchschnittlicher Anstieg von 2019 bis 2024

$\frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} \approx \frac{1593{,}0837 - 854{,}3308}{5} \approx 147{,}7506$

Der durchschnittlicher Anstieg von 2019 bis 2024 beträgt ca. 147,75 Mio. € pro Jahr.

Prozentuale Steigerung

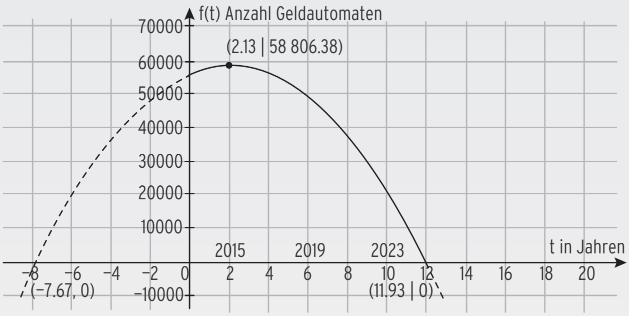
$\frac{147{,}7506}{854{,}3308} \approx 0{,}1729 > 0{,}15$

Momentaner Anstieg 2024

$f'(9) \approx 27{,}6954 < 30$

Fazit: Drei der fünf Stellen werden 2024 eingespart.

b) **Grafik erstellen**



Regression

aus den Daten 2013 bis 2016

oder LGS

t = 0 → 2013

$f_2(t) = -612{,}5t^2 + 2608{,}7t + 56\,030{,}7$

Verlauf: Die Anzahl der Geldautomaten beträgt im Jahr 2013 ca. 56 031. Bis zum ersten Quartal 2015 steigt die Anzahl degressiv an. Im ersten Quartal 2015 wird das Maximum erreicht mit ca. 58 808 Geldautomaten. Danach sinkt die Anzahl progressiv.

Nach dieser Modellierung werden zum Ende des Jahres 2024 die letzten Geldautomaten abgeschafft.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium
Wahlteil eA GTR/CAS
Lösungen Wahlteil Aufgabe 1A

b) **Handlungsempfehlung formulieren**

Für diese relativ kurze Zeit lohnt es sich nicht für die Privatbank noch ein eigenes Netz mit Geldautomaten aufzubauen. Die Verhandlung mit den Sparbanken ist sinnvoller.

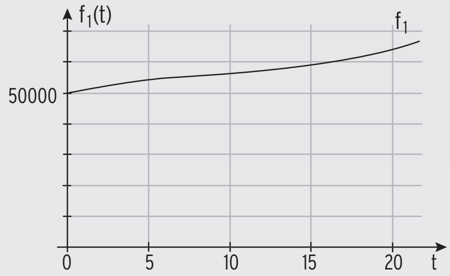
Anzahl der Geldautomaten und Vergleich

$t = 0 \rightarrow 2013$ und $t = 7 \rightarrow 2020$

$f_2(7) = 44\,279{,}1$

$t = 0 \rightarrow 2001$ und $t = 19 \rightarrow 2020$

$f_1(19) \approx 62373{,}765$



Die Funktion f_1 modelliert nicht den Rückgang der Anzahl der Geldautomaten, sondern zeigt ein weiteres Ansteigen der Anzahl. Demnach würde die Anzahl 1,4-mal so hoch sein, wie bei der Funktion f_2. Die Funktion f_2 entspricht dem aktuellen Trend.

c) Begrenztes Wachstum

$f(t) = g - a \cdot e^{k \cdot t}$ und DGL $f'(t) = (g - f(t)) \cdot (-k)$ mit $k < 0$

Anzahl der Kunden, die 2018 am Onlinebanking teilgenommen haben

$g = 10$; $b = 1 - p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ und $k = \ln(b) = \ln(0{,}95) \approx -0{,}05129$

$f'(t) = (g - f(t)) \cdot (-k)$ $\quad 0{,}376 = (10 - f(4)) \cdot 0{,}05129 \Rightarrow f(4) \approx 2{,}66935$ $\quad$ (in ME)

266 935 Kunden nahmen letztes Jahr (2018) schon am Onlinebanking teil.

Jahr ermitteln, wenn 400 000 Kunden am Onlinebanking teilnehmen

$f(t) = g - a \cdot e^{k \cdot t} \Rightarrow f(4) = 10 - a \cdot e^{-0{,}05129 \cdot 4} = 2{,}67 \Rightarrow a \approx 9$

Funktion des begrenzten Wachstums: $\quad f(t) = 10 - 9 \cdot e^{-0{,}05129 \cdot t}$

$4 = 10 - 9 \cdot e^{-0{,}05129 \cdot t} \Rightarrow t \approx 7{,}905$ $\quad (t = 7 \rightarrow 2021)$

Im Jahr 2022 zahlt ein Kunde keine Kontoführungsgebühren, weil er im November 2021 das Onlinebanking begonnen hat.

Untersuchen des Stellenabbaus

$t = 7 \rightarrow 2021$

$f(7) \approx 3{,}71 < 5$

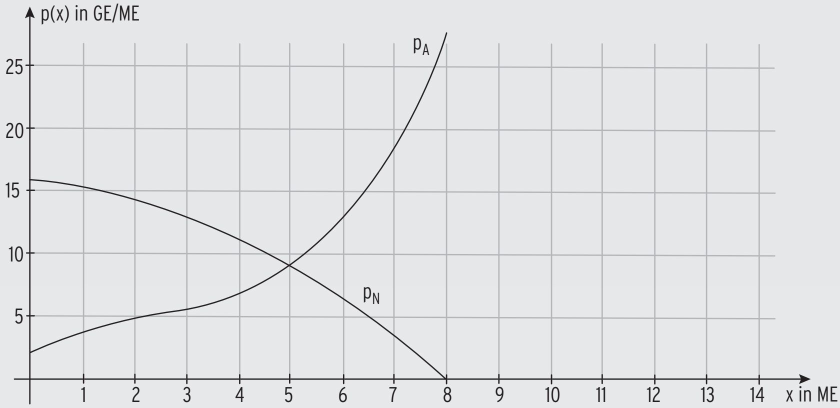
Vor 2022 werden weniger als die Hälfte der Kunden am Onlinebanking teilnehmen, so dass deswegen kein Stellenabbau stattfinden wird.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil eA Aufgabe 1B

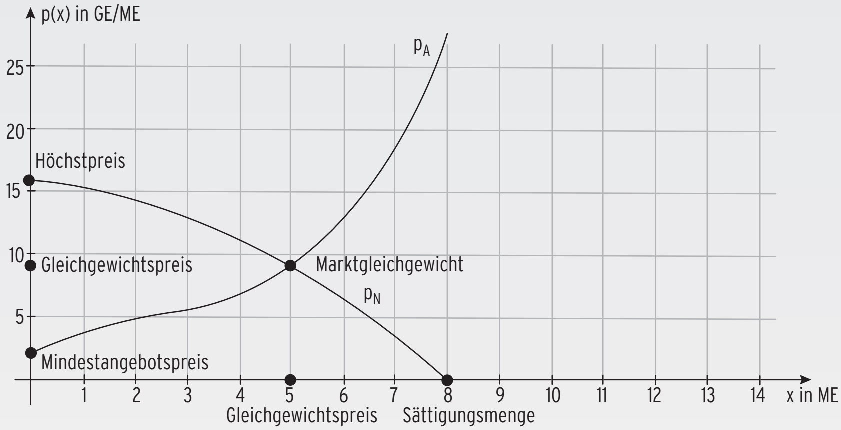
a) **Skizzieren der Graphen im $D_{ök}$ und Begründung Definitionsbereich**

$D_{ök} = [0; 8]$



Der ökonomisch sinnvolle Definitionsbereich beginnt bei x = 0, weil keine negativen Mengen produziert werden können. Er endet bei x = 8 , weil hier die Sättigungsmenge vorliegt und die Angebotsfunktion vorher keinen Hochpunkt aufweist.

Kennzeichnungen in der Skizze



Berechnung des Marktgleichgewichts und des Umsatzes

Gleichgewichtsmenge:

Ansatz: $p_N(x) = p_A(x)$ $\quad x = x_G = 5$

Gleichgewichtspreis: $p_N(5) = p_G = 9$

Gesamtumsatz: $U = x_G \cdot p_G = 45$

Das Marktgleichgewicht hat die Koordinaten MG(5 | 9) .

Der Umsatz im MG beträgt 45 GE.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 1B

a) **Ermittlung des prozentualen Anteils**

Ermittlung der KR: $KR = \int_0^5 (p_N(x) - p_G)dx = \frac{65}{3} \approx 21{,}67$

Ermittlung PR: $PR = \int_0^5 (p_G - p_A(x))dx = \frac{445}{24} \approx 18{,}54$

Ermittlung der Ökonomischen Rente (ÖR): ÖR = PR + KR = 40,21

Prozentualer Anteil von KR an ÖR: $\frac{KR}{ÖR} = \frac{21{,}67}{40{,}21} \approx 0{,}5389$

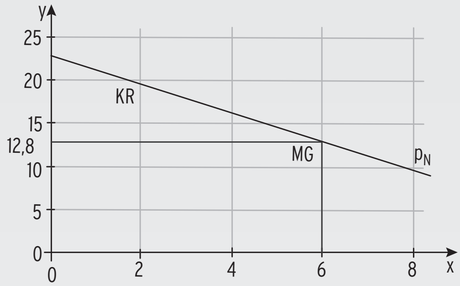
Der prozentuale Anteil der KR an der Ökonomischen Rente liegt bei 53,89 %.

b) **Neues Marktgleichgewicht**

Gleichgewichtspreis $p_G = 12{,}8$ $p_A(x) = 12{,}8$

$x = x_{G_{neu}} = 6$

$MG_{neu}\ (6 \mid 12{,}8)$



Neue lineare Nachfragefunktion

$p_N(x) = m \cdot x + b$

mit $MG_{neu}\ (6 \mid 12{,}8)$ und KR = 30

geometrischer Lösungsansatz

$A_{Dreieck} = \frac{h \cdot g}{2}$

Mit g = 6 und A = KR = 30: $\frac{h \cdot 6}{2} = 30 \Rightarrow h = 10$

$p_{H_{neu}} = p_G + 10 = 12{,}8 + 10 = 22{,}8$

Die Punkte $MG_{neu}\ (6 \mid 12{,}8)$ und $P(0 \mid 22{,}8)$ liegen auf der Geraden von $p_{N_{neu}}$

Lineare Regression führt auf die Gleichung $p_{N_{neu}}(x) = -\frac{5}{3}x + 22{,}8$

oder Punktprobe mit $MG_{neu}\ (6 \mid 12{,}8)$ in $y = mx + 22{,}8$

Beurteilen der Vermutung

$e_{x,p}(x) = \frac{p_N(x)}{p'_N(x) \cdot x}$

Nachfragefunktion alt: $p_N(x) = -0{,}2x^2 - 0{,}4x + 16$; $p'_N(x) = -0{,}4x - 0{,}4$

$e_{x,p}(5) = \frac{p_N(5)}{p'_N(5) \cdot 5} = -0{,}75$

Nachfragefunktion neu: $p_{N_{neu}}(x) = -\frac{5}{3}x + 22{,}8$; $p'_{N_{neu}}(x) = -\frac{5}{3}$

$e_{x,p}(6) = \frac{p_{N_{neu}}(6)}{p'_{N_{neu}}(6) \cdot 6} = -1{,}28$

Nachfrageänderung (NÄ): $\frac{-1{,}28}{-0{,}75} \approx 1{,}71$ also 71 %

Das Nachfrageverhalten hat sich von einer unelastischen Reaktion $|e| = 0{,}75 < 1$ im alten Marktgleichgewicht auf eine elastische Reaktion $|e| = 1{,}28 > 1$ im neuen Marktgleichgewicht verändert. Die Vermutung bestätigt sich; im neuen Marktgleichgewicht beträgt die Erhöhung der Nachfrageänderung 71 %.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 1B

c) **Bestimmung der Produktionsmenge mit dem geringsten Kostenzuwachs und der Höhe des Kostenzuwachses**

Wendepunkt ermitteln

$K'_a(x) = 1{,}5x^2 - 2ax + 3a$; $K''_a(x) = 3x - 2a$; $K'''_a(x) = 3$

hinreichende Bedingung $K''_a(x) = 0 \wedge K'''_a(x) \neq 0$

$K''_a(x) = 0$ $3x - 2a = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}a$

$K'''_a(\frac{2}{3}a) = 3 \neq 0$

$x = \frac{2}{3}a$ ist Wendestelle

Einsetzen in $K'_a(x)$: $K'_a(\frac{2}{3}a) = 1{,}5(\frac{2}{3}a)^2 - 2a \cdot (\frac{2}{3}a) + 3a = -\frac{2}{3}a^2 + 3a$

Bei einer Produktionsmenge von $\frac{2}{3}a$ ME ist der Kostenzuwachs am geringsten.

Der Kostenzuwachs beträgt dann $(-\frac{2}{3}a^2 + 3a)$ GE/ME.

Alternative: Wendepunkte für die drei Funktionsgleichungen für a = 1,2,3 bestimmen

	Modell	Produktionsmenge mit geringster Kostenänderung	Kostenzuwachs bei dieser Produktionsmenge
a = 1:	*Rust*	$\frac{2}{3}$ ME	$2\frac{1}{3}$ GE/ME
a = 2:	*Lava*	$1\frac{1}{3}$ ME	$3\frac{1}{3}$ GE/ME
a = 3:	*Golem*	2 ME	3 GE/ME

Schnittpunkte der Graphen der drei Gesamtkostenfunktionen

$K_1(x) = K_2(x) = K_3(x) \Rightarrow S_1(0 \mid 2)$; $S_2(3 \mid 15{,}5)$

Vergleich der unterschiedlichen Modelle

Die Fixkosten liegen bei allen drei Modellen bei 2 GE, bei einer Produktion von 3 ME entstehen immer Gesamtkosten in Höhe von 15,5 GE. Die Produktionsmenge mit der geringsten Kostenänderung ist für Rust mit $\frac{2}{3}$ ME am kleinsten und für Golem mit 2 ME am größten. Daraus folgt, dass der Gesamtkostenanstieg bei Golem für eine größere Produktionsspanne degressiv ist, als bei den beiden anderen Modellen, d. h. die Kostenschwankung ist am geringsten. Bei einer Produktionsmenge über 3 ME sind die Gesamtkosten für das Modell Golem am geringsten.

Im Hinblick auf eine geringe Kostenschwankung ist das Modell Golem zu bevorzugen.

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 1B

c) **Bestimmung LPU und KPU** (Modell Lava, a = 2)

Stückkostenfunktion k_2 mit $k_2(x) = \frac{K_2(x)}{x} = \frac{0{,}5x^3 - 2x^2 + 6x + 2}{x} = 0{,}5x^2 - 2x + 6 + \frac{2}{x}$

Variable Stückkostenfunktion k_{v_2} mit $k_{v_2}(x) = \frac{K_{v_2}(x)}{x} = 0{,}5x^2 - 2x + 6$

Tiefpunkt der Stückkostenkurve TP (2,36 | 4,91)

Tiefpunkt der Kurve der variablen Stückkosten TP(2 |4)

LPU: 4,91 GE/ME

KPU: 4 GE/ME

Formulieren einer Empfehlung

Das Unternehmen kann den Preis für das Modell Lava auf 4,91 GE/ME senken ohne Verlust zu machen. Die variablen und fixen Stückkosten sind vollständig gedeckt.
Dieser Preis ist langfristig zu halten.
Falls das Modell Lava weiterhin Probleme hat am Markt zu bestehen, ist eine weitere Preissenkung bis auf 4 GE/ME möglich. Jedoch sind bei diesem Preis nur noch die variablen Stückkosten gedeckt. Da das Unternehmen Verlust macht, sollte dieser Preis nur kurzfristig gehalten werden.
Von einer weiteren Preissenkung ist abzuraten, da dann selbst die variablen Stückkosten nur noch teilweise gedeckt sind.

Erläuterung der Auswirkungen

Stückkostenfunktion k_{neu} mit $k_{neu}(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 6 + \frac{2{,}4}{x}$

Tiefpunkt der neuen Stückkostenkurve: TP (2,41 | 5,08)

Das Betriebsoptimum steigt auf 2,41 ME und die langfristige Preisuntergrenze steigt auf 5,08 GE/ME.

Auf die kurzfristige Preisuntergrenze hat eine Fixkostenerhöhung keinen Einfluss.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 2A

a) **1 σ -Intervall für *Wembley***

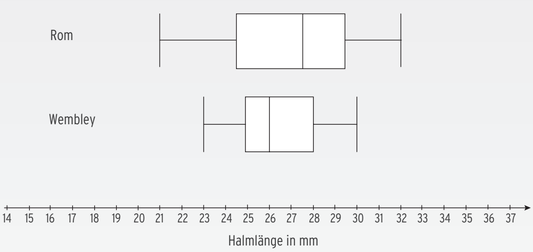
$\overline{x} \approx 26{,}3$ und $\sigma \approx 2{,}19$

$[\overline{x} - \sigma; \overline{x} + \sigma] = [26{,}3 - 2{,}19; 26{,}3 + 2{,}19]$

$= [24{,}11; 28{,}49]$

Boxplot zeichnen für *Wembley*

$x_{min} = 23$, $Q_1 = 25$, Med = 26, $Q_3 = 28$ und $x_{max} = 30$



Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 2A

Entscheidung für eine Rasensorte

Die Rasenmischung Wembley ist aufgrund des kleineren Streuungsintervalls, der kleineren Spannweite und des kleineren Quartilsabstandes in Bezug auf die Anforderung „gleichmäßiger Wuchs" besser geeignet.

b) **Anzahl der Messungen**

Binomialverteilte Zufallsgröße X: Anzahl der Messungen einer ungeschulten Person

Wahrscheinlichkeit für falsches Messergebnis: $q = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Wahrscheinlichkeit für richtiges Messergebnis: $p = 1 - q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Trefferanzahl: $k \geq 1$

Sicherheitswahrscheinlichkeit: $\gamma \geq 0{,}95$

$P(X \geq 1) \geq 0{,}95$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^n \geq 0{,}95$

$0{,}6^n \leq 0{,}05 \qquad \Rightarrow n \geq 5{,}86$

Eine ungeschulte Person müsste mindestens sechs Messungen durchführen, um mit einer Sicherheit von mindestens 95 % mindestens ein richtiges Messergebnis zu erhalten.

Anteil regenerierter Halme

Stichprobenumfang: $n = 800$

Sicherheitswahrscheinlichkeit: $\gamma = 0{,}95 \Rightarrow c = 1{,}96$

Vertrauensintervall $VI_{95\,\%} = [p_1; p_2]$

Wembley: Treffer in der Stichprobe: $X = 700$

relative Häufigkeit: $h = \frac{X}{n} = \frac{700}{800} = 0{,}875$

$n < 1000$ und $h \notin [0{,}3 ; 0{,}7]$ bedeutet:

keine Näherung möglich

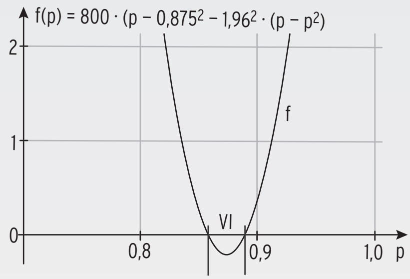
Lösung mit z.B. Parabelansatz:

$n \cdot (p - h)^2 - c^2 \cdot (p - p^2) \leq 0$

Einsetzen: $800 \cdot (p - 0{,}875)^2 - 1{,}96^2 \cdot (p - p^2) \leq 0$

Lösung mit GTR/CAS: $p \geq 0{,}8503 \wedge p \leq 0{,}8961$

$VI_{95\,\%} = [0{,}8503; 0{,}8961]$



Interpretation

Der Anteil regenerierter Halme liegt mit 95 %iger Sicherheit bei der Rasenmischung ***Wembley*** zwischen 85,03 % und 89,61 % und bei der Rasenmischung ***Rom*** zwischen 80,34 % und 84,87 %. In Bezug auf die Regenerationsfähigkeit des Rasens ist die Mischung ***Wembley*** wahrscheinlich besser geeignet.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 2B

a) **Erwartungswert bestimmen**

X: Anzahl der erwachsenen Radfahrer, die immer einen Helm tragen

$E(X) = n \cdot p = 2{,}88 \text{ Mio} \cdot 0{,}15 = 432000$

Die erwartete Anzahl der erwachsenen Radfahrer, die immer einen Helm tragen, liegt bei 432 000 Radfahrern.

Wahrscheinlichkeiten berechnen

• Ostsee-Radfahrer

X: Anzahl der Ostsee-Radfahrer, die nie einen Helm tragen, X ist binomialverteilt

$P(X \geq 2600) = 1 - P(X \leq 2\,599) = 1 - F_{5000;\,0,5}(2\,599) \approx 1 - 0{,}9976$

$P(X \geq 2600) = 0{,}0024 = 0{,}24\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 600 Ostsee-Radfahrer nie einen Helm tragen, liegt nur bei 0,24 %.

• Bodensee-Radfahrer

X: Anzahl der Bodensee-Radfahrer, die immer einen Helm tragen, X ist binomialverteilt

$P(X \leq 1800) = F_{12000;\,0,15}(1800) \approx 0{,}5063 = 50{,}63\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 800 Bodensee-Radler immer einen Helm tragen, liegt bei 50,63 %.

• Strecke Passau-Wien

X: Anzahl der Radfahrer auf der Strecke Passau-Wien, die meistens einen Helm tragen, X ist binomialverteilt

$$\begin{aligned} P(15\,000 < X < 25\,000) &= P(X \leq 24\,999) - P(X \leq 15\,000) \\ &= F_{100\,000;\,0,15}(24\,999) - F_{100\,000;\,0,15}(15\,000) \\ &= 1 - 0{,}5022 = 0{,}4978 = 49{,}78\ \% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 15 000 und weniger als 25 000 Radfahrer auf dem Weg nach Wien meistens einen Helm tragen, liegt bei 49,78 %.

b) **Untersuchung des Helm-Trage- und Helm-Nicht-Trageverhaltens**

VI – immer Helm tragen – bestimmen

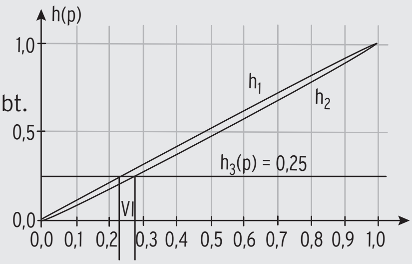
$h = \frac{900}{1500} = 0{,}6 \in [0{,}3;\ 0{,}7]$ bedeutet: Näherung erlaubt

$VI_{90\ \%} = [0{,}5792;\ 0{,}6208]$

Mit einer Sicherheit von 90 % fährt ein Anteil von 57,92 % bis 62,08 % der Erwachsenen immer mit Helm. Damit ist die Wahrscheinlichkeit von 2013 (15 %) bis heute um das ca. 4-fache gestiegen.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 2B



b) VI – nie Helm tragen – bestimmen

$\mathbf{h} = \frac{375}{1500} = 0{,}25 \notin [0{,}3;\ 0{,}7]$ Näherung nicht erlaubt.

Berechnung z. B. über Ellipse oder Parabel

$h(p) = p \pm c \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = p \pm 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{1500}}$

Lösung mit GTR/CAS: $VI_{90\,\%} = [0{,}2321;\ 0{,}2688]$

Hinweis: Näherung $[0{,}2316\ ;\ 0{,}2684]$

Mit einer Sicherheit von 90 % fährt ein Anteil von 23,21 % bis 26,88 % der Erwachsenen nie mit Helm. Damit ist die Wahrscheinlichkeit von 2013 bis heute um die Hälfte gesunken.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 3A

a) **Bestimmung der benötigten Fasermengen**

F: Fasern (Rohstoffe $\vec{r}$) S: Stoffe (Zwischenprodukte $\vec{z}$) M: Modelle (Endprodukte $\vec{m}$)

Zweistufige Verflechtung: $F \to S \to M$ bzw. $R \to Z \to E$

$$C_{FM} = A_{FS} \cdot B_{SM} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 25 & 32 \\ 28 & 20 & 14 \\ 16 & 10 & 14 \\ 2 & 1 & 4 \\ 38 & 23 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = C_{FM} \cdot \vec{m} = C_{FM} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15940 \\ 10880 \\ 6680 \\ 1060 \\ 16300 \end{pmatrix}$$

Es werden von F_1 15 940 ME, von F_2 10 880 ME, von F_3 6 680 ME, von F_4 1 060 ME und von F_5 16 300 ME benötigt.

Bestimmung der variablen Kosten

$k_R^T = (0{,}6 \quad 1{,}2 \quad 0{,}8 \quad 0{,}3 \quad 0{,}2)$; $k_Z^T = (6 \quad 4 \quad 3)$; $k_E^T = (45 \quad 36 \quad 52)$

$k_v^T = k_R^T \cdot C_{FM} + k_Z^T \cdot B_{SM} + k_E^T$

$= (77{,}4 \quad 51{,}9 \quad 56) + (56 \quad 34 \quad 58) + (45 \quad 36 \quad 52) = (178{,}4 \quad 121{,}9 \quad 166)$

$$K_v = k_v^T \cdot \vec{m} = (178{,}4 \quad 121{,}9 \quad 166) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix} = 77\,542$$

Die variablen Kosten betragen 77 542 GE.

Berechnung der benötigten ME von S_3

$$\vec{z} = B_{SM} \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1880 \\ 1060 \\ 2920 \end{pmatrix}$$

Für den Auftrag werden von S_3 2 920 ME benötigt.

Zentralabitur 2018 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 3A

a) **Bestimmung des maximalen Einkaufspreises**

Fertigungskosten ermitteln

$$(0{,}6 \quad 1{,}2 \quad 0{,}8 \quad 0{,}3 \quad 0{,}2)\begin{pmatrix}3\\3\\1\\0\\2\end{pmatrix} = 6{,}6$$

6,6 GE Fertigungskosten für eine ME von S_3

3 GE Rohstoffkosten für eine ME von S_3

$6{,}6 + 3 = 9{,}6$

Der maximale Einkaufspreis für eine ME von S_3 beträgt 9,6 GE.

Bestimmung der Einsparungen wenn von S_3 extern eingekauft wird

$$\vec{r}_{neu} = A_{FS}\cdot\vec{z}_{neu} = \begin{pmatrix}1&5&3\\0&2&3\\2&0&1\\0&1&0\\5&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1880\\1060\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7180\\2120\\3760\\1060\\10460\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}15940\\10880\\6680\\1060\\16300\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7180\\2120\\3760\\1060\\10460\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8760\\8760\\2920\\0\\5840\end{pmatrix}$$

Es werden von F_1 und F_2 8 760 ME, von F_3 2 920 ME und von F_5 5 840 ME eingespart.

Von F_4 wird nichts eingespart.

b) **Bestimmung der prozentualen Faserzusammensetzung für das Bekleidungsmodell**

$$A_{FS}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26\\11\\7\\4\\21\end{pmatrix};\quad 26 + 11 + 7 + 4 + 21 = 69$$

$F_1: \frac{26}{69} \approx 0{,}3768 \approx 38\%$

$F_2: \frac{11}{69} \approx 0{,}1594 \approx 16\%$

$F_3: \frac{7}{69} \approx 0{,}1014 \approx 10\%$

$F_4: \frac{4}{69} \approx 0{,}058 \approx 6\%$

$F_5: \frac{21}{69} \approx 0{,}3043 \approx 30\%$

Das Bekleidungsmodell M_4 besteht zu 38 % aus F_1, 16 % aus F_2, 10 % aus F_3,

6 % aus F_4 und 30 % aus F_5.

Zentralabitur 2019 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil Aufgabe 3B

a) • zu Beginn

Digitalia ist der ortsansässige Anbieter, daher wird der Marktanteil bei 35 % liegen.

Startvektor $\vec{v}_0^{\,T} = (0{,}35 \quad 0{,}50 \quad 0{,}15)$

• nach einem Jahr

$$\vec{v}_1^{\,T} = \vec{v}_0^{\,T} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}55 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} = (0{,}4925 \quad 0{,}3250 \quad 0{,}1825)$$

• nach zwei Jahren

$$\vec{v}_2^{\,T} = \vec{v}_0^{\,T} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}55 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}^2 \approx (0{,}5709 \quad 0{,}2463 \quad 0{,}1829)$$

oder auch: $\vec{v}_2^{\,T} = \vec{v}_1^{\,T} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}55 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

• langfristig

$$\vec{v}^{\,T} = \vec{v}^{\,T} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}55 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \wedge \; x + y + z = 1$$

ergibt das LGS:

$$\begin{aligned} 0{,}85x + 0{,}3y + 0{,}3(1 - x - y) &= x & &\Rightarrow & 0{,}45x &= 0{,}3 \\ 0{,}1x + 0{,}55y + 0{,}1(1 - x - y) &= y & &\Rightarrow & 0{,}55y &= 0{,}1 \\ 0{,}05x + 0{,}15y + 0{,}6(1 - x - y) &= 1 - x - y & &\Rightarrow & 0{,}45x + 0{,}55y &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Lösung des LGS: $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{2}{11}$ einsetzen in $1 - x - y$ ergibt $z = \frac{5}{33}$

Digitalia kann langfristig damit rechnen, dass das Unternehmen einen Marktanteil von ca. 67 % erhält.

b) **Untersuchung einer möglichen Umsiedelung**

Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}01 \\ 3000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

von\nach	Ei	L	P	K
Ei		0,6		
L			0,6	
P				0,01
K	3000			

Populationsentwicklung

$a \cdot b \cdot c \cdot v = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}01 \cdot 3\,000 = 10{,}8 > 1$

Die Population wächst, d. h. der Staat muss umgesiedelt werden.

Anzahl der neuen Kolonien angeben

Startvektor $\vec{v}_{Start}^{\,T} = (3\,000 \quad 1000 \quad 500 \quad 1)$

6 Monate ≙ 2 Perioden: $\vec{v}_2^{\,T} = \vec{v}_{Start}^{\,T} \cdot M^2 = (15\,000 \quad 1800 \quad 1080 \quad 6)$

Fünf neue Kolonien sind in der Zeit entstanden.