Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Kurt Bohner
Oberstudienrat

Dipl.-Phys. Dr. Peter Ihlenburg
Oberstudienrat

Roland Ott
Oberstudienrat

Elke Gerling
Oberstudienrätin

* * * * * * * * * *

4. Auflage 2014

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-0452-7

Vorwort

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für das Wahlgebiet „Lineare Algebra“ in allen beruflichen Gymnasien und Berufskollegs der Fachrichtung Wirtschaft und Verwaltung sowie Gesundheit und Soziales.

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

Jede Lerneinheit schließt mit einer ausreichenden Anzahl von Aufgaben ab. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Am Ende eines jeden Kapitels findet der Schüler eine Zusammenfassung, die den Stoff in übersichtlicher Darstellung auf das Wesentliche konzentriert. Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad, die es dem Schüler ermöglichen, den Stoff zu festigen und zu vertiefen, beenden jedes Kapitel. Beispiele und Aufgaben aus dem Alltag stellen einen praktischen Bezug her. Materialverflechtung, das Leontief-Modell, Stochastische Matrizen und die Lineare Optimierung werden als Anwendungsgebiete ausführlich behandelt.

Um dem Schüler eine schnelle Orientierung über die Inhalte zu ermöglichen, werden Farben als Gestaltungsmittel eingesetzt.

Aufgabenbeispiele und Aufgaben sind grau hinterlegt.

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige Grundlagen sind rot hinterlegt.

Bemerkungen, Hinweise und Beachtenswertes sind blau hinterlegt.

Hinweise und Anregungen, die zur Verbesserung beitragen, werden dankbar aufgegriffen.

Die Verfasser

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlagen

1 Rechnen mit Matrizen

1.1 Einführung

Beispiele

1) Eine Juniorenfirma in einer Schule verkauft an drei Verkaufsständen Disketten, Schreibblöcke, Kugelschreiber und Bleistifte. Die folgende Tabelle zeigt die Verkaufszahlen für einen Tag.

	Diskette	Schreibblock	Kugelschreiber	Bleistift
Stand 1	15	10	8	7
Stand 2	12	7	5	5
Stand 3	2	4	11	3

Die Zahlen der Tabelle kann man in einem **Zahlenschema** eindeutig darstellen.

$$\begin{pmatrix} 15 & 10 & 8 & 7 \\ 12 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Ein solches Zahlenschema heißt **Matrix.**

Da sie aus 3 Zeilen und 4 Spalten besteht, sagt man: Es liegt eine 3 mal 4 Matrix vor.

Sie hat das **Format** (3, 4) bzw. sie ist vom Typ (3, 4).

Die Zahlen in der Matrix heißen **Elemente der Matrix.**

Um die Position der Elemente festzulegen, ordnet man jedem Element zwei Zahlen zu, den **Zeilenindex** und den **Spaltenindex.**

Die Zahl 8 steht in der 1. Zeile und in der 3. Spalte.

8 ist das Element a_{13}: $a_{13} = 8$.

$$\begin{pmatrix} 15 & 10 & 8 & 7 \\ 12 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Zahl 3 steht in der 3. Zeile und in der 4. Spalte.

3 ist das Element a_{34}: $a_{34} = 3$.

2) In einem Betrieb werden aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Die folgende **Tabelle** (Matrix) gibt an, wie viel ME der Rohstoffe für je eine ME der Endprodukte gebraucht werden.

Tabelle

	E_1	E_2	E_3
R_1	4	6	8
R_2	3	0	7

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

1.2 Begriffe

Definition einer Matrix:

Ein **Zahlenschema** aus **m** Zeilen und **n** Spalten ($m, n \in \mathbb{N}^*$) nennt man eine **Matrix** vom Format (m, n) bzw. vom Typ (m, n).

Matrizen werden mit **großen Buchstaben** bezeichnet: **A**, **B**, **C**, ...

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn} \quad \text{mit } i = 1, ..., m \text{ und } j = 1, ..., n$$

Die Zahlen a_{ij} heißen Elemente von **A.**

i ist der Zeilenindex; j ist der Spaltenindex.

Beispiele

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 17 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; Typ(**A**) = (2, 3)

Elemente von **A**, z. B.: $a_{12} = -2$; $a_{21} = 17$

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; Typ(**B**) = (3, 1); Element von **B**, z. B.: $a_{31} = 3$

Quadratische Matrix

Eine Matrix **A** vom Typ(**A**) = (m, m) heißt **quadratische Matrix.**
Anzahl der Zeilen = Anzahl der Spalten

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \\ -2 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ Hauptdiagonale

Diagonalelemente: $a_{11} = -3$; $a_{22} = -7$; $a_{33} = 1$

Besondere quadratische Matrizen

a) **Dreiecksmatrix**

Eine **quadratische** Matrix, in der alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen null sind, heißt **obere Dreiecksmatrix.**

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $a_{ij} = 0$ für $i > j$

b) **Einheitsmatrix**

Alle Elemente der Hauptdiagonalen sind eins, die anderen Elemente sind null.

$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{E} = (e_{ij})$ mit $e_{ij} = 1$ für $i = j$, und $e_{ij} = 0$ für $i \neq j$

Die **Einheitsmatrix** wird mit **E** bezeichnet.

Transponierte Matrix

Die Zeilen werden mit den entsprechenden Spalten getauscht.

Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 32 & 4 \\ 17 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ Transponierte Matrix $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ 32 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

Vektoren

Eine Matrix **A** vom Typ(**A**) = (1, n) heißt **Zeilenvektor.**

Eine Matrix **A** vom Typ(**A**) = (m, 1) heißt **Spaltenvektor.**

Spaltenvektor

$\mathbf{A}_{(3,\,1)} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

Zeilenvektor

$\vec{b} = (5 \quad -7 \quad 8)$

Vektoren werden mit kleinen Buchstaben und einem Pfeil bezeichnet.

Ein **transponierter Zeilenvektor** ist ein **Spaltenvektor.** $(5 \quad -7 \quad 8)^T = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 32 \\ 17 & -3 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ist eine Matrix vom Typ(**A**) = (4, 2)

mit den Zeilenvektoren (1 32); (17 –3); (–3 4) und (5 7)

mit den Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Beachten Sie: Eine (**m**, n)-Matrix besteht aus **m Zeilenvektoren** und **n Spaltenvektoren.**

Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})$ sind gleich, wenn sie vom gleichen Typ (m, n) sind und die entsprechenden Elemente gleich sind,

d. h.: $a_{11} = b_{11} \wedge a_{12} = b_{12} \wedge \ldots \wedge a_{mn} = b_{mn}$.

Beispiele

Die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 7 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ sind gleich (**A** = **B**), wenn $a = 8 \wedge b = 0$.

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t+3 \\ 3t \\ t^2-2 \end{pmatrix}$ sind gleich für t = 3.

Aufgaben

1. Gegeben sind die Matrizen **A** und **B** mit

$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 32 & 4 \\ 17 & -3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad \mathbf{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 32 \\ 17 & -3 \\ 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Welche Formate haben die Matrizen **A** und **B**?

b) Bestimmen Sie die Elemente: a_{21}; a_{33}; b_{11}; b_{42}; b_{32}.

c) Berechnen Sie: $a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

d) Lösen Sie die Gleichung: $a_{13} \cdot x^2 = a_{23} \cdot x$.

2. Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(3,3)}$, sodass gilt:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 5 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$ $\qquad$ b) $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{für } i > j \\ 2j & \text{für } i \leq j \end{cases}$

c) $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{für } i > j \\ -1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i < j \end{cases}$ $\qquad$ d) $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & \text{für } i \neq j \\ i + 2j & \text{für } i = j \end{cases}$

3. Bestimmen Sie die Matrix **A** vom Typ (4, 3), wenn Folgendes bekannt ist:

$a_{11} = a_{31} = -1$; $a_{23} = 5$; $a_{42} = -0{,}5$; $a_{12} = -0{,}4a_{23}$.

Alle anderen Elemente von **A** sind null.

4. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & t-4 \\ t^2-1 & t^2 & 5 \\ 0 & t+1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie t, sodass $\mathbf{A}_t$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

5. Bestimmen Sie die Elemente der Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{23} + a_{31} & -2\,a_{11} & (a_{11})^2 \\ -a_{33} + a_{11} & -1 & -4 \\ 1 - a_{22} & a_{31} \cdot a_{11} & 2\,a_{32} \end{pmatrix}$.

6. Gegeben sind die Matrizen **A** und **B** mit

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 5 \\ 3d - 20 & a + 2b \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+b & 5 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$; a, b, d $\in$ **R.**

Bestimmen Sie a, b und d so, dass gilt: **A** = **B.**

7. Bestimmen Sie a_{23} und a_{41} von $\mathbf{A} = (a_{ij})$, wenn $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & -5 \\ 3 & 7 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.

1.3 Addition von Matrizen

Beispiel

Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 8 & 7 \\ 12 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 10 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

A und **B** geben die Verkaufszahlen der Juniorenfirma für die zwei Verkaufstage einer Woche an. Stellen Sie die Verkaufszahlen für diese Woche in einer Matrix **C** dar.

Lösung

Man erhält die Verkaufszahlen einer Woche durch Addition der entsprechenden Elemente von **A** und **B.**

1. Tag: **A** 2. Tag: **B** Wochenumsatz: **C**

$$\begin{pmatrix} 15 & 10 & 8 & 7 \\ 12 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 11 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 10 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+2 & 10+3 & 8+1 & 7+4 \\ 12+15 & 7+10 & 5+6 & 5+2 \\ 2+3 & 4+9 & 11+5 & 3+3 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Matrix **C** erhält man durch **Addition der entsprechenden Elemente von A und B,** d. h., die Matrix **C** entsteht durch **Addition der Matrizen A und B.**

Matrix $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 9 & 11 \\ 27 & 17 & 11 & 7 \\ 5 & 13 & 16 & 6 \end{pmatrix}$ **C = A + B**

Festlegung: Zwei Matrizen **A** und **B** werden addiert, indem man die **Elemente der Matrizen A und B,** die an der gleichen Position stehen, **addiert.**

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ **Keine Addition möglich, da nur Matrizen von gleichem Format addiert werden können.**

Beachten Sie: $\mathbf{A + O = O + A = A}$ **O: Nullmatrix**

$\mathbf{A^T + B^T = (A + B)^T}$

$\mathbf{A + B = B + A}$ **Kommutativgesetz**

$\mathbf{(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C}$ **Assoziativgesetz**

1.4 Skalare Multiplikation

Beispiel

Die Juniorenfirma möchte Waren für einen Monat einkaufen. Wie lässt sich, ausgehend von den Verkaufszahlen einer Woche (Matrix **C**), der voraussichtliche Bedarf für vier Wochen errechnen?

Lösung

Verkaufszahlen einer Woche: $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 9 & 11 \\ 27 & 17 & 11 & 7 \\ 5 & 13 & 16 & 6 \end{pmatrix}$

Voraussichtlicher Bedarf für 4 Wochen:

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 17 & 4 \cdot 13 & 4 \cdot 9 & 4 \cdot 11 \\ 4 \cdot 27 & 4 \cdot 17 & 4 \cdot 11 & 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 5 & 4 \cdot 13 & 4 \cdot 16 & 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 17 & 13 & 9 & 11 \\ 27 & 17 & 11 & 7 \\ 5 & 13 & 16 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & 52 & 36 & 44 \\ 108 & 68 & 44 & 28 \\ 20 & 52 & 64 & 24 \end{pmatrix} = 4 \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot 4$$

Festlegung: Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ wird mit einer **reellen Zahl (Skalar) k** multipliziert, indem man jedes Element von **A** mit der reellen Zahl k multipliziert.

$k \cdot \mathbf{A} = k \cdot (a_{ij}) = (ka_{ij});\ k \in \mathbf{R}$

Beispiele

a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$

c) $5\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

e) $3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 15 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & -28 \\ 0 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 40 \\ -6 & 11 \\ 5 & 30 \end{pmatrix}$

Beachten Sie: Einen **gemeinsamen Faktor aller Elemente** der Matrix kann man vor die Matrix „ziehen“.

Für $k \in \mathbf{R}$ gilt: $k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot k$

$k \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k \cdot \mathbf{A} + k \cdot \mathbf{B}$

$(k \cdot \mathbf{A})^T = k \cdot \mathbf{A}^T$

Aufgaben

1. Addieren Sie die Matrizen **A** und **B** bzw. die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & -4t \\ 4 & 3t \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5t & 4t \\ 5 & -5t \end{pmatrix}$

h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5a & -a & -7a \\ a & 8 & 5 \\ 8 & 3a & a \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 0{,}5a & 0 & a \\ 0{,}1a & 0{,}6a & 3a \end{pmatrix}$

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9t-1 \\ t+5 \end{pmatrix}$

j) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6-2t \\ 5t+3 \\ 8t-7 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = (5 \quad t-6 \quad 10t-3)^T$

2. Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

und die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = (2 \quad 7 \quad -8)$.

Berechnen Sie.

a) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$ c) $3\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$

d) $5(\mathbf{A} - 6\mathbf{E})$ e) $\mathbf{E} - 0{,}1(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ f) $-5\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}^{\,T}$

3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5t \\ -4t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie t so, dass $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$ ist.

4. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (-2 \quad 5 \quad 1)$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\vec{x}$ aus $\vec{a}^{\,T} - \vec{b} = \vec{x} + \vec{b}$.

5. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A}_t$ mit $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 2 \\ t+1 & 4-t & t^2 \\ 2t & t^2+1 & -t \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\mathbf{A}_t - \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^T$.

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & 2d \\ -2d & b \end{pmatrix}$ ist für b, d $\in \mathbf{R}^*$ eine (2; 2)-Matrix.
Für welche Werte von b und d gilt $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$?

1.5 Multiplikation von Matrizen

Beispiel

Herbert kauft zum Schuljahresbeginn Schreibwaren ein. Er führt einen Preisvergleich zwischen der Juniorenfirma und einem Schreibwarenladen durch.

Juniorenfirma

Menge	Stückpreis (in €)	Preis (in €)
4 Schreibblöcke	1,10	$4 \cdot 1{,}10 = 4{,}40$
3 Kugelschreiber	0,60	$3 \cdot 0{,}60 = 1{,}80$
5 Bleistifte	0,40	$5 \cdot 0{,}40 = 2{,}00$
Gesamtpreis:		8,20

Schreibwarenladen

Menge	Stückpreis (in €)	Preis (in €)
4 Schreibblöcke	1,20	$4 \cdot 1{,}20 = 4{,}80$
3 Kugelschreiber	0,50	$3 \cdot 0{,}50 = 1{,}50$
5 Bleistifte	0,45	$5 \cdot 0{,}45 = 2{,}25$
Gesamtpreis:		8,55

Den Gesamtpreis kann man mit dem **Schema von Falk** berechnen.

Juniorenfirma

	$\begin{pmatrix} 1{,}10 \\ 0{,}60 \\ 0{,}40 \end{pmatrix}$ Stückpreisvektor
$(4 \quad 3 \quad 5)$	$4 \cdot 1{,}10 + 3 \cdot 0{,}60 + 5 \cdot 0{,}40 = 8{,}20$
Mengen-vektor	**Gesamtpreis**

Zeilenvektor $\vec{a}$ mal **Spaltenvektor $\vec{b}$** ergibt eine Zahl (Skalar).

	$\vec{b}$
$\vec{a}$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$ = Zahl

Juniorenfirma/Schreibwarenladen

	$\begin{pmatrix} 1{,}10 & 1{,}20 \\ 0{,}60 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & 0{,}45 \end{pmatrix}$ Stückpreis-matrix
$(4 \quad 3 \quad 5)$	$(8{,}20 \quad 8{,}55)$
Mengen-vektor	**Gesamtpreisvektor**

Zeilenvektor $\vec{a}$ mal **Matrix B** ergibt einen Zeilenvektor.

	B
$\vec{a}$	$\vec{a} \cdot$ **B** Zeilenvektor

Karl möchte die gleichen Artikel einkaufen wie Herbert, nur braucht er andere Stückzahlen: Mengenvektor $\vec{a} = (7 \quad 5 \quad 2)$.
Er führt auch einen Preisvergleich zwischen der Juniorenfirma mit dem Schreibwarenladen durch. Der Gesamtpreis, den Herbert und Karl bezahlen müssten, kann wieder mit dem **Falk'schen Schema** berechnet werden.

$$\begin{array}{l|l} & \begin{array}{cc}\text{Jufi} & \text{Laden}\end{array} \\ & \begin{pmatrix}1{,}10 & 1{,}20\\ 0{,}60 & 0{,}50\\ 0{,}40 & 0{,}45\end{pmatrix} \text{ Stückpreismatrix} \\ \hline \begin{array}{l}\text{Herbert:}\\ \text{Karl:}\end{array}\begin{pmatrix}4 & 3 & 5\\ 7 & 5 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}8{,}20 & 8{,}55\\ 11{,}50 & 11{,}80\end{pmatrix} \end{array}$$

Mengenmatrix **Gesamtpreismatrix**

Z. B.: $7 \cdot 1{,}20 + 5 \cdot 0{,}50 + 2 \cdot 0{,}45 = 11{,}80$

Matrix A mal **Matrix B** ergibt eine Matrix:

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{B} \\ \hline A & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ Matrix} \end{array}$$

Definition der Matrizenmultiplikation

Das Produkt zweier Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und $\mathbf{B} = (b_{rs})$ wird nach folgendem Schema berechnet.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nl} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \boxed{c_{kl}} & & \vdots \\ & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{array}$$

Berechnung des Elementes c_{kl}:

$$c_{kl} = a_{kl} \cdot b_{1l} + a_{k2} \cdot b_{2l} + \dots + a_{kn} \cdot b_{nl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot b_{jl}$$

Beachten Sie: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ kann nur berechnet werden, wenn die Anzahl der Spalten von **A** mit der Anzahl der Zeilen von **B** übereinstimmt. $\mathbf{A}_{(m,\, n)} \cdot \mathbf{B}_{(n,\, p)} = \mathbf{C}_{(m,\, p)}$

Beispiele

1) Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie.

a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$

Lösung

a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 14 \\ -3 & 11 & 37 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema:

	B
A	**A · B**

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 10 & -3 & -7 \\ -18 & 11 & 15 \end{pmatrix}$ Berechnung im Schema:

	A
B	**B · A**

Beachten Sie: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (im Allgemeinen)

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ.**

b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$

Beachten Sie: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ **E** steht für Einheitsmatrix.

2) Gegeben sind die Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Tabelle.

	Z_1	Z_2
R_1	4	2
R_2	3	5

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	5
Z_2	7	4	7

Berechnen Sie, wie viele ME der Rohstoffe für je eine ME der Endprodukte benötigt werden.

Lösung

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: $\mathbf{A} = (R, Z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $\mathbf{B} = (Z, E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix **C**

erhält man durch Multiplikation: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 12 & 34 \\ 41 & 23 & 50 \end{pmatrix}$

Erläuterung: Für die Produktion von 1 ME E_3 benötigt man 34 ME R_1 und 50 ME R_2.

3) Ein Betrieb produziert aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Produkte P_1 und P_2. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist der Tabelle (Stückliste) zu entnehmen.

	P_1	P_2
R_1	4	6
R_2	0	8
R_3	5	3

a) Ein Kunde erteilt einen Auftrag über 20 ME von P_1 und 15 ME von P_2. Berechnen Sie, wie viel ME der Rohstoffe von jeder Sorte benötigt werden.

b) Die Rohstoffkosten betragen 7 GE (Geldeinheiten) für 1 ME R_1, 3 GE für 1 ME R_2 und 2 GE für 1 ME R_3. Berechnen Sie die gesamten Rohstoffkosten für die Produktion von 120 ME von P_1 und 80 ME von P_2.

Lösung

a) Aus der Tabelle erhält man die Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Die **1. Spalte** der Matrix gibt an, wie viel ME der einzelnen Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 für die Herstellung von **1 ME P_1** benötigt werden: 4 ME R_1 und 5 ME R_3.

Die **1. Zeile** der Matrix gibt an, wie viel ME des Rohstoffes R_1 für die Herstellung von **1 ME von P_1 bzw. P_2** benötigt werden.

Berechnung des **Rohstoffbedarfs** am Beispiel von R_1:

$$\begin{array}{c|cc|c} & & & P_1 \;\; 20 \\ & P_1 & P_2 & P_2 \;\; 15 \\ \hline R_1 & 4 & 6 & 4 \cdot 20 + 6 \cdot 15 = 170 \end{array}$$

Für die Herstellung von 20 ME von P_1 und 15 ME von P_2 braucht man 170 ME R_1.

Multiplikation mit dem **Produktionsvektor (als Spaltenvektor)** ergibt die benötigte Menge an Rohstoffen.

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 120 \\ 145 \end{pmatrix}$$

Für die Herstellung von 20 ME von P_1 und 15 ME von P_2 braucht man 170 ME von R_1, 120 ME von R_2 und 145 ME von R_3.

Beachten Sie: $\mathbf{A} \cdot \vec{p} = \vec{r}$ mit $\mathbf{A}$ = (R, P)-Matrix

$\vec{p}$ ist der Produktionsvektor

$\vec{r}$ ist der Rohstoffvektor

Beachten Sie auch die **Formate:** $\mathbf{A}_{(3,\,2)} \cdot \vec{p}_{(2,\,1)} = \vec{r}_{(3,\,1)}$

b) Berechnung der **Rohstoffkosten** für zum Beispiel 1 ME von P_1:

In 1 ME von P_1 sind enthalten

				R_1	4
				R_2	0
Kosten für 1 ME	R_1	R_2	R_3	R_3	5
	7	3	2		$7 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 38$

Die Rohstoffkosten für 1 ME von P_1 betragen 38 GE.

Multiplikation von links mit dem **Kostenvektor** $\vec{k}$ **(als Zeilenvektor)** ergibt die Rohstoffkosten für je eine ME der Produkte.

$$(7 \quad 3 \quad 2)\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = (38 \quad 72)$$

Für die Herstellung **von 1 ME von P_1** betragen die Rohstoffkosten 38 GE,

für 1 ME von P_2 betragen die Rohstoffkosten 72 GE.

Rohstoffkosten für die Produktion von 120 ME von P_1 und 80 ME von P_2:
Multiplikation von Rohstoffkosten je ME P_1 und P_2 mit dem Produktionsvektor ergibt die **Gesamtrohstoffkosten** (eine Zahl).

			P_1	120
Kosten für 1 ME	P_1	P_2	P_2	80
	38	72		$38 \cdot 120 + 72 \cdot 80 = 10320$

In Matrixschreibweise: $(38 \quad 72) \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = 10320$

Rohstoffkosten-vektor $\vec{k}$	Produktions-vektor $\vec{p}$	Gesamtrohstoff-kosten

Oder: $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 \\ 640 \\ 840 \end{pmatrix}$ **Gesamtrohstoffbedarf**

$(7 \quad 3 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 960 \\ 640 \\ 840 \end{pmatrix} = 10320$ **Gesamtrohstoffkosten**

Bemerkung: **Kostenvektoren** sind **Zeilenvektoren,**
Verbrauchsvektoren und **Produktionsvektoren** sind **Spaltenvektoren.**

Was man wissen sollte... über das Rechnen mit Matrizen

Addition von Matrizen: A + B

Es können nur Matrizen vom **gleichen Typ** addiert werden.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Eigenschaften

$\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$	**O: Nullmatrix**
$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	**Kommutativgesetz**
$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$	**Assoziativgesetz**

Skalare Multiplikation: k · A

Multiplikation einer Zahl $k \in \mathbf{R}$ (Skalar) mit einer Matrix.

$$k \cdot \mathbf{A} = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij});\ k \in \mathbf{R}$$

Eigenschaften ($k \in \mathbf{R}$)

$k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot k$

$k \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k \cdot \mathbf{A} + k \cdot \mathbf{B}$

$(k \cdot \mathbf{A})^T = k \cdot \mathbf{A}^T$

Multiplikation zweier Matrizen: A · B

Die Spaltenzahl der Matrix **A** muss mit der Zeilenzahl der Matrix **B** übereinstimmen.

Ist **A** eine (m, n)- und **B** eine (n, p)-Matrix, dann gilt für das Format der Ergebnismatrix: **(m, n) · (n, p) → (m, p)**

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ,** d. h., $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (im Allg.)

Eigenschaften ($k \in \mathbf{R}$)

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$	**Assoziativgesetz**
$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$	**Distributivgesetz**
$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$	
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$	**O: Nullmatrix**
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$	**E: Einheitsmatrix**

$k \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (k \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (k \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot k$

$(k \cdot \mathbf{A})^2 = k^2 \cdot \mathbf{A}^2$ mit $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$

Multiplikation zweier Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Zeilenvektor mal Spaltenvektor ergibt eine **Zahl.**

Beachten Sie: Die Division zweier Matrizen ist nicht definiert.

Aufgaben

1. Gegeben sind die Matrizen **A** und **B** und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = (2 \quad 3 \quad -4).$$

Berechnen Sie.

a) $\frac{1}{5} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ b) $\vec{b} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ c) $4\mathbf{A}^2$

d) $(\mathbf{B} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A}$ e) $\frac{1}{20} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{a}$ f) $\vec{b} \cdot \vec{a}$

2. Gegeben sind die Matrizen **A**, **B** und **C** durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie.

a) $2\mathbf{A} + \mathbf{C} - \mathbf{B}^T$ b) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}^T)$ c) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$

3. Multiplizieren Sie aus.

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$ b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$ c) $(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{E})$

4. Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie.

a) $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{5} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ c) $0{,}25\mathbf{A}^2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$

5. Bestimmen Sie a und b so, dass für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ gilt: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$.

6. Berechnen Sie x, sodass

$$(2{,}5 \quad 0{,}75 \quad 0{,}5 \quad 0{,}25)\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} + (12 \quad 15 \quad 16 \quad 20)\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} + 50 = 251 \text{ ergibt.}$$

7. Gegeben ist die Matrix **A** durch $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $(\mathbf{A}^T)^3$ und $(\mathbf{A}^T)^n$.

8. Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 4 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Vergleichen Sie.

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{k} = (2\ \ 1\ \ 3)$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und die Matrix $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie $\vec{k} \cdot \vec{p}$ und $\vec{k} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{p}$.

10. Klammmern Sie einen gemeinsamen Faktor aus.

    a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & 0{,}4 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}3 & 0{,}8 & -0{,}3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} \\ -\frac{5}{48} \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

11. Gegeben sind die Matizen **A** und **B** durch

    $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 & 5 \\ 2 & 10 & -4 & -1 \\ -5 & 9 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$.

    a) Berechnen Sie die Elemente c_{31} und c_{42} des Matrizenproduktes $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

    b) Das Element a_{31} der Matrix **A** wird geändert zu k; das Element b_{22} der Matrix **B** wird geändert zu $(k - 1)$.

       Berechnen Sie nun das neue Element c_{32} des Matrizenproduktes $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

12. Für jedes $t \in \mathbf{R}$ sind die Vektoren $\vec{a}_t$ und $\vec{b}_t$ gegeben durch

    $$\vec{a}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t \\ t-1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ t-2 \end{pmatrix}.$$

    Die Funktion f ist gegeben durch $f(t) = t(\vec{a}_t^{\,T} \cdot \vec{b}_t - 4t)$.

    Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

    Wo hat das Schaubild von f die kleinste Steigung?

13. Ein Betrieb stellt aus den zwei Rohstoffen R_1 und R_2 die Produkte E_1, E_2 und E_3 her. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist der Tabelle zu entnehmen.

	E_1	E_2	E_3
R_1	2	1	3
R_2	4	0	2

    a) Berechnen Sie, wie viel ME der Rohstoffe für die Produktion von 80 ME von E_1, 60 ME von E_2 und 110 ME von E_3 benötigt werden.

    b) Die Materialkosten je ME eines Rohstoffes sind gegeben durch $\vec{k}_R = (1{,}2\quad 0{,}8)$.

       Berechnen Sie die Kosten für die Herstellung je einer ME der drei Produkte.

       Wie hoch sind die Materialkosten für den Auftrag aus Teilaufgabe a)?

14. Gegeben sind die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

    Berechnen Sie $\mathbf{C} = (c_{ij}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und interpretieren Sie das Element c_{21}.

2 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme haben eine zentrale Bedeutung in verschiedenen Bereichen der Mathematik. Nicht nur zur Bestimmung einer Gleichung einer Parabel stellen wir ein lineares Gleichungssystem auf. Mit einem linearen Gleichungssystem lassen sich auch zahlreiche Probleme aus Technik und Wirtschaft modellieren und damit lösen. Aus dem Wissen über die unbekannten Größen, die bei diesen Problemen auftauchen, leiten wir Gleichungen her. Eine zentrale Aufgabe der linearen Algebra ist die **Lösung linearer Gleichungssysteme.**

2.1 Einführung

1) Ein Obstbauer liefert Äpfel der Sorten Boskop (B), Jonathan (J) und Elstar (E) an den Großmarkt. Die Lieferungen der letzten 3 Tage (in kg) lassen sich aus der Tabelle ablesen.

	B	J	E
T_1	40	36	100
T_2	175	50	30
T_3	60	220	40

Der Großhändler überweist für die Lieferung am 1. Tag (T_1) 305 €, für die Lieferung am 2. Tag (T_2) 385 € und für die Lieferung am 3. Tag (T_3) 445 €.
Welche Gleichungen müssen die Preise pro kg erfüllen?
Zeigen Sie, dass die Preise für Boskop (B) 1,5 €/kg, Jonathan (J) 1,25 €/kg und Elstar (E) 2 €/kg betragen.

Lösung

Man setzt für den Preis in € pro kg B x_1, pro kg J x_2 und pro kg E x_3.
Der Bauer bekommt $40x_1$ € für 40 kg B, $36x_2$ € für 36 kg J und $100x_3$ € für 100 kg E, insgesamt 305 €: $40x_1 + 36x_2 + 100x_3 = 305$

Für die Lieferung aller 3 Tage ergibt sich ein **lineares Gleichungssystem (LGS):**

Bedingungen für die Preise:

$$\begin{aligned} 40x_1 + 36x_2 + 100x_3 &= 305 \\ 175x_1 + 50x_2 + 30x_3 &= 385 \\ 60x_1 + 220x_2 + 40x_3 &= 445 \end{aligned}$$

Einsetzen von $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}25$ und $x_3 = 2$ in die drei Gleichungen führt zu drei wahre Aussagen.

Bemerkungen:

Das LGS hat die Lösung $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}25$; $x_3 = 2$.

Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}25 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) Welcher der Vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist Lösung

des linearen Gleichungssystems $x_1 + x_2 - x_3 = -1$ und $-x_1 + 4x_2 + x_3 = 11$?

Lösung

Eine Lösung erfüllt **alle Gleichungen** eines linearen Gleichungssystems (LGS).

$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Lösung, denn

$$-3 + 2 - 0 = -1 \quad \text{w. A.}$$
$$-(-3) + 4 \cdot 2 + 0 = 11 \quad \text{w. A.}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist keine Lösung, denn

$$1 + 4 - 6 = -1 \quad \text{w. A.}$$
$$-1 + 16 + 6 = 11 \quad \text{f. A.}$$

3) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem in Stufenform

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \quad x_3 &= 2 \\ x_2 - 0{,}5x_3 &= 4 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

Lösung

Einsetzen von $x_3 = -1$ in $x_2 - 0{,}5x_3 = 4$ ergibt $x_2 = 3{,}5$.

Einsetzen von $x_3 = -1$ und $x_2 = 3{,}5$ in $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ ergibt $x_1 = -2{,}5$.

Lösung des LGS: $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 3{,}5$; $x_3 = -1$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 3{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Beachten Sie: Lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und

n Unbekannten $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Bemerkung: a_{ij} heißen Koeffizienten.

Eine **Lösung eines LGS** mit n Unbekannten besteht aus n Zahlen, die **allen Gleichungen** genügen.

Bemerkungen: Aus der Stufenform (siehe Beispiel 3)) lässt sich die Lösung leicht bestimmen. Welche Umformungen sind geeignet, um diese günstige Stufenform zu erzeugen? Wie erhält man die Lösungen eines linearen Gleichungssystems?

2.2 Lösung von linearen Gleichungssystemen

2.2.1 Das LGS ist eindeutig lösbar

Beispiele

1) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$-x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \wedge -12x_1 - 7x_2 - 18x_3 = -2 \wedge 5x_1 + x_2 + 6x_3 = -9.$

Lösung mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren
Um eine Stufenform zu erreichen, müssen zwei Unbekannte eliminiert werden.

Wir eliminieren x_1:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - 2x_3 &= -3 \quad | \cdot (-12) \\ -12x_1 - 7x_2 - 18x_3 &= -2 \\ \hline 12x_1 + 12x_2 + 24x_3 &= 36 \\ -12x_1 - 7x_2 - 18x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x_1 - x_2 - 2x_3 &= -3 \quad | \cdot (5) \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 &= -9 \\ \hline -5x_1 - 5x_2 - 10x_3 &= -15 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Addition ergibt: $5x_2 + 6x_3 = 34$ $\qquad -4x_2 - 4x_3 = -24$

Wir eliminieren x_2:

$$\begin{aligned} 5x_2 + 6x_3 &= 34 \quad | \cdot (4) \\ -4x_2 - 4x_3 &= -24 \quad | \cdot (5) \\ \hline 20x_2 + 24x_3 &= 136 \\ -20x_2 - 20x_3 &= -120 \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen: $4x_3 = 16 \iff x_3 = 4$

Einsetzen von $x_3 = 4$ in $5x_2 + 6x_3 = 34$ ergibt $x_2 = 2$.

Einsetzen von $x_3 = 4$ und $x_2 = 2$ in $-x_1 - x_2 - 2x_3 = -3$ ergibt $x_1 = -7$.

$(-7 \quad 2 \quad 4)$ ist die **Lösung des LGS.** Das LGS hat **genau eine Lösung.**

Verkürzte Darstellung

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - 2x_3 &= -3 \quad \cdot (-12) \quad \cdot 5 \\ -12x_1 - 7x_2 - 18x_3 &= -2 \quad + \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 &= -9 \\ \hline -x_1 - x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 5x_2 + 6x_3 &= 34 \quad \cdot 4 \\ -4x_2 - 4x_3 &= -24 \quad + \;\cdot 5 \\ \hline -x_1 - x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 5x_2 + 6x_3 &= 34 \\ 4x_3 &= 16 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & -3 \\ -12 & -7 & -18 & -2 \\ 5 & 1 & 6 & -9 \\ \hline -1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & 34 \\ 0 & -4 & -4 & -24 \\ \hline -1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & 34 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}$$

Dreiecksform

Beachten Sie: Die zulässigen Elementarumformungen, um die Dreiecksform zu erreichen, sind die **Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl** ungleich null und die **Addition von Gleichungen.**

2) Gegeben ist ein LGS

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad &= 3 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -10. \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Lösungsvektor $\vec{x}$.

Lösung

Mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad &= 3 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ +2x_2 - 3x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -4x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung

$$-4x_3 = -8$$

erhält man $x_3 = 2.$

Einsetzen ergibt: $2\,x_2 + 1 \cdot 2 = 2$

$$x_2 = 0$$

Entsprechend berechnet man x_1: $x_1 = 3$

Der **Lösungsvektor** lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Matrixschreibweise (heißt Addition)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & -10 \end{array}\right) \quad \cdot(-1) \quad \cdot 4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \end{array}\right) \quad \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$$ **Dreiecksform**

Die letzte Zeile der erweiterten Dreiecksmatrix entspricht $-4x_3 = -8$

$$x_3 = 2$$

Die zweite Zeile entspricht $2x_2 + x_3 = 2$

$$2x_2 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 3$$

Bemerkung: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ heißt **Koeffizientenmatrix.**

Die Matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & -10 \end{array}\right)$ heißt **erweiterte Koeffizientenmatrix.**

Jede Zeile in der erweiterten Koeffizientenmatrix entspricht einer Gleichung.

Beachten Sie: Ein LGS ist **eindeutig lösbar,** wenn **alle Diagonalelemente in der Dreiecksform ungleich null** sind.

$\vec{x} = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)^T$ ist Lösung des LGS, wenn das Einsetzen in **alle Gleichungen** des LGS jeweils eine wahre Aussage ergibt.

Was man beim Auflösen von linearen Gleichungssystemen beachten sollte

1. Additionsverfahren

a) Das LGS ist gegeben durch die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\,(3) \\ \\ \cdot\,(2) \end{array}$$

Auflösung durch Additionsverfahren

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Das LGS hat den Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beachten Sie: Das **Vielfache einer Gleichung (Zeile)** darf zu einer anderen Gleichung (Zeile) addiert werden.

b) Das LGS ist gegeben durch die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 17 & 2 & 0 & 13 \\ 9 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Auflösung durch Additionsverfahren:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 17 & 2 & 0 & 13 \\ 11 & 6 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\,(-3) \\ \\ \end{array}$$

Umformung in die erweiterte Dreiecksform:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 17 & 2 & 0 & 13 \\ -40 & 0 & 0 & -40 \end{array}\right)$$

Das LGS hat den Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Elimination von x_3 bedeutet einen **geringeren Rechenaufwand.**

2. Was man bei der Multiplikation mit null beachten sollte

Beispiel: Das gegebene LGS ist eindeutig **lösbar.**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\,\mathbf{0} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

Das LGS **bleibt eindeutig lösbar.**
Erlaubte Umformung,
Äquivalenzumformung

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\,\mathbf{0} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Das neue LGS ist **mehrdeutig lösbar.**
Keine Äquivalenzumformung!

3. Zeilentausch

Das LGS ist gegeben durch

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Zur **Umformung** in die erweiterte obere Dreiecksform ist ein **Zeilentausch** notwendig.

Schreibweisen für lineare Gleichungssysteme (LGS)

I. **Lineares Gleichungssystem:** 3 Gleichungen für die Unbekannten x_1, x_2 und x_3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}- 2x_3} &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

II. LGS in der Form der **erweiterten Koeffizientenmatrix (A | $\vec{b}$)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Bemerkung: Jede Zeile in der erweiterten Koeffizientenmatrix entspricht einer Gleichung.

III. Lineares Gleichungssystem **als Matrizengleichung**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In Kurzform: $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

A ist die **Koeffizientenmatrix;** $\vec{x}$ ist der **Lösungsvektor.**

Zur Lösung mit dem **Eliminationsverfahren nach Gauß** wird (**A** | $\vec{b}$) in die **erweiterte Dreiecksform** (**A*** | $\vec{b}$*) umgeformt: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 22 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

2. Welcher der Vektoren (– 3 – 3 0) oder (0 – 3 – 1) ist Lösung von

$$\left|\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}\right| \text{?}$$

3. Stellen Sie ein LGS aus zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten auf, das nur die Lösung (4 – 2) hat.

4. Lösen Sie mit dem Gaußverfahren.

a) $\begin{aligned} -2x_1 - 4x_2 \qquad &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 9 \\ x_2 - 3x_3 &= -12 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 18 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 5 \\ 2x + y + z &= 4 \\ 2x + 4y + 3z &= 9 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 3x + 4y + 3z &= 9 \\ 2x + 2y + 3z &= 5 \end{aligned}$

5. Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

a) $\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= -0{,}4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 0{,}8x_1 - 0{,}25x_2 &= 38 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}875x_2 &= 17 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5x_1 \qquad + 5x_3 &= 10 \\ -x_2 - x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad &= 10 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 8x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 240 \\ -2x_1 + 8x_2 - 4x_3 &= 120 \\ -2x_1 - 2x_2 + 8x_3 &= 336 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 400 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 900 \\ x_1 + 3x_2 \qquad &= 500 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 17 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_2 &= x_3 + 2 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 3x + y &= -2x + 4 \\ -x + 5y &= 4y - 2 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 4(x + 5) &= 3(y + 5) \\ 3x - 3 &= 2y - 2 \end{aligned}$

6. Bestimmen Sie die Lösung in Abhängigkeit von t.

a) $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= t \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= t \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 4t \\ -2x_2 + x_3 &= -2t \\ -2x_1 + 9x_2 \qquad &= t \end{aligned}$

7. Es sind $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \\ c & 0{,}5b \end{pmatrix}$ zwei Matrizen $(a, b, c \in \mathbf{R})$.

Welche Werte müssen für a, b und c gewählt werden, damit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$?

8. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $2x + y + z - 3 = 0$, die nur aus nichtnegativen ganzen Zahlen bestehen.

9. Für folgende Matrizen gilt: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 16 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & c & b & a \\ b & 0 & a & a \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 12 & 20 \\ 12 & 34 & 28 & 52 \\ 18 & 64 & 48 & 92 \\ 8 & 10 & 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Werte a, b, c und d.