

$$\operatorname{eq}(a+b)=\operatorname{eq} a \operatorname{eq} b+\sqrt{(\operatorname{eq}^2 a-1)(\operatorname{eq}^2 b-1)}$$

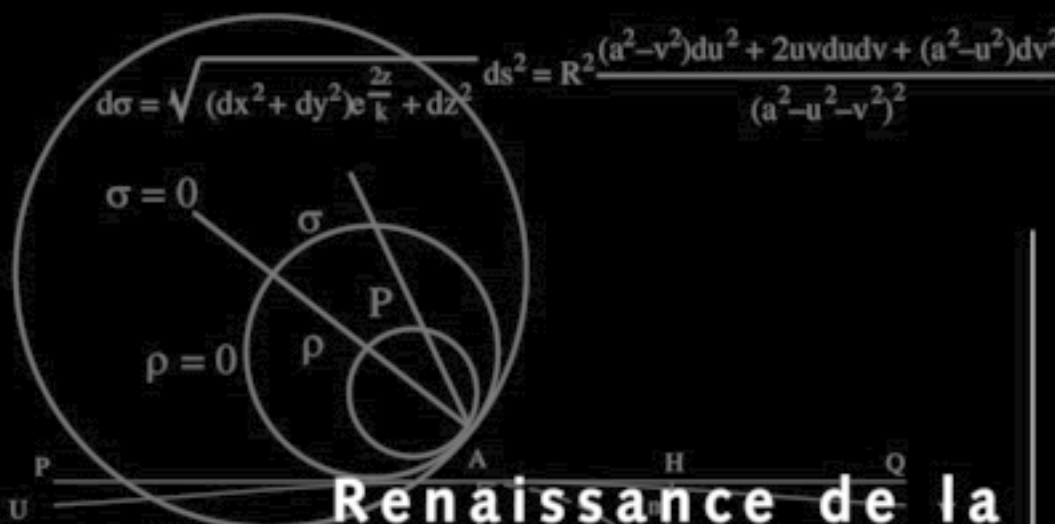
$$\operatorname{circ} R=\frac{M}{2}\left(e^{\frac{2 \pi R}{M}}-e^{-\frac{2 \pi R}{M}}\right)$$

$$\operatorname{eq} R=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2 \pi R}{M}}+e^{-\frac{2 \pi R}{M}}\right)$$

$$d\sigma=\sqrt{(dx^2+dy^2)e^{\frac{2z}{k}}+dz^2}\quad ds^2=R^2\frac{(a^2-v^2)du^2+2uvdudv+(a^2-u^2)dv^2}{(a^2-u^2-v^2)^2}$$

$$\sigma=0$$

$$\rho=0$$



# Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900

Jean-Daniel Voelke

H' E' K B  
Peter Lang

# Table des matières

INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1: RAPPELS SUR LA QUESTION DES PARALLÈLES ET LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE .....	13
§ 1 Origine du problème; quelques tentatives de démonstration du postulatum .....	13
§ 2 Lobatchevski et Bolyai .....	18
§ 3 Les principaux concepts et résultats non euclidiens .....	19
§ 4 Les définitions de la droite et du plan de W. Bolyai .....	25
CHAPITRE 2: INTRODUCTION ÉPISTÉMOLOGIQUE .....	27
§ 1 Les principales positions épistémologiques .....	27
§ 2 L'origine des idées empiristes .....	33
2.1 La preuve astronomique de Lobatchevski .....	33
2.2 Le point de vue de Gauss .....	40
2.3 Le point de vue de Riemann .....	44
PREMIÈRE PARTIE	
LES DÉBUTS DE LA RENAISSANCE DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE	
CHAPITRE 3: LES ORIGINES DE LA RENAISSANCE; LE RÔLE DE GAUSS ET DES PREMIERS TRADUCTEURS .....	49
CHAPITRE 4: HOUËL .....	59
§ 1 Le traducteur .....	60
§ 2 L'axiomaticien et l'épistémologue .....	62
CHAPITRE 5: BATTAGLINI .....	73
§ 1 Le traducteur et le diffuseur .....	73
§ 2 Fondements de la trigonométrie non euclidienne selon Battaglini .....	74

DEUXIÈME PARTIE  
DEUX DÉCOUVREURS TARDIFS DE LA GÉOMÉTRIE  
NON EUCLIDIENNE

INTRODUCTION . . . . .	85
CHAPITRE 6: ETUDES DE MÉCANIQUE ABSTRAITE DE DE TILLY . . . .	87
§ 1 Historique de l'ouvrage . . . . .	87
§ 2 Analyse de la partie mathématique . . . . .	91
2.1 Le point de vue cinématique . . . . .	92
2.2 Equidistante et circonférence . . . . .	96
2.3 «Propriétés cinématiques des triangles rectangles» . . . .	99
2.4 Génération de la circonférence par rotation et glissement . . . . .	99
2.5 Trigonométrie non euclidienne . . . . .	101
2.6 Trigonométrie sphérique . . . . .	103
2.7 Angle de parallélisme . . . . .	103
§ 3 Analyse de la partie mécanique . . . . .	104
3.1 Composition des translations . . . . .	104
3.2 Composition des forces . . . . .	106
§ 4 Analyse de la conclusion . . . . .	107
§ 5 Les réactions . . . . .	109
CHAPITRE 7: ETUDES ANALYTIQUES SUR LA THÉORIE DES PARALLÈLES DE FLYE SAINTE-MARIE . . . . .	111
Introduction . . . . .	111
§ 1 De quelques propriétés des figures infinitésimales . . . . .	115
§ 2 Géométrie plane . . . . .	119
§ 3 Géométrie de l'espace; trigonométrie . . . . .	124
§ 4 Indémontrabilité du postulat . . . . .	126

TROISIÈME PARTIE  
LES PREMIÈRES INTERPRÉTATIONS

CHAPITRE 8: BELTRAMI .....	133
§ 1 Origine de l'interprétation; l'influence de Gauss; la notion de variété chez Riemann .....	134
§ 2 Analyse du <i>Saggio</i> .....	144
2.1 Généralités .....	144
2.2 La surface pseudosphérique .....	146
2.3 Les trois espèces de cercles; les réalisations locales ....	152
§ 3 L'interprétation des espaces non euclidiens à $n$ dimensions; l'influence de Riemann .....	162
§ 4 Le problème de la réalité d'une interprétation .....	167
CHAPITRE 9: LES PREMIÈRES PREUVES DE NON-CONTRADICTION ...	171
§ 1 La preuve de Houël .....	171
§ 2 Une preuve de De Tilly .....	178
§ 3 Les critiques de Genocchi et de Bellavitis; controverses au sujet de la pseudosphère .....	180
§ 4 Une nouvelle interprétation de De Tilly .....	187
CHAPITRE 10: CAYLEY ET KLEIN .....	195
§ 1 Les métriques projectives de Cayley .....	195
§ 2 L'interprétation de Klein .....	207
§ 3 Remarques sur l'histoire de la géométrie elliptique .....	215

QUATRIÈME PARTIE  
LA DIFFUSION DES NOUVELLES IDÉES ENTRE 1870 ET 1900

INTRODUCTION .....	221
CHAPITRE 11: HELMHOLTZ .....	223
§ 1 Les faits qui sont à la base de la géométrie .....	223
§ 2 Les écrits épistémologiques sur la géométrie .....	227

§ 3 Les réactions . . . . .	239
3.1 Krause, Lotze, Dupuis . . . . .	240
3.2 Jevons, Cayley, Land, Günther, Schmitz-Dumont . . . . .	243
3.3 Conclusion . . . . .	249
CHAPITRE 12: FRISCHAUF . . . . .	251
§ 1 Les travaux de Frischauf . . . . .	251
§ 2 Polémiques autour du second livre de Frischauf . . . . .	253
2.1 Les critiques de Killing . . . . .	253
2.2 Critique de Pietzker et réponses de Killing et Frischauf . . . . .	255
§ 3 Autres écrits de Pietzker; le point de vue de Frege . . . . .	257
CHAPITRE 13: LES ANNÉES D'INCERTITUDE EN ALLEMAGNE . . . . .	263
§ 1 Deux manuels en Allemagne vers 1870 . . . . .	263
§ 2 Günther . . . . .	264
2.1 Un essai de démonstration du postulatum . . . . .	265
2.2 Le traité sur les fonctions hyperboliques . . . . .	267
§ 3 Schmitz . . . . .	268
§ 4 Les <i>Vorlesungen</i> de Klein . . . . .	273
CHAPITRE 14: LES ANNÉES D'INCERTITUDE EN FRANCE ET EN BELGIQUE . . . . .	277
§ 1 Renouvier et Liard . . . . .	279
§ 2 Carbonnelle . . . . .	283
§ 3 Tannery . . . . .	288
§ 4 Milhaud . . . . .	296
§ 5 Calinon . . . . .	301
§ 6 Lechalas . . . . .	307
6.1 La conception de la géométrie de Lechalas . . . . .	307
6.2 Les réponses de Renouvier et de l'abbé de Broglie . . . . .	314
6.3 La composante religieuse et morale du débat . . . . .	317
CHAPITRE 15: POINCARÉ . . . . .	321
§ 1 Les interprétations ou modèles de Poincaré . . . . .	321
1.1 Les suppléments à un mémoire de 1880 . . . . .	321
1.2 L'interprétation du demi-plan . . . . .	331

§ 2 Les écrits épistémologiques .....	332
2.1 <i>Sur les hypothèses fondamentales</i> <i>de la Géométrie</i> (1887) .....	333
2.2 <i>Les géométries non euclidiennes</i> (1891) .....	340
§ 3 La controverse entre Russell et Poincaré sur l'empirisme en géométrie .....	347
3.1 La position de Russell .....	347
3.2 Le compte rendu de Couturat et la réponse de Russell .	352
3.3 Le compte rendu de Poincaré .....	356
3.4 Suite de la discussion .....	359
CHAPITRE 16: MANSION ET LA REVUE <i>MATHESIS</i> .....	367
§ 1 Mansion .....	367
§ 2 Une controverse avec Dauge .....	371
CHAPITRE 17: HALSTED .....	377
CHAPITRE 18: LES DERNIÈRES ÉTAPES DU PROCESSUS DE DIFFUSION ..	383
ANNEXES	
I. Les appellations de la géométrie non euclidienne .....	387
II. Notices biographiques .....	391
III. Textes originaux .....	397
BIBLIOGRAPHIE .....	431
INDEX DES NOTIONS ET RÉSULTATS MATHÉMATIQUES .....	453
INDEX DES NOMS .....	455