2.2.5 Orthogonale Geraden

Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, werden als zueinander orthogonale Geraden bezeichnet. Der Graph von g entsteht durch Drehung um 90° aus dem Graphen von f.

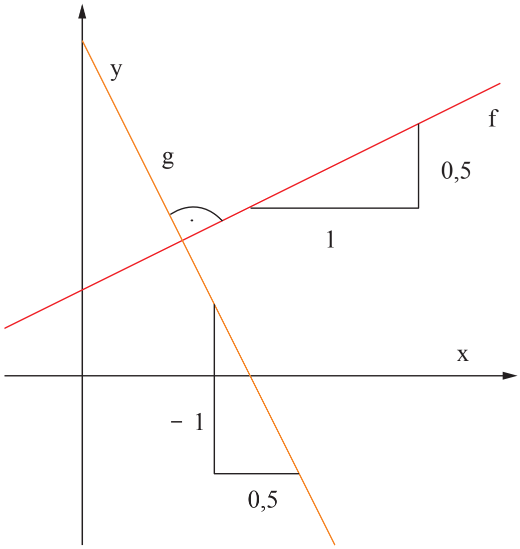
Man kann sich vorstellen, dass sich bei der Drehung auch das Steigungsdreieck mitdreht. Zwischen den Steigungen orthogonaler Geraden kann man einen Zusammenhang vermuten. Die Graphen der linearen Funktionen f und g sind genau dann orthogonal (stehen senkrecht aufeinander), wenn für ihre Steigungen m_f und m_g gilt:

$$\mathbf{m_g = \frac{-1}{m_f}}$$

$m_f = \frac{0,5}{1} = 0,5;$ $\quad m_g = \frac{-1}{0,5} = -2$

↓ Steigung von f $\quad$ ↓ Steigung von g

Zusammenhang: $m_g = \frac{-1}{m_f}$



► Beispiel:

a) Prüfen Sie, ob die Graphen der Funktionen f und g orthogonal sind:

$f(x) = 1,5x - 1;\ \ g(x) = \frac{-2}{3}x + 2,5$

b) Wie lautet die Funktionsgleichung g der Geraden, die senkrecht auf der Geraden der Funktion

$f(x) = \frac{-1}{3}x + 2$ steht, wenn sich beide Geraden im Punkt $P(2|1)$ senkrecht schneiden?

▼ Lösung:

a) Es wird die obige Formel unmittelbar angewendet. Man erkennt, dass die Graphen orthogonal sind.

$$m_g = \frac{-1}{m_f};\ \ m_g = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

b) Man berechnet die Steigungswerte der Geraden von g. Da die Koordinaten für f(2) und g(2) gleich sind, findet man durch Umformen den Wert n der Geradengleichung von g.

$g(x) = m_g\, x + n;\ m_g = \frac{-1}{\frac{-1}{3}} = 3$

Punkt $P(2|1);\ m_g = 3$
$f(2) = g(2) = 1 = 3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -5$
$g(x) = 3x - 5$

Übung

Ü1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden, die sich mit der Geraden der Funktion f mit $f(x) = 0,25x + 0,75$ im Punkt $P(1|1)$ schneidet. Beide Geraden stehen senkrecht aufeinander.

Symmetrie

A4 Untersuchen Sie die Graphen der folgenden Funktionen auf Achsensymmetrie zur y-Achse oder Punktsymmetrie zum Punkt P(0|0) oder keines von beidem.

a) $f(x) = 4x^5 - 3x$
b) $f(x) = 2x^6 - 4x^2 + 3$
c) $f(x) = 3x^3 - x + 4$
d) $f(x) = 2x^4 - x^2 + x$
e) $f(x) = x^5 + 4x^4 - 2$
f) $f(x) = x^3 + 6x - x^5$

A5 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

a) $f(x) = x^4 - x^2$
b) $f(x) = 3x - 3x^3$
c) $f(x) = x^4 - x^2 - 1$

Nullstellen

A6 Geben Sie die Nullstellen von f an.

a) $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$
b) $f(x) = (x - 5)(x + 3)x^2$
c) $f(x) = x(x - 2)2(x - 4)$

A7 Bestimmen Sie die Nullstellen von f. Ermitteln Sie zunächst eine Nullstelle durch Probieren.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$
c) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - x + 1$
d) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$
e) $f(x) = x^3 - x^2 - 10x + 6$
f) $f(x) = -1{,}5x^3 + 6x^2 - 4{,}5$
g) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
h) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
i) $f(x) = 0{,}4x^4 - 6{,}4$
j) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 12$
k) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 10x + 7$
l) $f(x) = 0{,}5x^3 - 4x - 4$

A8 Berechnen Sie den (die) Schnittpunkte, in dem (denen) sich die Graphen folgender Funktionen schneiden:

a) $f(x) = 2x^2 - 3$; $g(x) = 6 - x^2$
b) $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x$; $g(x) = x^2 - 4$
c) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$; $g(x) = x - 1$
d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$; $g(x) = 0{,}5x - 4$

A9 Bestimmen Sie die ganzrationalen Funktionen n-ten Grades, welche die angegebenen Nullstellen haben und deren Graph durch den Punkt P geht.

a) Funktion zweiten Grades, Nullstelle bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.
b) Funktion dritten Grades, Nullstellen bei $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 5$.
c) Funktion dritten Grades, Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, geht durch P(0|0) und hat bei $x_1 = 5$ eine Nullstelle.
d) Funktion dritten Grades, Nullstellen bei $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ sowie Punkt P(0|6).
e) Funktion vierten Grades, Nullstelle bei $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, achsensymmetrisch zur y-Achse. Der Graph geht durch P(0|−4).

Zusammengesetzte Aufgaben

A10 Gegeben ist $f(x) = 0{,}\overline{3}\,x^3 - x$.

a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie zum Ursprung.
b) Bestimmen Sie die Nullstellen und zeichnen Sie den Graphen.
c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g: $g(x) = x^2 - 3{,}\overline{3}$.
d) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden, die durch die äußeren unter c) errechneten Schnittpunkte geht.

Grenzwerte für $x \to x_0$

A7 Gegeben sind die Funktionen

1. $f(x) = \frac{2-x}{4-x^2}$; $G = \mathbb{R}$;

2. $g(x) = \frac{x^2-x}{x-x^3}$; $G = \mathbb{R}$;

a) Bestimmen Sie getrennt die Nullstellen von Zähler und Nenner und geben Sie die Definitionsmenge D(f) an. Entscheiden Sie unmittelbar, welche Art von Definitionslücke vorliegt.
b) Vereinfachen Sie den Funktionsterm durch Kürzen und schließen Sie die auftretenden Lücken durch eine Zusatzdefinition. Geben Sie die Funktionsgleichungen $\overline{f}$ und $\overline{g}$ an.
c) Zeichnen Sie die Graphen.

A8 Berechnen Sie zuerst die Stelle(n) x_0, an denen die Funktion f nicht definiert ist und untersuchen Sie dann das Grenzwertverhalten für $x \to x_0$.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
b) $f(x) = \frac{3x-3}{x^2-1}$
c) $f(x) = \frac{x^2-4x}{x-4}$
d) $f(x) = \frac{x^3-4x^2}{2x^3-3x^2+x}$
e) $f(x) = \frac{(x+3)(2x-1)}{2x+6}$
f) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

A9 Gegeben sind die Funktionen 1. $f(x) = \frac{x^2-4}{2x-4}$; $G = \mathbb{R}$ und 2. $g(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1}$; $G = \mathbb{R}$.

Geben Sie die Definitionsmenge D(f) an. Untersuchen Sie anhand einer „verfeinerten" Tabelle, wie sich die Funktionswerte in der Umgebung der Definitionslücken verhalten. Welchen Grenzwert vermuten Sie jeweils? Vereinfachen Sie jeweils den Bruchterm und bestimmen Sie, falls vorhanden, die Koordinaten der auftretenden Lücken.

A10 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1-x}{1-x^2}$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge D(f) an.
b) Vereinfachen Sie den Funktionsterm algebraisch, untersuchen Sie das Grenzwertverhalten für die Nullstellen des Nenners und zeichnen Sie den Graphen.

A11 Gegeben sind die beiden Funktionen f mit 1. $f(x) = \frac{x^3-64}{2x^2-x-28}$ 2. $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$.

a) Ermitteln Sie den Definitionsbereich, berechnen Sie die Nullstelle und geben Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.
b) Untersuchen Sie das Grenzverhalten für $x \to \pm\infty$.
c) Untersuchen Sie das Grenzverhalten von f an seinen Definitionslücken.

A12 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0}$ für

a) $m > n$
b) $m < n$
c) $m = n$

Die Betragsfunktion f ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht ableitbar, dies ist am Differenzenquotienten zu erkennen. **Die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.**
Sie ist an der Stelle x = 0 stetig.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x; & x < 0 \\ x; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0: \frac{-x-0}{x-0} = \mathbf{-1};\ \ x > 0: \frac{x-0}{x-0} = \mathbf{1}$$

Anmerkung:
Betragsfunktionen f der Form $f(x) = |g(x)|$ ändern in den Nullstellen des Terms g(x) ihr Steigungsverhalten.

Aufgaben 4.3

A1 Bestimmen Sie die Funktion $K'(x)$, mit der Sie die Grenzkosten in jedem Punkt des Intervalls $x \in (0; 6)$ der Kostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$ berechnen können.

A2 Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktion f und die Tangente durch den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an den Graphen von f. Berechnen Sie die Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

a) $f(x) = 2x - 2;\ x_0 = 3$
b) $f(x) = x^2 - 0{,}5x;\ x_0 = 0$
c) $f(x) = -x^3;\ x_0 = -2$
d) $f(x) = -\frac{1}{x};\ x_0 = 4$
e) $f(x) = (x + 1)^2;\ x_0 = 1{,}5$
f) $f(x) = 3 - x^2;\ x_0 = -2$
g) $f(x) = x^2 - x - 6;\ x_0 = 3$
h) $f(x) = x^3 - x;\ x_0 = -2$
i) $f(x) = 1 + \frac{1}{x};\ x_0 = 1$

A3 Gegeben sind folgende Funktionen:

a) $f(x) = |2x|$
b) $f(x) = |x + 1|$
c) $f(x) = |x^2 - 1|$
d) $f(x) = |4x - x^2|$
e) $f(x) = |x^2 - 9|$
f) $f(x) = |x^2 + 0{,}5x - 0{,}5|$

Ermitteln Sie die Stellen x_0, an denen die Funktion f keine Ableitung besitzt. Nehmen Sie evtl. den Graphen zu Hilfe.

5.3 Kurvendiskussion

Mit der Kurvendiskussion, wie sie in diesem Kapitel durchgeführt wird, werden folgende charakteristische Eigenschaften von Funktionen bzw. ihrer Graphen untersucht: **Symmetrie, Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$, Nullstellen, Extrem-** und **Wendepunkte.**
An einem Beispiel werden diese Untersuchungskriterien noch einmal beschrieben.

► Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 4x$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch.

▼ Lösung:

1. Symmetrie
Der Funktionsterm $0{,}5x^3 - x^2 - 4x$ ist ganzrational. Bei der Variablen x treten gerade und ungerade Exponenten auf. Es liegt weder Achsen- noch Punktsymmetrie zum Punkt $P(0|0)$ vor.

2. Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$
Der Teilterm mit dem größten Exponenten von x dient zur Untersuchung der Näherung für große bzw. kleine x-Werte.
$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty;\ x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

3. Nullstellen
Die Gleichung $f(x) = 0$ muss nach x aufgelöst werden. Dazu werden benötigt:
Ausklammern – p-q-Formel.
$0 = 0{,}5x^3 - x^2 - 4x \Rightarrow 0 = x(0{,}5x^2 - x - 4)$
$x_{N_1} = \mathbf{0};\ x_{N_2} = 1 + \sqrt{1+8} = \mathbf{4};\ x_{N_3} = 1 - \sqrt{1+8} = \mathbf{-2}$

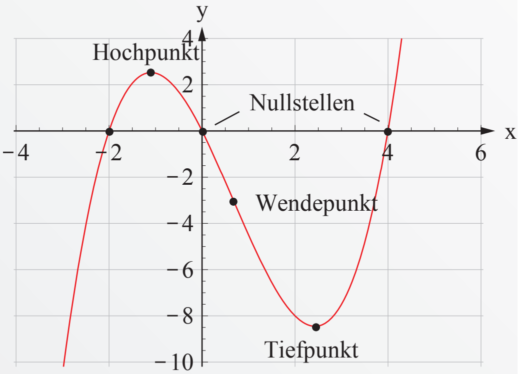
4. Extrempunkte (Extrema)
Die Gleichung $f'(x) = 0$ muss nach x aufgelöst werden. Ob die Lösungen HP oder TP sind, wird mit der zweiten Ableitungsfunktion $f''(x)$ untersucht.

$$f'(x) = 0 = 1{,}5x^2 - 2x - 4 \ \Rightarrow\ x_{E_1} = \frac{2}{3} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}} = \mathbf{2{,}4}$$

$$x_{E_2} = \frac{2}{3} - \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}} = \mathbf{-1{,}1}$$

$f''(x) = 3x - 2;\ \ f''(2{,}4) = 5{,}3;\ 5{,}3 > 0$
Tiefpunkt in $T(2{,}4|-8{,}5)$
$f''(-1{,}1) = -5{,}3;\ \ -5{,}3 < 0$
Hochpunkt in $H(-1{,}1|2{,}4)$

5. Wendepunkt
Die Gleichung $f''(x) = 0$ muss nach x aufgelöst werden. Die Lösung wird mithilfe der dritten Ableitungsfunktion untersucht.
$f''(x) = 0 = 3x - 2 \ \Rightarrow\ x_W = 0{,}67$
$f'''(0{,}67) = 3;\ 3 \neq 0$
Wendepunkt in $P_W(0{,}67|-2{,}9)$



6. Graph
Die charakteristischen Punkte aus 3. bis 5. sowie evtl. weitere Punkte werden eingezeichnet.

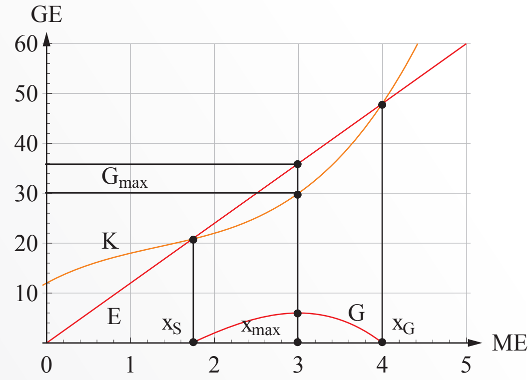
▼ Lösung:

a) Es wird die Stelle x_{max} berechnet, an der die Steigung des Graphen von E gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von K ist, denn die gewinnmaximale Absatzmenge liegt an der Stelle x_{max}, an der gilt: $E'(x_{max}) = K'(x_{max})$.

$E'(x) = K'(x)$

$12 = 3x^2 - 8x + 9$

$0 = x^2 - \frac{8}{3}x - 1 \;\Rightarrow\; x_{max} = \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \mathbf{3}$



Der Graph der Gewinnfunktion G hat hier einen Hochpunkt. Der maximale Gewinn G_{max} ist die Differenz E(3) − G(3) = 6 GE.

$G(x) = 12x - (x^3 - 4x^2 + 9x + 12) = 4x^2 - x^3 + 3x - 12$

$G'(x) = 0 = 8x - 3x^2 + 3 \;\Rightarrow\; x_{max} = \mathbf{3\ ME}$

$G_{max} = 12 \cdot 3 - (3^3 - 4 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 12) = 6\ \text{GE}$

b) Unter dem Grenzgewinn versteht man die erste Ableitungsfunktion G′ der Gewinnfunktion G. Diese Funktion gibt aus ökonomischer Sicht den Zuwachs des Gewinns je Mengeneinheit an.

$G'(x) = 8x - 3x^2 + 3$

$G'(2) = 7$

c) Um die Gewinngrenzen, Nutzenschwelle x_S und Nutzengrenze x_G zu berechnen, werden die Terme von K und E gleichgesetzt. Man errechnet x_S = 1,71 ME und x_G = 4 ME.

$E(x) = K(x)$

$12x = x^3 - 4x^2 + 9x + 12$

$0 = x^3 - 4x^2 - 3x + 12$

$x_S = \mathbf{1{,}7}$ und $x_G = \mathbf{4}$

```
MATH ↓ Ø:SOLVER ENTER ↑
EQUATION SOLVER
eqn:Ø = x^3−4x^2−3x+12
ALPHA SOLVE
```

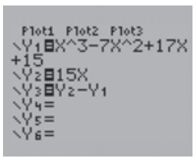
Übung

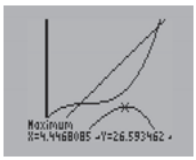
Ü1 Gegeben sind die Kostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 7x^2 + 17x + 20$ und die Erlösfunktion E mit $E(x) = 17x$. Berechnen Sie mithilfe des GTR die gewinnmaximale Absatzmenge und den Maximalgewinn sowie den Grenzgewinn bei einer Produktion von 3 ME. Ermitteln Sie Nutzenschwelle und Nutzengrenze.

Einsatz des GTR:

Gegeben sind die Kostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 7x^2 + 17x + 15$ und die Erlösfunktion $E(x) = 15x$. Bilden Sie die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$, bestimmen Sie den maximalen Gewinn und die dazugehörige Ausbringungsmenge.

Man gibt unter Y = die zwei Terme für K und E ein. Dann mit VARS und Y-VARS Y2-Y1 eingeben. Mit GRAPH erhält man die Graphen und mit 2ND CALC ↓MAXIMUM die maximale Ausbringungsmenge und das Gewinnmaximum.
Maximale Ausbringungsmenge x = 4,38 ME,
Gewinnmaximum: G_{max} = 26,51 GE.





b) Für x setzt man die Zahl 1 ein und erhält so eine Gleichung dritten Grades. Durch Probieren findet man die Zahl 2, die die Gleichung erfüllt.

$$-9 = \int_a^x (3t^2 + 2t - 1)dt = [t^3 + t^2 - t]_a^x$$
$$-9 = x^3 + x^2 - x - (a^3 + a^2 - a) \wedge (x = 1)$$
$$-9 = 1 - a^3 - a^2 + a$$
$$10 = a^3 + a^2 - a \;\Rightarrow\; \mathbf{a = 2}$$

▶ Beispiel:

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 4x$. Berechnen Sie die Nullstellen der Integralfunktion F_2.

▼ Lösung:

Integrationsvariable sei t. Obere Grenze ist x und untere Grenze ist 2.

$$F_2(x) = \int_2^x (t^3 - 4t)dt = \left[\frac{t^4}{4} - 2t^2\right]_2^x = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$$

Für die Berechnung der Nullstelle setzt man $z = x^2$ und löst die Gleichung mit der p-q-Formel. Die Funktion F hat zwei Nullstellen.

$$0 = \frac{z^2}{4} - 2z + 4$$
$$0 = z^2 - 8z + 16 \;\Rightarrow\; z = 4$$
$$x_1 = \mathbf{2};\; x_2 = \mathbf{-2}$$

Aus der Definition von Seite 203 geht hervor, dass alle Integralfunktionen auch Stammfunktionen sind, denn es gilt $F_a{}'(x) = f(x)$.

Alle Stammfunktionen von f sind aber **nicht schon Integralfunktionen,** wie das folgende Beispiel zeigt:

- Die Funktionen $F(x) = 0{,}5x^2 - 1$; $G(x) = 0{,}5x^2 + 1$; $H(x) = 0{,}5x^2 + 100$ sind alle Stammfunktionen von $\mathbf{f(x) = x}$, doch nur $F(x) = 0{,}5x^2 - 1$ ist **Integralfunktion.**

Begründung:

Jede Integralfunktion von $f(x) = x$ hat die Form $F_a(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5a^2$.

$$\int_a^x t\,dt = \mathbf{0{,}5x^2 - 0{,}5a^2}$$

Es wird nun durch Vergleich geprüft, ob man für die Funktionen F einen Wert für a bestimmen kann. Dies ist der Fall.

$$0{,}5x^2 - 1 = 0{,}5x^2 - 0{,}5a^2 \;\Rightarrow\; 2 = a^2;\; \mathbf{a = \sqrt{2}} \vee \mathbf{a = -\sqrt{2}}$$

Dagegen ist $G(x) = 0{,}5x^2 + 1$ *keine* Integralfunktion, da die Gleichung $a^2 = -2$ nicht lösbar ist.

$$0{,}5x^2 + 1 = 0{,}5x^2 - 0{,}5a^2 \;\Rightarrow\; 1 = -0{,}5a^2$$

Die Gleichung ist nicht lösbar.

Ebenfalls ist $H(x) = 0{,}5x^2 + 100$ *keine* Integralfunktion, da $a^2 = -200$ keine Lösung hat.

$$0{,}5x^2 + 100 = 0{,}5x^2 - 0{,}5a^2$$
$$100 = -0{,}5a^2 \;\Rightarrow\; -200 = a^2$$

Die Gleichung ist nicht lösbar.

9 Neue Funktionen und ihre Ableitungen

9.1 Problemstellung

Im Kapitel 2.5 werden ganzrationale Funktionen höheren Grades aus „einfachen" Grundfunktionen durch **Addition** der einzelnen Terme entwickelt.
Die **Ableitungen** dieser neuen Summenfunktionen, z. B. u(x) + v(x), werden in Kapitel 4.5 mithilfe einfacher Ableitungsregeln ermittelt.

► Einführungsbeispiel:

$\mathbf{u(x) = 3x^3 + 4x + 1;\ v(x) = x^2 - 4}$
Summe:
$f(x) = u(x) + v(x);\quad f(x) = 3x^3 + x^2 + 4x - 3;\quad \mathbf{f'(x) = 9x^2 + 2x + 4}$

Werden Funktionen benötigt, die durch ein **Produkt** (im Beispiel ohne Ausmultiplizieren), einen **Quotienten** oder einer **„Verkettung"** entstehen, so können solche Funktionen nicht mehr mit den bekannten Regeln abgeleitet werden.

Produkt:
$f(x) = u(x) \cdot v(x) = (3x^3 + 4x + 1) \cdot (x^2 - 4)$
Quotient:
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{3x^3 + 4x + 1}{x^2 - 4}$ bzw. $f(x) = \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{x^2 - 4}{3x^3 + 4x + 1}$

Neu ist hier die **„Verkettung"** von Funktionen (Näheres siehe Seite 228). Auch bei der Verkettung entsteht eine „neue" Funktion. Es existieren zwei Möglichkeiten, und zwar **u(v(x))** und **v(u(x)).** Die jeweils neue Funktion f(x) entsteht dadurch, dass man für jedes x der „äußeren" Funktion den gesamten Term der „inneren" Funktion einsetzt.

Verkettung:
$f(x) = u(v(x)) = 3(\mathbf{x^2 - 4})^3 + 4(x^2 - 4) + 1$
äußere Funktion: $u(x) = 3x^3 + 4x + 1$;
innere Funktion: $v(x) = x^2 - 4$
$f(x) = v(u(x)) = (\mathbf{3x^3 + 4x + 1})^2 - 4$
äußere Funktion: $v(x) = x^2 - 4$
innere Funktion: $u(x) = 3x^3 + 4x + 1$

Man erkennt eine verkettete Funktion f daran, dass sie aus einer inneren Funktion v und einer äußeren Funktion u besteht.

$f(x) = u(v(x)) = (x^2 - 2x - 2)^3$
äußere Funktion: $u(x) = x^3$
innere Funktion: $v(x) = x^2 - 2x - 2$

Man sagt: Bei einer Verkettung von Funktionen werden die Funktionen nacheinander ausgeführt.

Übungen

Ü1 Gegeben sind die Funktionen u mit $u(x) = 2x^2 - 1$ und v mit $v(x) = x + \sqrt{x}$. Ermitteln Sie u(v(x)) und v(u(x)).

Ü2 Gegeben sind die Funktionen
a) f mit $f(x) = (3x^2 - 3x + 3)^4$, b) f mit $f(x) = \sqrt{x^3 - 2}$ und c) f mit $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$.
Zerlegen Sie f in eine innere Funktion v und eine äußere Funktion u.