

2020

Berufliches Gymnasium

Original-Prüfungsausschuss

**MEHR
ERFAHREN**

Baden-Württemberg

Mathematik

- + Offizielle Musteraufgaben
- + Merkhilfe
- + Online-Glossar

ActiveBook
• Interaktives
Training



STARK

Inhalt

Vorwort	
Stichwortverzeichnis	

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik

Ablauf der Prüfung	I
Inhalte des gültigen Lehrplans (eingeführt zum Schuljahr 2014/15)	III
Leistungsanforderung und Bewertung	IV
Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung	VI

Merkhilfe Mathematik (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg)

1 Zahlenmengen	M-1
2 Geometrie	M-1
3 Terme	M-2
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen	M-2
5 Analysis	M-5
6 Stochastik	M-7
7 Vektorgeometrie	M-10
8 Matrizen	M-12

Musterabitur 1 (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg)

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1: Analysis	1
Aufgabe 2: Stochastik	2
Aufgabe 3: Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie	3
Aufgabe 4: Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen	3

Teil 2 – Analysis

Aufgabe 1: $f(x) = -2x^2(x-3)$; $x \in \mathbb{R}$	10
---	----

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 2: Sonnenscheindauer, Näherungsfunktion, Vorhersage	15
Aufgabe 3: Beschleunigungsrennen, Geschwindigkeit, Durchschnittsgeschwindigkeit, Länge der Rennstrecke	18
Aufgabe 4: Gesamtkosten, Erlös, Gewinn, strenge Monotonie, Gewinnzone, geringster Kostenanstieg	21

Teil 3 – Stochastik

Aufgabe 1: Skiort, Sturmtage, Rückerstattung, bedingte Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Vertrauensintervall	24
Aufgabe 2: Skiort, Sturmtage, Rückerstattung, Erwartungswert, maximale Anzahl ..	27

Teil 4 – Lineare Algebra

Wahlgebiet Vektorgeometrie

Rechtwinkliges Dreieck, Pyramide, Ebene, Koordinatenform, Spiegelpunkt	30
--	----

Wahlgebiet Matrizen

Energieversorger, Übergangsmatrix, Kundentreue, stabiler Zustand	34
--	----

Musterabitur 2 (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg)

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1: Analysis	37
Aufgabe 2: Stochastik	38
Aufgabe 3: Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie	38
Aufgabe 4: Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen	38

Teil 2 – Analysis

Aufgabe 1: $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1$; $x \in \mathbb{R}$	46
$g(x) = (x+a) \cdot e^{-x} + b$	

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 2: Strahlung, Absorption, Abschirmung, Materialdicke, Kosten	51
Aufgabe 3: Auktion, Preisfunktion, Verkauf ohne Verlust, Preisanpassung	54
Aufgabe 4: Rennen, Geschwindigkeit, Beschleunigung, zurückgelegte Strecke ...	57

Teil 3 – Stochastik

Aufgabe 1: Glücksrad, Baumdiagramm, faires Spiel, bedingte Wahrscheinlichkeit ..	61
Aufgabe 2: Werkstatt, Angebote, Mindestanzahl, Vertrauensintervall	65

Teil 4 – Lineare Algebra

Wahlgebiet Vektorgeometrie

Abstand Punkt–Ebene, Schnitt Gerade–Ebene, Winkel, Lage von Ebenen	69
--	----

Wahlgebiet Matrizen

Wetterzustände, Übergangsgraph, stabiler Zustand	73
--	----

Schriftliche Abiturprüfung 2017

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1: Analysis	2017-1
Aufgabe 2: Stochastik	2017-2
Aufgabe 3: Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie	2017-2
Aufgabe 4: Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen	2017-3

Teil 2 – Analysis

Aufgabe 1: $f(x) = 0,5x^4 + x^3 + 1$; $x \in \mathbb{R}$	2017-13
$g(x) = 0,5x^4 + x^3 + x^2 + mx + 2$; $x \in \mathbb{R}$	

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 2: Mondphasen, Modellierung, Schaubild, Mittelwert, Parameter	2017-18
Aufgabe 3: Produktlebenszyklus, Phasen, Verkaufszahlen	2017-21
Aufgabe 4: Stoffkonzentration, Zerfall, Schaubild, langfristige Konzentration ...	2017-25

Teil 3 – Stochastik

Aufgabe 1: Elfmeterschießen, faires Spiel, bedingte Wahrscheinlichkeit	2017-28
Aufgabe 2: Rubbellos, Gewinn, Erwartungswert, Standardabweichung, Binomialverteilung, Sigma-Regel	2017-33

Teil 4 – Lineare Algebra

Wahlgebiet Vektorgeometrie

Lage von Ebenen, Normalenform, Abstand Punkt–Ebene, Skalar- und Vektorprodukt, Kreiskegel, Volumen	2017-40
---	---------

Wahlgebiet Matrizen

Produktionsprozess, Rohstoffe, Endprodukte, inverse Matrix, Wasserqualität, Übergangsmatrix, stabiler Zustand	2017-45
--	---------

Schriftliche Abiturprüfung 2018

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1: Analysis	2018-1
Aufgabe 2: Stochastik	2018-2
Aufgabe 3: Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie	2018-2
Aufgabe 4: Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen	2018-3

Teil 2 – Analysis

Aufgabe 1: $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$; $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \int_1^{x^2+1} \sin(2t) dt$; $x \in \mathbb{R}$	2018-12
---	---------

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 2: Drohne, Geschwindigkeit, Schaubild, Weg, Beschleunigung	2018-19
Aufgabe 3: Pflanzenkübel, Modellierung, Masse, Parameter	2018-22
Aufgabe 4: Luftdruck, prozentuale Abnahme, Mittelwert, Interpretation	2018-26

Teil 3 – Stochastik

Aufgabe 1: 10-km-Lauf, bedingte Wahrscheinlichkeit, Vertrauensintervall	2018-29
Aufgabe 2: Pfandflaschen, Mindestanzahl, Binomialverteilung, Erwartungswert, Standardabweichung, Sigma-Regel	2018-34

Teil 4 – Lineare Algebra

Wahlgebiet Vektorgeometrie

Flugzeug, Geschwindigkeit, Abstand Punkt–Ebene, kürzeste Entfernung	2018-39
---	---------

Wahlgebiet Matrizen

Zuschauer, Wechselverhalten, Übergangsdiagramm, Stabilitätsvektor	2018-44
---	---------

Schriftliche Abiturprüfung 2019

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1: Analysis	2019-1
Aufgabe 2: Stochastik	2019-2
Aufgabe 3: Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie	2019-2
Aufgabe 4: Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen	2019-3

Teil 2 – Analysis

Aufgabe 1: $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$	2019-13
$f(x) = x - 1 + e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$	

Anwendungsorientierte Analysis

Aufgabe 2: NO_2 -Konzentration, Modellierung, größte Zunahme, Grenzwert	2019-18
Aufgabe 3: Kanal, Wasserstand, Wasservolumen, Laserstrahl, Tangente	2019-22
Aufgabe 4: Gesamtkosten, Erlös, Gewinnzone, maximaler Gewinn	2019-27

Teil 3 – Stochastik

Aufgabe 1: FSME-Viren, Binomialverteilung, Vertrauensintervall, Interpretation ...	2019-30
Aufgabe 2: Glücksrad, bedingte Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Binomialverteilung	2019-35

Teil 4 – Lineare Algebra

Wahlgebiet Vektorgeometrie

Hauptbahnhof, Rechteck, Flächeninhalt, Winkel, Abstand windschiefer Geraden, Spiegelung eines Punktes an einer Ebene	2019-40
--	---------

Wahlgebiet Matrizen

Skigebiete, Gäste, Wechselverhalten, Übergangsdiagramm, Stabilitätsvektor	2019-46
---	---------



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren! Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Lösungen der Aufgaben:

Jens Hatzenbühler (MA 1: Stochastik, Matrizen, Anwendungsorientierte Analysis 2 und 4; MA 2: Stochastik, Matrizen, Anwendungsorientierte Analysis 2 und 3; 2017–2019: Matrizen)
Ulrich Müller (2017–2019: Stochastik, Vektorgeometrie)
Jürgen Reister (MA 1: Analysis, Vektorgeometrie, Anwendungsorientierte Analysis 3; MA 2: Analysis, Vektorgeometrie, Anwendungsorientierte Analysis 4; 2017–2019: Analysis)

Vorwort


Die Abiturientinnen und Abiturienten eines Beruflichen Gymnasiums in Baden-Württemberg werden in 5 Fächern geprüft. Die Prüfungsfächer 1 bis 4 sind schriftlich, das 5. Prüfungsfach ist nur mündlich¹ abzulegen. Sie können sich auch dazu entscheiden, in einem der schriftlichen Prüfungsfächer eine zusätzliche mündliche Prüfung abzulegen (z. B. um Ihr schriftliches Ergebnis zu verbessern). Die Art der Prüfungsfächer hängt vom Typ des Beruflichen Gymnasiums sowie von Ihrer Wahl der Prüfungsfächer ab. An allen Gymnasien ist jedoch Mathematik als schriftliches Prüfungsfach zwingend vorgeschrieben.

Das vorliegende Buch soll Ihnen helfen, sich optimal auf die **Abiturprüfung in Mathematik** vorzubereiten. Es wendet sich an Abiturienten und Abiturientinnen der Beruflichen Gymnasien:

- AG: Agrarwissenschaftliches Gymnasium
- BTG: Biotechnologisches Gymnasium
- EG: Ernährungswissenschaftliches Gymnasium
- SGG: Sozial- und gesundheitswissenschaftliches Gymnasium
- TG: Technisches Gymnasium
- WG: Wirtschaftswissenschaftliches Gymnasium

Seit dem Abitur 2017 ist der grafikfähige Taschenrechner (GTR) nicht mehr als Hilfsmittel in der Abiturprüfung zugelassen, stattdessen ein wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR), z. B. Casio FX-87 Plus oder TI-30X Plus. Zudem gibt es Aufgaben, die ganz ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind.

Das vorliegende Buch enthält die **Original-Abiturprüfungen 2017 bis 2019** sowie die zwei **offiziellen Musterabitüre** für die Abiturprüfung. Beachten Sie bei der Arbeit mit diesem Buch insbesondere die „Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik“.

Zu allen Aufgaben finden Sie **ausführliche Lösungen**. Die beste Vorbereitung auf das Abitur wäre, die Aufgaben selbstständig zu lösen. Da das vielleicht nicht in jedem Fall reibungslos klappt, haben wir zu jeder Aufgabe  **Hinweise und Tipps** hinzugefügt, die Ihnen den Einstieg in die Aufgabe erleichtern sollen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2020 vom Kultusministerium Baden-Württemberg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter: **www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell**

Wir wünschen Ihnen allen viel Erfolg bei Ihrer Prüfungsvorbereitung und Ihrer Abiturprüfung.

Ihr Autorenteam

¹ Die sogenannte Präsentationsprüfung findet an den Beruflichen Gymnasien ab Abitur 2009 nur im 5., mündlichen Prüfungsfach statt. Genaueres hierzu weiß der Oberstufenberater.

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik

Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

Im Land Baden-Württemberg finden in allen schriftlich geprüften Fächern zentrale Abiturprüfungen statt. Hierzu beauftragt das Ministerium für Kultus, Jugend und Sport in wechselndem Turnus Fachlehrer*innen mit der Erstellung von Prüfungsaufgaben. Die Aufgaben werden bei der sogenannten Aufgabenauswahlkommission eingereicht, von der sie auf sachliche Richtigkeit, Schwierigkeitsgrad, einwandfreie Formulierung und Übereinstimmung mit dem Lehrplan geprüft und in die endgültige Fassung gebracht werden.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben im Fach Mathematik bestehen aus 4 Teilen nach dem folgenden Schema:

Teil	Stoffgebiete	Anzahl der Aufgaben	Auswahl durch Schüler*in	max. erreichbare Korrekturpunkte	Zeitrichtlinie in Minuten
1	Analysis, Stochastik, Lineare Algebra ¹ (Vektorgeometrie bzw. Matrizen)	3	keine	30	90
<i>Hinweis:</i> Zu Beginn der Prüfung werden alle Aufgaben ausgeteilt, getrennt nach Teil 1 und den Teilen 2, 3 und 4 . Für Teil 1 sind <u>keine Hilfsmittel</u> zugelassen (freie Bearbeitungszeit). Nach Abgabe der Aufgabe und Lösung zu Teil 1 erhält der*die Schüler*in die zugelassenen Hilfsmittel. Teil 1 kann dann nachträglich nicht mehr bearbeitet werden.					
2	Analysis	1	keine	20	60
	Anwendungsorientierte Analysis	3	1 Aufgabe	10	30
3	Stochastik	2	1 Aufgabe	15	45
4	Lineare Algebra ¹ (Vektorgeometrie bzw. Matrizen)	1	keine	15	45
			Summe	90	270

1 Die Auswahl der Aufgabe zum Gebiet „Lineare Algebra“ erfolgt durch den*die Fachlehrer*in (je nach unterrichtetem Wahlgebiet). Für das TG ist Vektorgeometrie verbindlich vorgeschrieben.

In der Prüfung gibt es Aufgaben, die **ohne Hilfsmittel** gelöst werden müssen, also ohne Taschenrechner und ohne Merkhilfe. Dieser **Teil 1** besteht aus kurzen, meist nicht zusammenhängenden Aufgaben und dient dazu, grundlegende Fertigkeiten aus den verschiedenen Stoffgebieten zu prüfen. Oft geht es hier auch um das Begründen oder Beschreiben bestimmter Zusammenhänge oder Verfahren.

Die Aufgabenstellungen in den Musteraufgaben und Abiturprüfungen ab 2017 lassen erkennen, dass in den Fachgebieten Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie und Matrizen in diesem Teil vor allem folgende Fähigkeiten und Kompetenzen prüfungsrelevant sind:

Im Bereich **Analysis** geht es vornehmlich um Ableitungen und deren Anwendungen, Integrale einschließlich ihrer Interpretation, Beurteilung von Schaubildern und Eigenschaften von Funktionen, Strategien beim Lösen von Gleichungen. In **Stochastik** werden in erster Linie einfache Zufallsexperimente und Ereignisse, Laplace-Wahrscheinlichkeiten, Baumdiagramme sowie grundlegende Eigenschaften von Zufallsvariablen abgefragt. Bei der **Vektorgeometrie** beinhalten die Aufgaben v. a. Fragen zu Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen, Abstandsberechnungen sowie Lösbarkeit von Gleichungssystemen. Im Bereich **Matrizen** geht es vorwiegend um das Rechnen mit Matrizen und Lösen von Matrixgleichungen sowie einfache Übergangsprozesse.

Zu Beginn der Prüfung werden **alle** Aufgaben an die Schüler*innen ausgeteilt, getrennt nach Teil 1 und den Teilen 2, 3 und 4. Für den **Teil 1** sind **keine Hilfsmittel** zugelassen (freie Bearbeitungszeit). Nach Abgabe der Aufgabe und Lösung zu Teil 1 erhält der*die Schüler*in die in den anderen **Teilen 2, 3 und 4 zugelassenen Hilfsmittel (Taschenrechner und Merkhilfe)**. Teil 1 kann dann nachträglich nicht mehr bearbeitet werden.

In Teil 1 (Lineare Algebra) und Teil 4 erhält der Prüfling nur die Aufgabe aus dem Wahlgebiet (Vektorgeometrie oder Matrizen), das im Unterricht durchgenommen wurde.

Die Reihenfolge der Bearbeitung und der Zeitaufwand pro Aufgabe bleiben dem*der Schüler*in überlassen. Die in der obigen Tabelle angegebenen Zeitrichtwerte sind daher nur als Empfehlung zu verstehen. Eine Pause zwischen den Aufgabenteilen findet nicht statt. Zeit zum Einlesen in die Aufgaben bzw. für die Auswahl einer Aufgabe in den Teilen 2 und 3 (wie bei früheren Abiturprüfungen) ist nicht mehr vorgesehen.

An Hilfsmitteln stehen zur Verfügung:

- die Merkhilfe (außer in Teil 1)
- der eingeführte wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) (außer in Teil 1)
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung sowie Schreib- und Zeichengeräte

Arbeit mit diesem Buch

Zur Orientierung für die Struktur und die konkreten Inhalte der Abiturprüfung dienen die **Abituraufgaben der letzten Jahre** sowie die beiden **offiziellen Musterabiturre**. Mit diesen Aufgaben können Sie sich exakt auf die Prüfungssituation vorbereiten.

Falls Sie bei einer Aufgabe nicht gleich eine Idee zur Lösung haben, helfen Ihnen die **Hinweise und Tipps**, einen Einstieg in die Aufgabe zu finden. Ihre erarbeitete Lösung können Sie mit den abgedruckten **ausführlichen Lösungsvorschlägen** vergleichen.

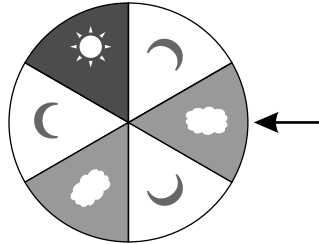
Üben Sie außerdem die Verwendung der Merkhilfe bei der Lösung der Aufgaben in den Teilen 2, 3 und 4; Sie finden die Merkhilfe im Anschluss an diese Seiten oder auf den Seiten des Landesbildungsservers Baden-Württemberg (<http://www.schule-bw.de>).

Die folgende Auflistung gibt einen groben Überblick über die Inhalte des gültigen Lehrplans; für detaillierte Auskünfte steht der ausführliche Lehrplan zur Verfügung². Sie finden diesen auch auf den Seiten des Landesinstituts für Schulentwicklung (<http://www.ls-bw.de>).

Aufgabe 2: Stochastik (Wahlaufgabe)

Punkte

- 2 Das abgebildete Glücksrad besteht aus sechs gleich großen Sektoren. Wird das Glücksrad gedreht, so zeigt der Pfeil beim Stillstand auf genau einen Sektor. Bei einem Fest wird folgendes Spiel angeboten:



Zeigt der Pfeil auf Sonne oder Mond, dreht man ein weiteres Mal. Das Spiel endet, wenn der Pfeil auf Wolke zeigt oder der Spieler das Rad schon dreimal gedreht hat.
Jeder Spieler darf das Spiel nur einmal spielen.

- 2.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

A: Der Spieler dreht dreimal das Glücksrad.

B: Der Spieler dreht das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond.

4

- 2.2 Ein Spiel endet mit Wolke.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler dann keinmal Sonne gedreht hat.

4

- 2.3 Der Besitzer des Glücksrads nimmt vor jedem Spiel einen Euro Einsatz vom Spieler. Immer dann, wenn der Spieler Sonne dreht, bekommt er einen Euro ausgezahlt. Ansonsten geht er leer aus.

$$P(\text{'genau einmal Sonne'}) = \frac{17}{72}$$
$$P(\text{'genau zweimal Sonne'}) = \frac{11}{216}$$

Die Frau des Besitzers hat einige Wahrscheinlichkeiten richtig berechnet und auf einen Zettel geschrieben.

- 2.3.1 Berechnen Sie den Gewinn pro Spiel, den der Besitzer langfristig im Mittel erwarten kann.

4

- 2.3.2 Der Besitzer des Glücksrads fragt sich, wie viele Spieler genau einen Euro ausgezahlt bekommen, wenn genau 140 Spieler das Spiel spielen.

Die Frau des Besitzers meint, es wären mehr als 30, aber weniger als 40.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau des Besitzers recht hat.

$\frac{3}{15}$

Hinweise und Tipps

2 **Tipp:**

Das abgebildete Glücksrad ist in sechs gleich große Sektoren unterteilt, von denen einer das Symbol Sonne (S), zwei das Symbol Wolke (W) und drei das Symbol Mond (M) tragen. Notieren Sie sich die Wahrscheinlichkeiten $P(S)$, $P(W)$ und $P(M)$ beim einmaligen Drehen des Glücksrads.

2.1 **Tipps:**

- Bei Ereignis A wird das Glücksrad dreimal gedreht, das Spiel endet somit nicht vorzeitig. Auf welches Symbol darf der Pfeil entsprechend beim ersten Drehen bzw. beim zweiten Drehen nicht zeigen? Warum ist es egal, welches Symbol der Pfeil bei der letzten Drehung anzeigt? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{WW})$.
- Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ereignis B ist es sinnvoll, das Gegenereignis \overline{B} zu nutzen. Formulieren Sie dieses und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit. Mit $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ erhalten Sie dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

2.2 **Tipps:**

- Hier ist nach der bedingten Wahrscheinlichkeit gefragt, dass unter der Voraussetzung, dass das Spiel mit Wolke endet, der Spieler keinmal Sonne gedreht hat. Wann endet ein Spiel bereits nach einmal Drehen mit Wolke? Wann nach zweimal, wann nach dreimal Drehen? Addieren Sie diese Wahrscheinlichkeiten.
- Endet das Spiel mit Wolke und es wurde nur einmal gedreht, dann muss der Pfeil bereits bei der ersten Drehung Wolke zeigen. Endet das Spiel nach zwei Drehungen mit Wolke und es wurde keine Sonne gedreht, welches Symbol muss dann bei der ersten, welches bei der zweiten Drehung angezeigt worden sein? Endet das Spiel nach drei Drehungen mit Wolke und es wurde keine Sonne gedreht, welches Symbol muss dann bei den ersten beiden Drehungen angezeigt worden sein? Addieren Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser drei möglichen Ausgänge.
- Der Quotient aus beiden Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.

2.3.1 **Tipps:**

- Bei der Berechnung des Gewinns pro Spiel, den der Besitzer langfristig im Mittel erwarten kann, ist nach dem Erwartungswert gefragt. Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable X für die Auszahlung an den Spieler, also aus Sicht des Besitzers. Welche Werte kann diese Zufallsvariable bei maximal drei Drehungen pro Spiel annehmen?
- Die Wahrscheinlichkeiten für „genau einmal Sonne“ bzw. „genau zweimal Sonne“ wurden von der Frau des Besitzers auf einen Zettel geschrieben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „genau dreimal Sonne“? Da die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Werte der Zufallsvariablen zusammen $1 = 100\%$ ergeben, lässt sich die Wahrscheinlichkeit für „keinmal Sonne“ als Differenz berechnen.
- Berechnen Sie mit diesen Wahrscheinlichkeiten und den entsprechenden Werten der Zufallsvariablen den Erwartungswert $E(X)$ für die Auszahlung. Da nach dem zu erwartenden Gewinn gefragt ist, muss der Einsatz von 1 € mit diesem Erwartungswert noch verrechnet werden.

2.3.2 Tipps:

- Hier ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass mehr als 30 und weniger als 40 Spieler genau einen Euro ausgezahlt bekommen. Je Spieler interessieren dabei nur noch die beiden möglichen Ausgänge „der Spieler bekommt genau einen Euro ausgezahlt“ bzw. „der Spieler bekommt nicht genau einen Euro ausgezahlt“. Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable X , die die Anzahl der Spieler angibt, die genau einen Euro ausgezahlt bekommen.
- Diese Zufallsvariable ist binomialverteilt mit dem Stichprobenumfang $n = 140$. Die Trefferwahrscheinlichkeit p findet sich auf dem Zettel der Frau des Besitzers, da einem Spieler genau ein Euro ausgezahlt wird, falls er genau einmal Sonne gedreht hat. Berechnen Sie $P(30 < X < 40) = P(31 \leq X \leq 39)$.

Lösungen

2.1 Berechnen der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Das abgebildete Glücksrad ist in sechs gleich große Sektoren unterteilt, von denen einer das Symbol Sonne (S), zwei das Symbol Wolke (W) und drei das Symbol Mond (M) tragen. Wird das Glücksrad einmal gedreht, so zeigt der Pfeil mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(S) = \frac{1}{6}$ auf Sonne, mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(W) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ auf Wolke und mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(M) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ auf Mond.

Bei Ereignis A endet das Spiel erst nach dreimaligem Drehen, also nicht vorzeitig. Beim ersten bzw. zweiten Drehen darf daher das Symbol Wolke nicht angezeigt werden. Bei der dritten und letzten Drehung ist das Symbol unerheblich.

Da die Wahrscheinlichkeit für Wolke $P(W) = \frac{2}{6}$ ist, ist $P(\overline{W}) = \frac{4}{6}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sonne oder Mond gedreht wird.

Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A:

$$P(A) = P(\overline{W}\overline{W}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{4}{9} = 0,444\ldots$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 44,44 % dreht der Spieler das Glücksrad dreimal.

Ereignis B tritt dann ein, wenn der Spieler das Glücksrad keinmal, einmal oder zweimal auf Mond dreht. Da bei (maximal) dreimaligem Drehen der Spieler (maximal) dreimal Mond drehen kann, tritt das Gegenereignis \overline{B} hierzu genau dann ein, wenn der Spieler das Glücksrad dreimal auf Mond dreht. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Ausgang ist:

$$P(\overline{B}) = P(MMM) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Hiermit errechnet sich die Wahrscheinlichkeit von Ereignis B:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 87,5 % dreht der Spieler das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond.

2.2 Berechnen einer bedingten Wahrscheinlichkeit

Mit den Ereignissen

C: Das Spiel endet mit Wolke.

und

D: Der Spieler dreht das Glücksrad keinmal auf Sonne.

soll die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$ berechnet werden.

Das Spiel endet in den folgenden drei Fällen mit Wolke:

- Wolke bei der ersten Drehung W
- Sonne oder Mond bei der ersten Drehung
und Wolke bei der zweiten Drehung $\overline{W}W$
- Sonne oder Mond bei den ersten zwei Drehungen
und Wolke bei der dritten Drehung $\overline{W}\overline{W}W$

Die Wahrscheinlichkeit $P(C)$ errechnet sich aus diesen drei Fällen mit:

$$P(C) = P(W) + P(\overline{W}W) + P(\overline{W}\overline{W}W) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{27}$$

Das Ereignis $C \cap D$ tritt dann ein, wenn das Spiel mit Wolke endet (C), der Spieler dabei aber zuvor keinmal Sonne gedreht hat. Sollen beide Ereignisse C **und** D ($C \cap D$) eintreten, so sind die oben aufgeführten möglichen Ausgänge dahingehend abzuändern, dass der Spieler vor der Wolke nicht mehr eines der beiden Symbole Sonne oder Mond gedreht hat, sondern wegen „keinmal Sonne“ jeweils das Symbol Mond.

Somit ergibt sich:

$$P(C \cap D) = P(W) + P(MW) + P(MMW) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Mit diesen beiden Wahrscheinlichkeiten erhält man die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{19}{27}} = \frac{63}{76} = 0,828947\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler keinmal Sonne gedreht hat, wenn das Spiel mit Wolke endet, beträgt etwa 82,89 %.

2.3.1 Berechnen des Erwartungswertes $E(X)$ für den Gewinn pro Spiel

Aus der Sicht des Besitzers des Glücksrads wird die Zufallsvariable X definiert als:

X: Betrag in Euro, den der Besitzer an den Spieler auszahlen muss

Immer dann, wenn der Spieler Sonne dreht, bekommt er vom Besitzer einen Euro ausbezahlt. Da bei (maximal) drei Drehungen entweder keinmal, einmal, zweimal oder (maximal) dreimal Sonne gedreht werden kann, nimmt die Zufallsvariable X die Werte 0, 1, 2 bzw. 3 für den Auszahlungsbetrag, den der Besitzer zu zahlen hat, an.

Dem Zettel der Frau des Besitzers sind folgende Wahrscheinlichkeiten zu entnehmen:

$$P(\text{„genau einmal Sonne“}) = P(X = 1) = \frac{17}{72}$$

$$P(\text{„genau zweimal Sonne“}) = P(X = 2) = \frac{11}{216}$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK