

BERNARD BOLZANO - GESAMTAUSGABE

**HERAUSGEGEBEN VON EDUARD WINTER †, JAN BERG,
FRIEDRICH KAMBARTEL, JAROMÍR LOUŽIL, BOB VAN ROOTSELAAR**

REIHE II

NACHLASS

B. WISSENSCHAFTLICHE TAGEBÜCHER

BAND 7

ZWEITER TEIL

MISCELLANEA MATHEMATICA

BERNARD BOLZANO

MISCELLANEA MATHEMATICA 12

HERAUSGEGEBEN

VON

BOB VAN ROOTSELAAR

UND

ANNA VAN DER LUGT

FRIEDRICH FROMMANN VERLAG · GÜNTHER HOLZBOOG

STUTTGART-BAD CANNSTATT 1997

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Bolzano, Bernard:

Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe / hrsg. von Eduard Winter ...
– Stuttgart-Bad Cannstatt : frommann-holzboog.

Reihe 2, Nachlass.

B, Wissenschaftliche Tagebücher.

~~ISBN 3-7728-0074-2~~

NE: Winter, Eduard [Hrsg.]; Bolzano, Bernard: [Sammlung]

Bd. 7.

Teil 2. Miscellanea mathematica. –

12. Hrsg. von Bob van Rootselaar und Anna van der Lugt. – 1997

~~ISBN 3-7728-0483-7~~ 8

NE: Rootselaar, Bob van [Hrsg.]

© Friedrich Frommann Verlag · Günther Holzboog
Stuttgart-Bad Cannstatt 1997

Satzgestaltung und Druck: Offizin Chr. Scheufele, Stuttgart
Einband: Ernst Riethmüller & Co GmbH, Stuttgart

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	7
Editionsbericht	9
Einleitung	11
Miscellanea Mathematica, Heft 12: MM 1027 – MM 1122	25
Nachtrag	193
Bibliographie	195
Personenregister	209
Bolzano's Sachregister MM 1027 – MM 1122 nach Repertorium für Mathematik	212
Sachregister	214
Berichtigung zu Band 2B 7/1	217

VORWORT

Dieser Band enthält eine Transkription des Hefts 12, MM 1027 – MM 1122 der mathematischen Tagebücher Bolzanos, der *Miscellanea Mathematica*. Die Veröffentlichung erfolgt gemäß der pauschalen Genehmigung der Handschriftensammlung der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien vom 2. Januar 1967. Die Originale werden unter den Signaturen Series Nova 3453 (Hefte 1–7), 3454 (Hefte 8–15) und 3455 (Hefte 16–24) in der Handschriftensammlung aufbewahrt. (Vergl. auch BGA E 2/1, S. 28–30.) In der Bernard Bolzano-Gesamtausgabe (BGA) wird dieser Band mit II B 7/2 bezeichnet.

Die Ausgabe ist mit gewissen Ausnahmen, die im Editionsbericht beschrieben werden, gemäß den Editionsprinzipien in BGA Band E 2/1, S. 8–15, hergestellt.

Wir danken Dr. S. J. Suys-Reitsma für die wesentliche Hilfe bei der Bearbeitung der griechischen und lateinischen Textteile.

Den Bibliotheken der Bundesrepublik Deutschland, der ÖNB Wien und den holländischen Bibliotheken danken wir für ihre freundliche Unterstützung bei der Vorbereitung dieses Bands. Insbesondere danken wir Frau Dr. E. Irblich der Handschriftensammlung ÖNB Wien für das Negativ von MM 1107 (S. 167).

Dem redaktionellen Stab des Verlags und besonders Frau M. Jungbauer, die uns bei mehreren Fragen weitgehend unterstützt hat, danken wir für die Sorgfalt, mit der auch dieser Band betreut worden ist.

Die Herausgeber

B. VAN ROOTSELAAR

A. VAN DER LUGT

EDITIONSBERICHT

Das Manuskript ist nach den Editionsprinzipien in BGA E 2/1 wiedergegeben. Daraus ergibt sich eine bestimmte Korrespondenz zwischen Manuskript und gedrucktem Text, die hier zur klaren Übersicht kurz zusammengefaßt und erläutert wird.

Der durchgängige deutsche Text ist in Bolzanos Manuskript in deutscher Schrift geschrieben. Fremdsprachige Teile, Formeln und vereinzelte Buchstaben (besonders zu den Figuren) im Druck sind im Manuskript in lateinischen Buchstaben geschrieben. Einzelne Buchstaben in deutscher Schrift im Manuskript sind im Druck in Fraktur gesetzt. Die im Manuskript unterstrichenen Wörter, Sätze und Formeln sind im Druck kursiv gesetzt. Für Kursivdruck innerhalb der Interpolationsklammern sei auf die Editionsprinzipien hingewiesen. Absätze im Druck entsprechen Absätzen des Manuskripts.

Die am Rande des Manuskripts auftretenden Vertikallinien, geschwungenen Klammern, quer geschriebenen Wörter u.dgl. sind in Fußnoten erläutert worden. Die Figuren sind neu gezeichnet. An mehreren Stellen hat Bolzano kritische Bemerkungen zu eigenem oder fremdem Text in Klammern, versehen mit hochgestellten Zeichen, wie z. B. $^{\circ} ()^{\circ}$, hinzugefügt. Diese Zeichen sind im allgemeinen im Druck unverändert wiedergegeben, manchmal aber haben wir ein anderes Zeichen wählen müssen.

Die in den Formeln vorkommenden Funktionszeichen der speziellen mathematischen Funktionen sind einheitlich durch die heute üblichen ersetzt worden. Die Differentiale sind, wo kein Mißverständnis zu befürchten war, mit d bezeichnet.

Exzerpte aus Büchern und Abhandlungen sind als Paraphrasen betrachtet und nicht als Zitate, obgleich sie bisweilen einem Zitat sehr nahe kommen. Die Zusammenfassungen und Paraphrasen sind, mit Ausnahme von denen aus den Werken von Jungius und Arzberger, geprüft worden und wenn nötig in Fußnoten behandelt. Unklarheiten und störende Fehler, welche sich in Bolzanos Zu-

sammenfassungen eingeschlichen haben, sind ebenfalls in Fußnoten vermerkt worden. Im übrigen ist der Text als Bolzanos eigener Text bearbeitet.

Zuletzt noch eine Bemerkung über die Interpolationen in den Zusammenfassungen. Da die von Bolzano behandelten Bücher im sprachlichen Ausdruck erheblich variieren, war es bei der Auflösung von Bolzanos Kurzschrift öfters notwendig, die Ergänzungen nach den Originalschriften durchzuführen, zumal eine Ergänzung in moderner Rechtschreibung oft unmöglich war. Dieses Vorgehen hat überdies den Vorteil, daß man von der Ausdrucksweise des jeweiligen Verfassers einen Eindruck gewinnt und der Text dadurch natürlicher und lebhafter erscheint.

EINLEITUNG

Dieser in der Gesamtausgabe (BGA) mit 2B 7/2 bezeichnete Band enthält die Transkription des zwölften Heftes der *Miscellanea Mathematica* (MM 1027–1122). Der Inhalt dieses Hefts ist zwischen 3. 1. 1815 (MM 995, Heft 11) und 23. 5. 1815 (MM 1166, Heft 13) (24. 5. 1815 (MM 1167)) entstanden. Aus diesen Datierungen kann man auf eine Entstehungszeit von etwa Anfang Februar bis in die zweite Hälfte April schließen.

In dieser Zeit war Bolzano intensiv beschäftigt mit der Abfassung seines *Binomischen Lehrsatzes*, und mehrere seiner Bemerkungen und Untersuchungen in diesem Heft sind in das Buch eingearbeitet worden.

Der Inhalt setzt sich einerseits aus Auszügen aus Lehrbüchern und anderen Arbeiten mit von der Lektüre unmittelbar angeregten kritischen Bemerkungen und kürzeren Untersuchungen und andererseits aus mehr selbständigen Untersuchungen über Themen seines ständigen Interesses, insbesondere seine Versuche zur Verbesserung des Beweises des binomischen Lehrsatzes, zusammen.

Die Bücher, die in diesem Heft von Bolzano geprüft werden, sind: *Kurze Darstellung der höhern Analysis* (1809) von Textor (MM 1027–1028), *Anfangsgründe der Algebra* von Lacroix in der Übersetzung (1811) von Metternich (MM 1032–1035), *Die Lehre von der Permutation und Combination* (1806) von Jungius (MM 1040–1041), der binomische Lehrsatz im *Mathematischen Wörterbuch* (1803) von Klügel (MM 1041–1045), Aufsätze von Pfaff (MM 1045–1046) über die Lagrangesche Reihenentwicklung und die Umkehrung der Reihen in *Hindenburgs Archiv* (1795), *Complément des Elémens d'Algebre* (1804) von Lacroix (MM 1048), eine Arbeit von Hindenburg über den Taylorschen Satz in *Hindenburgs Archiv* (MM 1055–1056), *Kleine Beyträge zur Mathematik und Physik* (1786) von Busse (MM 1058–1060), *Erleichterter Unterricht in die höhere Meßkunst* (1788) von Bürja (MM 1067–1068), *Vergleichung zwischen Carnots und meiner Ansicht der Algebra* (1804) von Busse

(MM 1068–1071), Aufsätze in *Hindenburgs Archiv* von Klügel über entgegengesetzte Größen (MM 1070–1073), von Kästner über Glenies Antecedental Calculus und über Tangenten und Secanten (MM 1074–1075), von E. G. Fischer über Wegschaffung von Wurzelgrößen (MM 1075–1077), von Pfleiderer über einige Euklidische Definitionen im fünften Buch der Elemente von Euklid (MM 1077–1079), von Pasquich über eine Exponentialrechnung (MM 1079–1083), von Klügel über Kreisberechnung (MM 1083–1085) und ein Auszug aus einem Auszug einer Arbeit von Bürmann über eine vereinfachte Analysis (MM 1085), in dem eine Verallgemeinerung der Lagrangeschen Reihenentwicklung vorkommt (die sogenannte Lagrange-Bürmannsche Formel). Damit ist die Reihe nicht erschöpft, denn es geht weiter mit *The method of Fluxions* von Newton in der Übersetzung (1736) von Colson (MM 1086–1088), *Versuch einer Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen* (1813) von Crelle (MM 1089–1098, 1120–1122), *Grundriß der Algebra* (1815) von Nordmann (MM 1100–1105), *Versuch einer festen philosophischen Bestimmung der ersten Vorstellungen und Grundbegriffe der Größenlehre* (1814) von Kraushaar (MM 1105–1107) und einer Arbeit von Arzberger über eine Sortierwaage (1814) in *Gilberts Annalen der Physik* (MM 1117–1119).

Von den Untersuchungen, die nicht unmittelbar durch die Prüfung von Büchern und Abhandlungen angeregt worden sind, seien die folgenden genannt:

Lehrsätze zur Arithmetik der unendlich kleinen Größen, d. h. Größen »die so klein werden können als man nur immer will« (MM 1028–1029). Betrachtungen über den Begriff der Reihen und ihre Konvergenz (MM 1029, 1047, 1050–1052, 1098–1099, 1102). Herleitung der Formeln für $\cos m\varphi$ und $\sin m\varphi$ ohne Verwendung von imaginären Größen (MM 1030–1031, 1038–1039) und das damit zusammenhängende Problem der Zerlegung in Faktoren von $x^n \pm a^n$, ebenfalls ohne imaginäre Größen (MM 1108–1116). Untersuchungen über die Zulässigkeit von gewissen Substitutionen in Gleichungen (MM 1035–1037). Betrachtungen über entgegengesetzte Größen (MM 1038, 1039–1040, 1047). Beweisversuche, welche mit dem Beweis des binomischen Lehrsatzes zusammenhängen, wovon einige teilweise in die Arbeit *Der binomische Lehrsatz* aufgenommen sind, z. B. in § 29, der Beweis eines Satzes über Funktionen (MM 1052–1053). Ferner Versuche, den Taylorschen Satz aus dem binomischen zu beweisen (MM 1056–1058, 1060–1067) und eine Betrachtung über den Begriff des Mittelpunktes (1099–1100).

Im folgenden wird auf einige der Untersuchungen und kritischen Bemerkungen Bolzanos etwas näher eingegangen. Dabei werden die Themen allgemeine

Geometrie, höhere Geometrie, Algebra, allgemeine Mathematik, Analysis, Mechanik und Methodologie unterschieden.

Allgemeine Geometrie

Wiederholt hat Bolzano sich damit beschäftigt, den Begriff des Mittelpunktes einer Figur festzulegen, und zwar geometrisch oder analytisch. MM 1099: Geometrie. Begriff des Mittelpunkts, fängt Bolzano mit folgender Definition an: Der eigentliche Begriff des Mittelpunktes eines räumlichen Dinges ist der Begriff eines Punktes von der Beschaffenheit, daß jede gerade Linie durch ihn auf der einen Seite so wie auf der anderen liege; oder daß von je 2 entgegengesetzten Richtungen durch diesen Punkt die eine ein eben solches Verhältnis zu den Teilen des Dinges habe, wie die andere zu anderen.

Daraus behauptet er folgern zu können, daß der Mittelpunkt einer Linie ein Punkt sei, von dem der Umfang der Linie in je 2 entgegengesetzten Richtungen gleich weit entfernt ist. Dieser Text gehört zum gestrichenen Teil. Daran schließt sich eine mehr analytische Bestimmung an, welche hinausläuft auf die Bedingung $f(x) = -f(-x)$ für eine Linie $y = f(x)$, d. h. wenn (x, y) ein Punkt der Linie ist, dann auch $(-x, -y)$, und auf die Bedingung $F(x, y) = F(-x, -y)$ ($= 0$) für die durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ gegebene Linie (MM 1100). Diese Bedingungen drücken die Punktsymmetrie um den Punkt $(0, 0)$ aus. Für den Fall, daß der Punkt (a, b) »Mittelpunkt« sein soll, gibt Bolzano die Bedingung $F(a + x, b + y) = F(a - x, b - y)$ ($= 0$) an, für Polarkoordinaten die Bedingung $F(\varphi, z) = F(2n\pi - \varphi, -z)$, welche doch wohl lauten sollte $F(\pi + \varphi, z) = F(\varphi, z)$. Die Punkte (φ, z) und $(2n\pi - \varphi, -z)$ liegen gespiegelt zu $\varphi = \pi/2$.

Die Versuche, eine Erklärung des Mittelpunkts eines Punktsystems zu geben, bilden in den MM eine lange Geschichte, die hier kurz erwähnt sei.

In MM 4¹ sucht er den allgemeinen Satz zu beweisen, daß es zu jedem Punktsystem einen Punkt gibt, der aus allen Punkten des Systems auf einerlei Art bestimmt werden kann. Dieser Punkt, der nicht immer mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, soll der Mittelpunkt des Systems sein. Den Spezialfall eines Systems von zwei Punkten betrachtet er als sehr wichtig, weil er in diesem Falle meint, aus der Existenz eines Mittelpunkts die Existenz entgegengesetzter Richtungen folgern zu können. In die Definition MM 1099 geht umgekehrt der Begriff der entgegengesetzten Richtungen ein (vergl. auch MM 597²).

¹ BGA 2B 2/1, S. 26.

² BGA 2B 5/1, S. 51.

In MM 349³ bemerkt er im Zusammenhang mit Ramus, daß die Geometer in jedem System einen Mittelpunkt annehmen, den sie auch Mittelpunkt der Größe nennen. Dieser allgemeine Begriff soll nach Bolzano erst festgelegt werden (für beliebige geometrische Größen). Anschließend gibt er dann dieselbe Definition wie in MM 4: es ist derjenige Punkt, der aus allen bestimmt wird nach einerlei Regel, und folgert daraus unmittelbar: Da zeigt sich dann zunächst, daß der Mittelpunkt bei einem Systeme zweier Punkte derjenige sei, der in der Richtung zwischen ihnen ebenso weit von a wie von b entfernt ist. Den Mittelpunkt in einem Systeme von n Punkten findet man, wenn man etc.

In MM 456⁴ beurteilt Bolzano Ides Definition in den *Anfangsgründen der reinen Mathematik*, ein Mittelpunkt einer Figur sei ein Punkt, von dem jede gerade Linie, die durch ihn geht, auf beiden Seiten gleich weit bis zum Umfange reicht, als richtig, und bei dieser Gelegenheit wirft Bolzano die untergeordnete Frage auf, wie man den geometrischen Schwerpunkt nennen sollte, der, falls es einen Mittelpunkt gibt, mit diesem zusammenfällt. Die Benennung Schwerpunkt betrachtet er als allzu mechanisch.

In der Fortsetzung MM 585ff seiner Kritik an Schultzens *Anfangsgründen der Geometrie*, kommt er in MM 597⁵, anläßlich der Aufgabe, eine gerade Linie zu halbieren, wieder auf die Betrachtung des Mittelpunkts zurück. Der rechte Beweis der Halbierung einer Strecke ist für ihn nicht der gewöhnliche, mittels Kreisbogen, sondern der folgende: »Es gibt entgegengesetzte Richtungen, in welchen man zu gleichen Entfernungen Punkte nehmen kann. Das System dieser Punkte hat einen Mittelpunkt. Also jedes, da jedes dem anderen ähnlich ist«.

Höhere Geometrie

Eine ebene Kurve, deren krümmungsändernde Ursache konstant ist, ist gekennzeichnet durch $dr/ds = C$, wobei r der Krümmungshalbmesser ist. In MM 1098 sucht Bolzano die Linien zu bestimmen, deren krümmungsändernde Ursache sich gleichförmig ändert, d. h. daß das, was sie ändert, konstant ist. Er sucht also die Linien, für die die Ursache der krümmungsändernden Ursache, d. h. d^2r/ds^2 konstant ist. Die Differentialgleichung, die er erhält, ist aber zu kompliziert, und die Integration wird dem Leser überlassen. Er hätte es sich leichter machen können, wenn er erst integriert hätte, um $r(s) = q(s)$, wo $q(s)$

³ BGA 2B 3/2, S. 104, 105.

⁴ BGA 2B 4/1, S. 182.

⁵ BGA 2B 5/1, S. 51.

ein höchstens quadratisches Polynom ist, zu erhalten. Setzt man dann $r(s) = y'(s) / x''(s)$, so erhält man unter Verwendung von $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ und der Substitution $x'(s) = \sin\varphi(s)$, $y' = \cos\varphi(s)$ die allgemeine Formel für $x(s)$ und $y(s)$, deren Auswertung aber nicht so einfach ist. Die Frage ist damit aber grundsätzlich gelöst.

Algebra

In MM 1030 stellt Bolzano sich die Aufgabe, die aus der de Moivreschen Formel $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$ leicht erhältlichen Darstellungen von $\cos m\varphi$ und $\sin m\varphi$ als Summen von Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ohne die Verwendung der imaginären Zahlen zu finden. Für ganze positive Zahlen gibt er für die gemischte Darstellung (d. h. in $\cos$ und $\sin$) den bekannten Beweis durch vollständige Induktion. Seine Absicht ist aber, die Formeln für negative und gebrochene m herzuleiten, wobei er sich überlegt, ob nicht das beim binomischen Lehrsatz gewöhnliche Beweisverfahren verwendet werden könnte (MM 1031).

Um die Arbeit zu reduzieren, sucht er in MM 1038 die eine Formel aus der anderen herzuleiten, und bemerkt dabei, daß die Formeln auch für negative Werte von m bereits bewiesen sind. Offensichtlich greift er dafür zurück auf seine Bemerkung MM 1031, daß die Formeln für $m = -1$ gelten und daß sie für $p + q$ gelten, wenn sie für p und q gelten. Übrigens drückt er sich an dieser Stelle auch noch etwas vorsichtiger aus: »Hiernächst wäre die Richtigkeit der Formel schon für jede negative ganze Zahl erwiesen«.

Beim Problem der Zerlegung in Faktoren von $x^n - a^n$ leitet er aus den Darstellungen in $\cos\varphi$ für die Anfangsglieder die allgemeine Formel für $\cos m\varphi$ her und verweist für den Beweis auf den in MM 1030 erwähnten Beweis durch vollständige Induktion. Doch er fährt fort und erreicht in MM 1114 das Ergebnis: »Diese Formel [die Darstellung von $\cos n\varphi$ durch $\cos\varphi$] gilt für jeden Winkel φ und jeden (ganzzahligen) Werth von n . Sie wird vermuthlich schon bekannt seyn«. Diese Vermutung hat Bolzano bald bestätigt gefunden, wie er in MM 1114 nachträglich mit »Allerdings. S. 1160« andeutet.

Die Seiten MM 1151–1164 (Heft 13) enthalten einen ausführlichen Auszug aus den ersten elf Vorlesungen aus Lagranges *Leçons sur le calcul des fonctions* (Paris 1806).

In der zehnten Vorlesung behandelt Lagrange die Formeln für $\cos mx$ und $\sin mx$, wobei er von den zwei rekurrenten Beziehungen $2\cos x \cos mx = \cos(m+1)x + \cos(m-1)x$ und $2\cos x \sin mx = \sin(m+1)x + \sin(m-1)x$ ausgeht. Die allgemeinen Formeln werden dann ohne weiteres poniert. In der elften Vor-

lesung geht er weiter auf die Herleitung ein und bringt eine Formel für $2\cos m x$ heraus, die für alle ganzen Zahlen m gilt (nicht nur für die positiven). Der Unterschied zu der Bolzanoschen Herleitung liegt in dem Gebrauch imaginärer Zahlen, weshalb Bolzano seine eigene Methode bevorzugt.

Die Beschäftigung mit den Formeln für $\cos m \varphi$ und $\sin m \varphi$ wurden also von der Faktorisierung von $x^n \pm a^n$ veranlaßt. Zur Lösung dieses Problems setzt er $x^n + a^n = (x^2 - 2q x \cos \varphi + q^2)(x^{n-2} + A x^{n-3} + \dots + M x + N)$ und sucht $q, \varphi, A, B, \dots, N$ so zu bestimmen, daß die Gleichung identisch ist (MM 1108, 1111). Durch Ausführung der Multiplikation ergeben sich die Summen von Potenzen von $\cos \varphi$, und nach ausführlicher Rechnung erhält er schließlich die Bedingung $\sin n \varphi = 0$ (MM 1116), womit die Aufgabe gelöst ist. In MM 1135 aber erkennt er, daß die Berechnungen ab MM 1108 überflüssig sind und die Sache einfacher und allgemeiner erledigt werden kann. Dort findet er in § 70 von Röslings *Grundlehren* den Satz, daß $z^2 - 2r z \cos \varphi + r^2$ ein Faktor des Polynoms $A + Bz + Cz^2 + \dots + Nz^n$ mit reellen Koeffizienten ist, wenn die Gleichungen

$$I \quad A + B r \cos \varphi + C r^2 \cos 2 \varphi + \dots + N r^n \cos n \varphi = 0$$

$$II \quad B r \sin \varphi + C r^2 \sin 2 \varphi + \dots + N r^n \sin n \varphi = 0$$

erfüllt sind. Das kann man, unter Benutzung der de Moivreschen Formel, durch Substitution von $z^k = r^k (\cos k \varphi + i \sin k \varphi)$ und Gleich-Null-setzen der reellen und imaginären Teile des Polynoms sehen. Angewandt auf $a^n - z^n$ ($a > 0$) gibt das die Bedingungen

$$a^n = r^n \cos n \varphi \quad \text{und} \quad r^n \sin n \varphi = 0$$

womit die Sache erledigt ist (d. h. $r = a$ und $n \varphi = 2k\pi$).

Allerdings werden in diesem Beweis imaginäre Größen verwendet, doch Bolzano erinnert sich, daß Gauß die Gleichungen I und II sehr kurz und ohne imaginäre Größen hergeleitet hat⁶, womit das Problem durch ausschließliche Betrachtung von reellen Größen gelöst ist.

In MM 1035 stellt Bolzano einen allgemeinen Satz über nicht allgemein gültige Substitutionen auf, welche die Gültigkeit einer Gleichung nicht beeinflussen. Der Gedanke ist, daß, falls eine Substitution zwar nicht für alle Werte der Veränderlichen richtig ist, aber doch für alle die innerhalb gewisser Grenzen liegen, die Endgleichung, wenn der an sich unrichtige Ausdruck darin nicht mehr vorhanden ist, mit der ursprüngliche Gleichung gleichwertig sein wird. Als Beispiel einer solchen Substitution gibt er $x^2 - y \rightarrow (x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})$, bei der es sich nur für $y \geq 0$ um gleichwertige Ausdrücke handelt. Der Beweis ist sehr kurz, aber nicht sehr überzeugend.

⁶ Vergl. C. F. Gauß: *Demonstratio nova* (1799).

Bei einer solchen Substitution soll es laut Bolzano ein sicheres Kennzeichen geben, für welche Werte sie nicht gilt. Ein sicheres Kennzeichen meint er im Fehlen des Merkmals, ob die Substitution erlaubt sei oder nicht, gefunden zu haben. Ein solches Merkmal könnte seiner Meinung nach die Berechenbarkeit des Resultats sein, aber er zweifelt, ob sich das beweisen ließe. Vielmehr glaubt er, daß es zu keinem Beweis irgendeiner Wahrheit nötig sei, seine Zuflucht zu nicht allgemein gültigen oder imaginären Substitutionen zu nehmen.

Im wesentlichen handelt es sich hier aber um eine Scheinfrage, denn wendet man eine nicht allgemeine Substitution an, so ist die Herleitung nur gültig unter derselben Einschränkung, welche für die Substitution gilt. Das Resultat mag allgemeiner gelten, wird dann aber nicht durch die betreffende Herleitung gerechtfertigt.

Ein weiteres Thema, das wiederholt in den MM auftritt, ist die Lehre von den entgegengesetzten Größen⁷. Jetzt, d. h. MM 1038–1039, dreht es sich wieder um die Frage nach der richtigen Definition der Addition, aus der sich die üblichen Rechenregeln herleiten lassen. Mehrere Definitionen werden geprüft, wobei er schließlich die gewöhnliche Erklärung (MM 1039) zustimmend beurteilt. Zum Schluß wird in MM 1047 noch die Unterscheidung zwischen arithmetischer und algebraischer Addition und Subtraktion eingeführt.

Allgemeine Mathematik

Bolzos wichtigste mathematische Beschäftigung in der Zeit dieser Aufzeichnungen war wohl die Verbesserung der üblichen Beweise des binomischen Lehrsatzes. Das Hauptmoment dieser Verbesserung war eine genauere Behandlung der Reihen, vornehmlich die Bestimmung ihrer Konvergenz und damit die Bestimmung des Gültigkeitsbereichs der Binomialformel⁸.

Die Bezeichnung »unendliche Reihe« bedeutet bei Bolzano immer eine endliche Reihe, die ins Unendliche, d. h. immer weiter, fortgesetzt werden kann. Eine Reihe berechnen oder summieren, heißt zu zeigen, daß ihre Summe bei der unbeschränkten Fortsetzung dem Wert einer bestimmten Größe »so nahe kommt als man nur will« (MM 1047). Eine Reihe ist für ihn also eine bestimmte veränderliche Größe⁹ (eine Summe), die, wenn sie aus r Gliedern besteht, auch

⁷ Zum letzten Mal in dem Auszug aus Klügels *Wörterbuch*, MM 838–839 (BGA 2B 6/2, S. 41–42).

⁸ Vergl. B. Bolzano: *Der binomische Lehrsatz*, Prag 1816.

⁹ Vergl. auch B. Bolzano: *Rein analytischer Beweis* ..., Prag 1817, § 1.

wohl mit F_r bezeichnet wird, und wenn ihre Glieder Funktionen von x sind, mit $F(x)_r$ oder $F(x,r)$.

Wann kann man nun unendliche Reihen summieren, d. h. wie kann man an ihnen selbst feststellen, ob sie einem bestimmten Wert zustreben? Auf diese Frage gibt er in MM 1047 eine bemerkenswerte Antwort: »Auch ∞ Reihen, wenn sie nur convergieren, d. h. wenn die Summe ihrer Glieder vom r^{ten} bis $r + s^{\text{ten}}$, so groß man auch s nehmen mag, hat man nur r groß genug genommen, < jede gegebene Größe zu werden vermag, lassen sich genau summieren«¹⁰.

Hier haben wir das sogenannte allgemeine Konvergenzkriterium für Reihen, das nicht recht im Einklang ist mit den oben angeführten zerstreuten Bemerkungen über die Konvergenz der unendlichen Reihen und erst 1817 in der Arbeit *Rein analytischer Beweis* ... veröffentlicht worden ist. Die Entstehungszeit obiger bemerkenswerten Antwort ist ein wenig unsicher. Die mit Bleistift geschriebene Bemerkung ist zwar zweifellos von Bolzanos Hand, aber die Handschrift ist ein wenig verstümmelt. Aus diesen Tatsachen kann man vermuten, daß es sich um eine spätere Einschlebung handelt.

Die Behauptung des Kriteriums ist auch nicht mit einem Beweis versehen, in dem gezeigt wird, daß, falls die Reihe F_r das Kriterium erfüllt, es auch eine Größe F gibt, der die Reihe F_r »so nahe kommen kann als man nur will«. Ferner wird es in der Arbeit *Der binomische Lehrsatz* aus dem Jahre 1816 nicht angewandt. Das ist auch nicht nötig, weil hier der Grenzwert $F(x)$ immer bekannt ist, und er sich darauf beschränken kann zu zeigen, daß $F(x) - F_r(x)$ durch Vermehrung von r beliebig klein gemacht werden kann. Im *Rein analytischen Beweis* (1817) ist die Sache deutlich, denn in § 5 werden die Reihen, welche das Kriterium erfüllen, als eine besonders merkwürdige Klasse eingeführt, und in § 7 wird behauptet, daß es zu einer solchen Reihe eine (und nur eine) Größe gibt, der sie beliebig nahe kommen kann. Im Beweis wird dann gezeigt, daß die Voraussetzung einer unveränderlichen Größe, die von der Reihe angenähert wird, keine Unmöglichkeit enthält, weil man diese Größe beliebig genau bestimmen kann, und das wird dann mit der Behauptung »Es gibt eine reelle Größe der sich die Reihe nähert« gleichgesetzt. Man sollte aber zum Kriterium keine weitere Voraussetzung mehr hinzusetzen.

Es sei noch hingewiesen auf die Bemerkung MM 1055, Z. 11, wo Bolzano, im Zusammenhang mit der Frage nach der Darstellung einer beliebigen Funktion durch eine Reihe, über den Begriff der Stetigkeit folgendes bemerkt: »Aus der Stetigkeit folgt eigentlich nur, daß $f(x + \Delta x) = fx + \omega$ sein müsse, wo ω so klein

¹⁰ Man vergleiche auch MM 816 (BGA 2B 6/1, S. 147).

werden kann, als man nur will, wenn man Δx klein genug nimmt. Nicht aber, daß ω irgend eine positive Potenz von Δx enthalten müsse«. Hier wird das Merkmal also als eine Folge der Stetigkeit betrachtet, aber schon in MM 815¹¹ verwendet er das Merkmal, wie alle anderen, um zu beweisen, daß Funktionen stetig sind, d. h. das Merkmal wird als Definition der Stetigkeit gebraucht.

Daraus kann man aber nicht schließen, daß Bolzano das damals auch so gesehen hat, denn in MM 943¹² (8. 11. 1814) gesteht er über den Begriff der Stetigkeit: »Noch immer bin ich über die eigentliche Erklärung dieses Begriffes nicht im Reinen«. Doch geht er immer mehr in die Richtung, das Merkmal als Definition aufzufassen, wie man z. B. aus MM 1051 ersehen kann, wo er behauptet, daß a^x stetig ist, weil man ω so klein nehmen kann, daß $a^{x+\omega} - a^x$ beliebig klein wird. Man beachte aber auch, was er in MM 1052 in der Hypothese eines Satzes sagt: »Und $F(x + \Delta x)$ kann dem Werthe $F(x)$ so nahe treten, als man will, oder $(F(x + \Delta x) - F(x))/\Delta x$ hat irgend einen endlichen Werth so klein man auch Δx nimmt«. Weil er einsieht, daß die Voraussetzung des Satzes Überflüssiges enthält, wird er in MM 1053 folgendermaßen neu formuliert: wenn die Funktionen $\varphi_r(x)$ für jedes x gegen Null streben, wenn r unbeschränkt wächst, so streben auch die Funktionen $f_r(x, \Delta x) = (\varphi_r(x + \Delta x) - \varphi_r(x))/\Delta x$ gegen Null, wenn r unbeschränkt wächst, so klein man Δx auch nehmen mag. In dieser Allgemeinheit kann der Satz nicht bewiesen werden, denn ist $\varphi_r(x)$ im Intervall $[1, 3/2]$ durch lineare Interpolation der folgenden Werte $\varphi_r(1 + 1/2n) = 1/r$, $\varphi_r(1 + 1/(2n + 1))$ und $\varphi_r(1) = 0$, so ist die Voraussetzung erfüllt, weil für alle x im Intervall gilt $\varphi_r(x) \leq 1/r$ und $f_r(1, 1/2n) = 2n/r$, zu jedem r sich also ein n angeben läßt mit $f_r(1, 1/2n) > 2$, obgleich, wenn x und Δx unverändert bleiben, $f_r(x, \Delta x)$ gegen Null strebt. Wenn man r nicht verändert, dann strebt $f_r(1, \Delta x)$ aber keinem bestimmten Wert zu, wenn Δx gegen Null strebt, d. h. die f_r sind für $x = 1$ nicht differenzierbar und auch nicht stetig.

In einer Note bemerkt Bolzano, daß dieser Satz im *Binomischen Lehrsatz* aufgestellt werden muß. Das hat er auch in § 29 getan. Dabei hat er aber die Voraussetzung des Satzes weiter eingeschränkt, indem er auch verlangt, daß $f_r(x, \omega) = g_r(x) + \Omega$, d. h. daß die Funktionen φ_r differenzierbar sind. Diese Annahme meint er im Beweis in MM 1053 noch ohne weiteres voraussetzen zu können, d. h. ohne sie in die Voraussetzung des Satzes selbst aufzunehmen.

Im Laufe des Beweises im *Binomischen Lehrsatz* zeigt er, daß die g_r stetig sind. Das kann nicht richtig sein, denn es gibt stetige Funktionen $f(x)$, deren Abgeleitete nicht stetig sind. Aus einer solchen Funktion erhält man durch

¹¹ BGA 2B 6/1, S. 145.

¹² BGA 2B 7/1, S. 47.

$f_r = f(x)/r$ Funktionen f_r , die für jedes x mit wachsendem r gegen Null streben, die Abgeleiteten dieser Funktionen sind aber ebenfalls unstetig. Einen so allgemeinen Satz wie in § 29 braucht er jedoch nicht im *Binomischen Lehrsatz*, wo es sich um Potenzreihen handelt. Auf diesem Wege aber kommt man einem analytischen Beweis des binomischen Lehrsatzes aus dem Taylorschen Satz sehr nahe.

Für seinen Satz sieht Bolzano auch eine Anwendungsmöglichkeit im Beweis der Taylorschen Formel. Diese Formel wurde von Taylor durch eine kühne und geistreiche Ausdehnung seiner Differenzenformel hergeleitet¹³, und Bolzano sieht nun eine Möglichkeit, mittels seines Satzes das Taylorsche Vorgehen in einen genauen Beweis umzuwandeln. Zu diesem Zwecke macht er einige Versuche (MM 1056–1058, 1060–1062, 1063–1067), die nicht zum Ziel führen. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten zeigen sich als unüberwindlich.

Analysis

Zur Vorbereitung seiner genaueren Behandlung des binomischen Lehrsatzes gibt Bolzano in MM 1028–1029 eine Übersicht über die Arithmetik der veränderlichen Größen, die »so klein werden können, als man nur immer will«. Solche Größen werden mit ω , Ω , usw bezeichnet. Die Behauptungen sind: $A \cdot \omega = \Omega$, $\omega \pm \omega' = \Omega$, $\omega \cdot \omega' = \Omega$, $\omega^n = \Omega$, wenn n eine positive rationale Zahl ist, $(A + \omega)^n - A^n = \Omega$, für beliebiges n . Ferner der Lehrsatz: Wenn $A + \omega = B + \Omega$ so ist $A = B$, mit dem Beweis, wenn z. B. $A > B$, also $A = B + D$, so wäre $B + D + \omega = B + \Omega$, also $D = \Omega - \omega$, was ungereimt ist. Das sind bekannte Sätze. Für beliebige Funktionen jedoch behauptet er z. B. folgendes: Wenn $A = B + \omega$ und $C = D + \omega'$, so ist $AC = BD + \Omega$, $A/C = B/D + \Omega$, $A^C = B^D + \Omega$. Dabei können die Funktionen auch von der Form $f(x, r)$ sein, wie z. B. ein endlicher Abschnitt einer unendlichen Reihe, wobei er unter einer Reihe eine Größe versteht, »die aus einer willkürlich zu vermehrenden Menge von Gliedern besteht, die nach einem gewissen gegebenen Gesetze gebildet werden sollen«. Mit Ausnahme des letzten sind diese Sätze, versehen mit ausführlicheren Beweisen, in der Arbeit *Der binomische Lehrsatz*¹⁴ aufgenommen.

Zum Schluß sei noch auf zwei Einträge hingewiesen, die Bolzano offenbar als wissenswert betrachtete.

¹³ Für die Idee des Taylorschen Vorgehens siehe MM 1055 und Taylor: *Methodus incrementorum*.

¹⁴ B. Bolzano: *Der binomische Lehrsatz*, Prag 1816. §§ 15–21.

Erstens in MM 1097 die Preisfrage der königlichen Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften für das Jahr 1814, in der nach der expliziten Lösung der Differentialgleichung $y(x)'' + Ny(x) = MX(x)$ gefragt wird, in der M und N Konstanten sind und X eine gegebene Funktion von x. Ich denke aber, daß diese Aufgabe im Jahre 1814 nicht sehr aktuell war, weil sie sich leicht nach Lagrange lösen ließe¹⁵.

Zweitens die in MM 1085 erwähnte Formel von Bürmann für die Reihenentwicklung einer Funktion nach Potenzen einer anderen, in der kurzen Darstellung von Hindenburg¹⁶ im 8ten Heft seines *Archivs* (1798). Laut Hindenburg ist seine Darstellung ein Auszug aus einem Auszuge von Bürmann aus seinem Buche *Essai de calcul fonctionnaire*. Bolzano interessiert sich für den Beweis der Formel, weil Bürmann daraus die Reihenentwicklungen der elementaren Funktion, den Taylorschen Lehrsatz und die Lagrangesche Reihe herleitet. Obgleich Bolzano im voraus vermutet, daß der Beweis nicht richtig sei, hält er es doch für möglich, daran die nötigen Änderungen vorzunehmen, wodurch sich die jeweiligen Bedingungen der Konvergenz der auftretenden Reihen aufstellen ließen.

Mechanik

In dem Auszug aus Busses *Kleinen Beyträgen* beschreibt Bolzano ganz kurz den Inhalt des VI. Beitrags über eine Anwendung des Maupertuischen Prinzips der kleinsten Wirkung¹⁷. Die Wirkung, heißt es in MM 1060, sei die »Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten«.

Das Prinzip und der Begriff der Wirkung waren zu Bolzanos Zeit allgemein bekannt. Maupertius hat die Wirkung 1744¹⁸ so erklärt: »la quantité d'action est proportionelle à la somme des espaces multipliés chacun par la vitesse avec laquelle le corps les parcourt« (m[vds] und das Prinzip so: »la lumière, ..., le chemin qu'elle tient est celui par lequel la quantité d'action est la moindre«. Die Darstellung aus 1746¹⁹ lautet: »La quantité d'action est le produit de la

¹⁵ Vgl. Lagrange *Théorie des fonctions*, § 66, S. 62–63.

¹⁶ Vergl. Hindenburg (4): Versuch einer vereinfachten Analysis. Für eine moderne Darstellung vergleiche z. B. E. T. Whittaker und G. N. Watson: *A course of modern analysis*, 4te Ausgabe, Cambridge 1946, S. 128–130.

¹⁷ F. G. Busse: Rechnungen nach dem Grundsatz der so genannten kleinsten Wirkung, *Kleine Beyträge*, S. 72–78.

¹⁸ Vergl. Maupertuis (1), S. 573.

¹⁹ Vergl. Maupertuis (2), S. 290.

masse des corps, par leurs vîtesse & par l'espace qu'ils parcourent« und »Principe general. Lors qu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible«.

Methodologie

In diesem Bereich bieten die *Miscellanea* manches, was für die Auffassungen Bolzanos nicht unbedeutend ist, insbesondere in bezug auf den Begriff der Möglichkeit, der sogar in der *Wissenschaftslehre* nicht ganz befriedigend ausgearbeitet ist. Betrachten wir z. B. den Kommentar MM 1053–1054 zu der Herleitung der Lösung der Funktionalgleichung für $\sin x$. Dabei verfährt man folgendermaßen: man versucht die Koeffizienten a_i einer Funktion $f(x) = \sum a_i x^i$ so zu bestimmen, daß $f(x)$ die Funktionalgleichung erfüllt. Was hat man damit bewiesen? Im Grunde nur, daß wenn eine Funktion der angegebenen Form die Funktionalgleichung erfüllt, die Koeffizienten so und so beschaffen sein müssen. Im wesentlichen setzt man dabei voraus, daß die Funktion eine Lösung der Gleichung sei, und bestimmt dann, welcher Art eine solche Lösung sein muß, d. h. die daraus hergeleitete Form der Koeffizienten bildet eine notwendige Bedingung dafür, daß die vorausgesetzte Funktion eine Lösung der Gleichung sei. Auch nach Bolzano ist die Sache damit nicht abgetan, denn er meint in diesem Falle, daß man auch umgekehrt zeigen solle, daß die Reihe, die man gefunden hat, auch wirklich die Funktionalgleichung erfüllt. Im wesentlichen liegt darin der Unterschied zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung, was Bolzano sich hier ausnahmsweise bewußt zu sein scheint. Ein besseres Beispiel bildet die sogenannte Bedingungsgleichung der Integrabilität (*équation de condition* von Lagrange) für die Existenz einer Funktion $w = w(x, y, dy, d^2y, \dots, d^{n-1}y)$ derart, daß $dw = v$, wo v eine gegebene Funktion $v = v(x, y, dy, d^2y, \dots, d^ny)$ ist (siehe MM 1120). Die Bedingungsgleichung (MM 1120, Z. 21), die wir kurz mit $B(v)$ bezeichnen, ergibt sich aus der Forderung $dw = v$ durch Berechnung von d^2w und dv und Elimination der Funktion w . Was man nun gezeigt hat, ist folgendes: wenn eine Funktion w die Bedingung $dw = v$ erfüllt, so erfüllt v die Gleichung $B(v)$, d. h. die Gleichung $B(v)$ ist notwendig für die Existenz einer Funktion w mit $dw = v$. Wenn v die Gleichung erfüllt, so ist noch nichts entschieden, und darum bemüht Lagrange sich zu beweisen: wenn v die Gleichung $B(v)$ erfüllt, gibt es auch eine Funktion w mit $dw = v$. Crelle, um dessen Abhandlung es sich hier handelt, gibt diesen Lagrangeschen Beweis, obgleich er ihn für überflüssig hält. Das ist auch die Meinung Bolzanos, der sie dadurch be-

gründet, daß er »es ist möglich« als gleichbedeutend betrachtet mit »es gibt«. Aber dann ist der Beweis oder jedenfalls die Einsicht, daß es eines solchen Beweises bedarf, nicht überflüssig. Der Beweis wäre nach Bolzano nicht überflüssig, wenn Lagrange mit »möglich« nur »problematisch möglich« meint, d. h. daß noch kein Widerspruch erkennbar ist, wenn $B(v)$ gilt, woraus nach Bolzano allerdings noch nicht die »absolute Möglichkeit« folgen würde²⁰.

Eigentlich haben wir es mit derselben Sache zu tun, wie bei der oben genannten Lösung der Funktionalgleichung für $\sin x$, wo Bolzano verlangt, daß man nachher prüfe, ob die gefundene Reihe die Funktionalgleichung erfüllt.

B. VAN ROOTSELAAR

²⁰ Zu Möglichkeitsurteilen vergl. auch B. Bolzano: *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Prag 1810, II §§ 15, 35, 37.

MISCELLANEA MATHEMATICA

B[ei]m h[e]rauszuge, v.[on] Textor. |

Kurze Dars[t][e]ll[un]g d[e]r höh[.eren] Analysis o[der] d[e]r F[un]ction[en]-
l[e]hre nach ihr[e]m | g[e]g[e]n[wa]rtigen Zust[and]e, n[e]bst Anw[endung]
d[e]rs.[elben] auf d[ie] höh[.ere] Geom[etrie], u.[nd] ei[nem] Anh[ang] v.[on]
5 d[em] || Variationscalcul. Z[um] leicht[e]rn V[er]st[änd]n[isse] v[on] Euler's,
Lagrange's, Lacroix's, | u.[nd] a[nderern] gr[öß]ß[ern] W[er]k[en] bearb[eitet]
v.[om] K. Preuß[ischen] Art.[illerie] Hauptm[ann] v.[on] Textor. | Berlin, 1809. |
Vorr[ede] S.[eite] X. D[ie] Analysis bl[oß] nach d[en] entg[egengesetzten]
Oper[ation]en des Diff[erenz]ierens u[nd] | Int[egrierens] e[in]z[u]-
th[e]il[en] schien [ni]cht zw[is]ckm[äß]ig, °(Allerd[ing]s; so w[ie] n[un]d wie
10 d[ie] || Chemie bl[oß] in d[ie] Tr[ennun]g[s]l[ehre] u[nd] V[er]b[ir]d[un]g[s]-
l[e]hre° |

W[enn] $\Delta x, \Delta y$ bis auf Null h[e]rabb[o]m[men], so n[un]t d[e]r V[er]f[asser]
das V[er]h[ältni]ß w[a]s sie | dann z[u] e[in]and[e]r hab[en] $\frac{dy}{dx}$, u.[nd] sie
s[e]bst d[ie]se Null g[e]word[ene]n D[ie]schr[e]ibt | er [mi]t ei[nem]
curs[iv]en dy, dx; u[nter] dy, dx, (wo ein größ[er]es, st[är]k[er]es d[ie]s | d
vorg[e]z[e]h[n]e ist¹) kann m[an] endl[iche] Gr[öß]ß[en] v[er]st[e]h[en], d[ie]
15 [nu]r j[e]n[e]s V[er]h[ältni]ß z[u] e[in]and[e]r || hab[en]. °(G[anz] r[echt],
w[enn] [nu]r Null[en] ein V[er]h[ältni]ß z[u] e[in]and[e]r h[ä]tt[e]n! D[enn]
hab[en] sie es, | so ka[nn] m[an] ja [mi]t ihn[en] s[e]bst, [mi]t dy, dx r[ech]-
n[en], w[a]s br[ä]uch[t es d[e]r Substit[ution] | d[e]r endl[iche]n Gr[öß]ß[en] dy,
dx d[ie] sich wie dy, dx v[er]h[ältni]ß[en]° |

Z[u]r Beantw[ortung] d[e]r Fr[age], ob m[an] sich [un]t[e]r dx im[m]e[r
[nu]r Null vorst[ell]en kö[nn]e, s[ag]t d[e]r V[er]f[asser] | St[ell]t m[an]
20 sich d[ie] F[un]ction $y = fx$ d[urc]h e[ine] Curve constr[uiert] vor, so w[ir]d ||
 $y + \Delta y = fx + \frac{dy}{dx} \cdot dx + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx^2 + \dots$ d[ie] z[u]r Absc[isse] x + dx
g[e]hör[ig]e Ord[inate] | vorst[ell]en. Diese Ord[inate] w[ir]d, w[enn] x
e[ine]rl[ei]bl[e]ibt, bl[oß] v.[on] dx abh[äng]en, u.[nd] d[e]r y | um so näh[er]
k[om]m[en], je kl[ein]e[r] dx, so d[ab] f[ür] dx = 0, ihr Unt[erschied] g[anz]
v[er]schw[in]d[e]t. | Die v.[on] all[en] mögl[ichen] Ord[inate]n y + Δy
z[u]nächst an y lieg[en]de Ord[inate], ist ein B[e]griff, | d[e]r sich [ni]cht
f[est]halt[en] l[äßt] °(ja w[ohl], w[ei]l er wid[er]spr[ech]end ist, ind[em] es
25 k[lein]e || d[e]rgl[iche]n gibt°, u.[nd] d[ie] ob[ig]e R[echt]e ka[nn] k[lein]
Ausdr[uck] dafür g[e]b[en]. Unt[er]d[ess]en w[enn] | m[an] d[ie] Diff[erenz]
z

¹ Im Manuskript ist dieser Unterschied nicht konsequent durchgeführt. Aus dem Kontext ist jedoch deutlich welche Zeichen gemeint sind.

$\Delta y = dx \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx^2 + \dots \right)$ b[e]tr[a]chtet, so sieht m[an], d[a]ß dies[e]lbe | so
 lange dx noch irg[en]d ei[nen] auch noch so kl.[einen] W[e]rth b[e]hält, [ni]cht
 kl[eine]r als $dx \frac{dy}{dx}$ | w[e]rd[en] ka[nn], °(F[a]lsch! sie ka[nn] auch kl[eine]r
 s.[ein] w[enn] $\frac{d^2y}{dx^2}$ neg[a]t.[iv]^a ist – Doch das ist ein kl[eine]s V[e]rseh[en])^o
 M[an] ist | dah[e]r g[e]n[ö]th[i]gt, d[ie]se Gr[en]ze des Abn[e]h[men]s v[on] Δy
 f.[ür] d[ie] Gr[ö]ße s[e]lbst z[u] n[e]hm[en]: || f[o]lg[ich] y + $\Delta y = y + \frac{dy}{dx} \cdot dx$ 30
 f.[ür] d[ie] nächstanlieg[en]de Ord[ina]t[e]. s[e]lbst anz[u]seh[en]! | °(O hem!
 A.[us] d[e]m v[e]worr[enen] Style des V[er]f[assers] konnte m[an] sich schon
 [ni]cht v[ie]l v[e]rspr[echen]. | A.[us] d[ie]s[e]r Auß[e]r[un]g noch w[e]n[i]g-
 g[e]r! Also gibt es doch e[in]e nächstanl[ie]g[en]de Ord.[inate] | u.[nd] d[ie]se ist
 y + $\frac{dy}{dx} \cdot dx$. W[enn] ab[e]r $\frac{dy}{dx} = 0$; s[a]gt er w[e]lt[e]r, so ist es y + $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx^2$.
 War[um] | [m]uß m[an] doch i[mme]r w[e]lt[e]r g[e]h[en]? U.[nd] [n]ur auf ein
 Gl[ie]d? Wie w[enn] alle f[o]lg[en]d[en] = 0 s[in]d? || Hat d[ie] L[inie] 35
 v[ie]ll[e]icht dann gar k[ein]e anlieg[en]de Ord[ina]te? –) |
 W[enn] z e[in]e F[un]ct[i]on v[on] x, u.[nd] y ist, u.[nd] m[an] hat
 $dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy$, wor[in] | $\frac{dz}{dx}$ u.[nd] $\frac{dz}{dy}$ g[e]wisse F[un]ct[i]onen v[on] x, y
 s[in]d: so ka[nn] m[an] [mi]t d[ie]s[e]r Gl[ie]ch[un]g k.[einen] r[e]cht[en]
 Sinn | v[e]rb[inden], w[enn] m[an] dx u.[nd] dy j[e]d[e]s f.[ür] Null a[n-
 n[im]m[t]; d[e]nn m[an] sieht alsd.[ann] [ni]cht, war[um] es | n[ö]th[i]g ist beyde
 Gl[ie]d[e]r im zweyt[en] Th[e]ile beyz[u]b[e]halt[en]. °(Wied[e]r e[in]e an-
 d[er]e An-|| sieht! M.[an] sieht, wie d[e]r V[er]f[asser] schw[a]nkt.) »Soll d[ie] 40
 Gl[ie]ch[un]g ei[nen] Si[nn] hab[en], so [mu]ß m[an] | sich u[n]t[e]r dx
 u.[nd] dy willk[ürliche] Gr[ö]ß[en] vorst[ell]e[n]. W[enn] m[an] alsdann d[ie]
 F[un]ction z | v[on] x u.[nd] y d[urc]h e[in]e kr[umme] Ob[e]rf[läche] construirt,
 1028 so w[ir]d $dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy$. || e[in]e Gl[ie]ch[un]g s.[ein], w[e]lche b[e]i
 d[ie]s[e]r kr[ummen] Ob[e]rf[läche] St[atu]t f[inde]t, u.[nd] w[e]lche, w[enn]
 m[an] sie con-|struirt, ind[e]m m[an] dx, dy f.[ür] d[ie] [mi]t x, y # Coord.[i-
 naten] in d[em] Endp[unk]t v[on] z f.[ür] d[en] | Anf[ang]sp[unk]t n[im]m[t],
 e[in]e d[urc]h d[ie]s[en] P[unk]t g[e]h[en]de B[e]rühr[un]gseb[ene] dar-
 st[e]llt.« – °(| W[e]lt[e]r s[a]gt d[e]r V[er]f[asser] [ni]chts. Da soll J[e]m[an]d
 klug dar[au]s w[e]rd[en])^o ||
 Einleit[un]g. Uib[er] d[en] B[e]g[riff] d[e]r Diff[erenz]t[ial]e. |
 S.[eit]e 3. W[enn] in $\frac{dy}{dx}$, $\Delta x = 0$ w[ir]d, so w[ir]d auch $\Delta y = 0$; m[an] schr[e]ibt
 alsd.[ann] $\frac{dy}{dx}$ u.[nd] n[enn]t d[ie]s[e]s | V[er]h[äl]t[ni]ß das Diff[erenz]t[ial]-
 v[e]r[h[äl]t[ni]ß, wo also dy, dx [nu]r 2 v[er]sch[iedene] Zeich[en] f.[ür] Null |
 s[in]d. Es entst[e]ht [nun] d[ie] Fr[age], wie zw[ischen] 2 zu Null g[e]-

^a Im Manuskript fehlt hier und in Zeile 33 der Exponent 2 im Nenner.

word[ene]n Gr[ö]ß[en] e[in] | V[er]h[ä]lt.[niz] St[a]tt f[in]d[en] kö[nn]e? An
 10 u[nd] f[ür] sich ist d[ie]s[e]s [ni]cht w[ohl] d[e]nk[ba]r. W[enn] || m[an] ab[e]r
 2[e]n v[e]ränd[er]lichen Gr[ö]ß[en] $\Delta y, \Delta x$ e[in]ma[hl] ein V[er]h[ä]lt.[niz] z[u]-
 schr[e]ib[t], so ka[nn] | m[an] f[ür] d[en] F[a]ll, da j[e]de d[e]rs.[elben] = 0
 w[ir]d, k[ein]e *Ausn[ah]me* mach[en]. °(All[er]d[ing]s, d[e]nn | dann sind sie
 [ni]cht m[e]hr vorh[an]d[en].) Dies[e]s erläut[er]t m[an] g[e]w[ö]h[n]l[ich]
 d[urc]h j[e]n[e] | V[er]h[ä]lt.[niz]sse, w[e]lche b.[ei] $\Delta \Delta$, b.[ei]m $\bigcirc$, ... St[a]tt f[ür]-
 d[en], etc. |

°(In d[e]r F[ol]ge s[a]gt d[e]r V[er]f.[asser] »M.[an] ka[nn] sich auch [un]t[e]r
 15 dx, dx, dy, dy s[e]hr kl[ein]e || Gr[ö]ß[en], im Si[n]n[e] des g[e]m.[einen]
 L[e]b[en]s vorst[ell]en.« U.s.w. kurz, er w[e]iß s[e]lbst | [ni]cht, was er
 s[a]g[en] soll. U[nd] das Buch hat s.[einen] Tit[e]l [ni]cht v[e]rd[ie]nt.«° |

1. Abschn[itt]. |

§.3. J[e]de F[unk]tion $y = fx$ ka[nn], w[enn] x um dx w[ä]chst in e[in]e
 R[e]ihe nach st[e]ig[en]d[en] | Pot[en]z[en] v[on] dx v[e]rw[and]el[t] w[e]r-
 20 d[en]. B[e]w[eis] (wie Lag[ran]ge. die R[e]ihe ka[nn] k[ein]e g[e]broch[enen] ||
 Exp[on]enten hab[en], w[e]il etc.)° |

§.5. Wie m[an] d[en] erst[en] Diff[er]en[tia]lcoeffici[en]t[en] (ein g[u]t[e]r
 N[a]hm[e] v[on] x^n , $\lg x$, a^x , $\sin x$, $\cos x$, .. f[in]d[en] kö[nn]e, s[e]tzt d[e]r
 V[er]f.[asser] als b[e]k[ann]t vor[au]s. |

U.s.w. |

26 Das Uibr[ist]e in d[ie]s[e]m Buche ist nach Lagrange etc. ||

Lehrsätze zur Diff[er]en[tia]lrech[nun]g g[e]hörig. |

§.1. Willk[ür]licher S[atz]. E[in]e GröÙe, d[ie] so kl.[ein] w[er]d[en] ka[nn] als
 m[an] [nu]r will, b[e]z[e]ichne m[an] d[urc]h ω , Ω , ω' , Ω' , d[er]gl[eichen] |

§.3. L[e]hrs[atz]. W[enn] A e[in]e endl[iche] Gr[ö]Ùe b[e]z[e]ich[n]e[t], d[ie]
 u[n]v[e]ränd[er]t bl[e]ib[t], w[ä]h[ren]d ω so kl.[ein] w[er]d[en] k[an]n, als
 30 [nu]r will, | so auch $A \cdot \omega = \Omega$ d.h. ka[nn] so kl.[ein] w[er]d[en] als m[an]
 [nu]r will. ||

§.2. L[e]hrs[atz]. $\omega \pm \omega' = \Omega$. d.h. w[enn] 2 Gr[ö]ß[en] ω , ω' beyde z[u]gl[eich]
 so kl.[ein] w[er]d[en] kö[n]n[en], als m[an] [nu]r will, so ka[nn] es | auch ihre
 Su[mme] o[der] Diff[erenz] w[er]d[en].^b |

§.4. L[e]hrs[atz]. $\omega \times \omega' = \Omega$. |

^b In dem Raum zwischen den Zeilen 30 und 37 eine Art Berechnung zur Rechtfertigung
 des Satzes § 5 für einen gebrochenen Exponent, welche zeigen soll, daß $\omega^{\frac{1}{n}}$ mit ω ge-
 gen Null strebt.

§. 5. *L[e]hrs[at]*. ω^n , $w[enn]$ n irg[en]d $e[in]e$ pos.[itive] ($g[an]ze$ $o[der]$ $g[e]br[uchene]$ $Z[a]hl$ $b[e]d[eu]tet$) = Ω |

§. 6. *L[e]hrs[at]*. Also auch $(A.\omega)^n = \Omega$ $A.\omega^\alpha + B.\omega^\beta + C.\omega^\gamma + \dots^c$ ||

35

§. 7. *L[e]hrs[at]*. Auch $(A + \omega)^n - A^n$, n mag pos.[itiv] $o[der]$ neg.[ativ] $s[ein] = \Omega$ |

U. s. w. |

Lehrs[at]. $W[enn]$ $A + \omega = B + \Omega$, wo ω u[nd] Ω so kl[ein] $w[er]d[en]$ kö[n]n[en], als $m[an]$ $[nu]r$ will, $w[a]h[ren]d$ | A, B $[u]nv[e]ränd.[ert]$ bl[e]i[b[en]]: so $[mu]ß$ $A = B$ seyn. $B[e]w[ei]s$. $D[enn]$ wär[e] z. B. $A > B$; also $B + D$; so hätte $m[an]$ $B + D + \omega = B + \Omega$; $D = \Omega - \omega$, $w[e]lch[e]s$ u[n]g[e]r[eim]t, $w[e]i\Omega - \omega$ so kl[ein] || $w[er]d[en]$ ka[nn], als $m[an]$ $[nu]r$ will (§. 2) nicht ab[e]r $D \cdot -^d$ ||

1029

40, 27

L[e]hrs[at]. $W[enn]$ $m[an]$ zw.[ischen] $g[e]wiss[en]$ $Gr[\delta]ß[en]$ $e[in]e$ $o[der]$ $m[e]hr[e]re$ $Gl[e]ich[un]g[en]$ hat, $w[e]lche$ entw.[eder] $v[\delta]ll[i]g$ $g[e]nau$ $o[der]$ doch $[mi]t$ d.[er] $Einschr[än]k[un]g$ | $b[e]st[e]h[en]$, d[a]ß $w[enn]$ d[ie] $Gl[ie]d[e]r$ anz[a]hl d[e]rs.[elben], nach ei.[nem] $b[e]st[imm]t[en]$ $G[e]s[e]tze$ $v[er]m[e]hrt$ $w[ir]d$, d[e]r $Unt[er]sch[ie]d$ zw.[ischen] d[en] | beyd[en] $Th[e]l[e]n$ d[e]r $Gl[e]ich[un]g$ kl[eine]r als j[e]de $g[e]g[e]b[ene]$ $Gr[\delta]ße$ $w[er]d[en]$ ka[nn]: so $w[ir]d$ auch j[e]de a.[us] d[ie]s[en] $Gl[e]ich[un]g[en]$ nach d[en] gelt[en]d[en] $R[e]g[e]ln$ || d[e]r $Alg[e]bra$ abg[e]leitete $Gl[e]ich[un]g$ entw.[eder] $v[\delta]ll[i]g$ $g[e]nau$ s.[ein], $o[der]$ doch $[m]it$ d[e]r $E[ins]chr[än]k[un]g$ $b[e]st[e]h[en]$, d[a]ß | d[e]r $Unt[er]sch[ie]d$ zw.[ischen] ihr[en] beyd[en] $Th[e]l[e]n$ kl[eine]r als j[e]de $g[e]g[e]b[ene]$ $Gr[\delta]ße$ $g[e]macht$ $w[er]d[en]$ ka[nn], $w[enn]$ $m[an]$ | $[nu]r$ d[ie] $Anz[a]hl$ ihr[e]r $Gl[ie]d[e]r$ nach d[e]m schon ob[en] $b[e]st[imm]t[en]$ $G[e]s[e]tze$ so s[e]hr $v[er]m[e]hrt$, als $m[an]$ will. |

50

$B[e]w[ei]s$. Denn d[ie] $s[a]mtl.[ichen]$ $Tr[ans]for[ma]tio[nen]$, wod[urch] d[ie] $Alg[e]b[r]a$ a.[us] $g[e]g[e]bene[n]$ $Gl[e]ich[un]g[en]$ neue bildet, | sind f[ol]g[en]de: sie addirt je 2, $o[der]$ subtr[ah]irt sie || $o[der]$ mult[i]pl.[iziert] d[ie] $e[in]e$ $[m]it$ d.[er] and.[eren], $o[der]$ div.[idiert] sie, $o[der]$ erh[e]bt d[ie] $Gl[ie]d[e]r$ d[e]r $e[in]en$ auf d[en] $Pot[en]z$, d[e]r[en] $Expo[nen]t$ d[ie] $Gl[ie]d[e]r$ d[e]r | and[er]e[n] si[n]d, $o[der]$ zieht solche $W[ur]z[e]ln$, --- | $N[un]$ ist $w[enn]$ $A = B + \omega$ u[nd] $C = D + \omega'$: Auch $A + C = B + D + \Omega$; also d[ie] | $Gl[e]ich[un]g$ $A + C = B + D$ u[n]t[e]r d[e]r im *Lehrs[atze]* ang[e]g[e]b[enen] $Einschr[än]k[un]g$ $g[e]l[t]$ en d. Eb[en]so $A - C = B - D$; | U[nd] $AC = BD + \Omega$; u[nd] $\frac{A}{C} = \frac{B}{D} + \Omega$; u[nd] $A^C = B^D + \Omega$. Denn ||

55

40

^c Diese Formel gehört inhaltlich zu § 5, steht im Manuskript aber ungefähr zwischen den Zeilen 33 und 34.

^d Die restlichen Zeilen 41–45, sowie die Zeilen 1–26 von MM 1029 sind gestrichen.

$A^C = (B + \omega)^{D+\omega} = B^D + (D + \omega)B^{D+\omega-1}\omega + \dots = B^D + D.\omega + \omega'\omega + \dots = B^D + \Omega$. U. s. w. |

N. Hier hab[en] A, B; C, D, .. [ni]cht *const*:[ante] Größ[en] b[e]zeich[ne]t; sond.[ern] *F*[un]ction[en] v.[on] x, y, .. d[er]gl.[eichen] u.[nd] | e[ine] d[e]r- s[e]lb[en] u[n]t[er] A, B; ingl.[eichen] u[n]t[er] C, D noch *üb[e]rd[ie]ß* v.[on] *u[n]b[e]stimm[t]e[r] G[l]e[d]e[r]z[a]hl* v.[on] d.[er] For[m] f(x,r). |

N. M.[an] sollte *F*[un]ction[en] v.[on] u[n]b[e]stimm[t]e[r] u.[nd] nach ei.[nem] g[e]wiss[en] g[e]g[e]b[en]en G[e]s[e]tz[e] z[u] v[e]rm[e]hr[en]d[er] Gl[ie]- d[e]rzahl | eig[en]ds zeichn[en]. Etwa $F^x(x)$. od[e]r $R(x)$ (*Reihe* v[on] x) *E*[in]e
45 *Reihe*^e ist || e[ine] *e*^r *Gr[öß]ß[e]*, d[ie] *a*.[us] e[ine]r *willk.*[ürlich] z[u] v[e]rm[e]h-
r[en]d[en] *M*[enge] v[on] *G*[l]e[d]e[r]n b[e]st[e]ht, d[ie] nach ei.[nem] g[e]w[is]-
s[en] | g[e]g[e]b[en]en *G*[e]s[e]tze *g*[e]bildet w[e]rd[en] soll[en]. |

D[e]r ob[en] auf d[ie]s[e]r S.[e]ite st[e]h[en]de L[e]hrs[a]tz mag w[ohl] [m]it
d[e]r in s.[einem] B[e]w[ei]se z[u] l[e]tz[t] ang[e]hängt[en] B[e]ding[un]g |
w[ahr] s.[ein], [nu]r scheint er [m]ir üb[e]rh[au]pt in d.[er] Wiss.[enschaft]
v.[on] k[eine]r Br[au]chb[a]rk[e]it, u.[nd] höchst[en]s dazu dienl[i]ch | um
z[u] erkl[är]en, wie m[an] auf d[em] bish[er]r[i]g[en] W[eg]e, wo m[an] f.[ür]
50 $(1+x)^n$, $1+nx$...; für $\lg(1+x)$, $x - \frac{x^2}{2} + \dots$ || für e^x , $1+x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$ ohne
R[ück]s.[icht] subst.[ituiert], ob $x < o[der] > 1$ ist, r[i]cht[i]ge R[e]sultate habe
erhalt[en] kö[n]nen ||

1030

M.[an] erhielt sie n[ach]h[er] i[n]mme[r] [nu]r dann, w[enn] m[an] z[u]l[e]tz[t]
wied[er] st[ell]t solche Reih[en] wie | $1 + ny + n \cdot \frac{n-1}{2} y^2 + \dots$, $(1+y)^n$, etc sub-
stituierte. U.[nd] d[a]d[urc]h hob sich d[e]r F[e]hl[e]r auf, es wäre | eb[en]so g[u]t
g[e]w[is]s[en], w[enn] m[an] st[ell]t $(1+x)^n$ beyb[e]halt[en] hätte.² Leitete
m[an] d[urc]h j[ed]e Substitution | $1 + ny + n \dots$ her, so hätte m[an] ohne sie
5 g[e]r[ade]d[e]zu $(1+y)^n$ Erhalt[en]. ||

Es ist d[ie]ß eb[en]so, wie [m]it and.[eren] an sich absurd[en] Op[er]ation[en]
o[der] Substitution[en], | d[ie] sich z[u]l[e]tz[t] w[ie]d[e]r aufh[e]b[en] z.B.
w[enn] st[ell]t $1 + x^2$, $(x + \sqrt{-1})(x - \sqrt{-1})$ g[e]s[e]tzt w[ir]d. |

*Aufg[abe]. Die For[m]eln f[ür] $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ aus $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ ohne $\sqrt{-1}$ z[u]
find[en]. |*

($\cdot$: G[e]w[öl]h[n]l[i]ch g[e]ht m[an] v.[on] d.[er] For[m]el aus $(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^m =$
 $\cos m\varphi + \sin m\varphi\sqrt{-1}$) |

Lehrs[atz]. Für $m = 0, = 1, = 2$ g[e]lt[en] d[ie] Gl[ei]ch[un]g[en] ||

^e Doppelt unterstrichen, sowie »willk.« in Zeile 45.

^f Die Zeilen 45–46 sind vorne durch einen Strich markiert.

² In diesem Zusammenhang wäre $(1+y)^n$ natürlicher.

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi - m \cdot \frac{m-1}{2} \cos^{m-2}\varphi \cdot \sin^2\varphi + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \cos^{m-4}\varphi \sin^4\varphi - \dots |$$

$$\sin m\varphi = m\cos^{m-1}\varphi \cdot \sin\varphi - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \cos^{m-3}\varphi \cdot \sin^3\varphi + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \cos^{m-5}\varphi \sin^5\varphi - \dots |$$

so w[e]t m[an] auch d[ie] Gl[ie]d[e]r d[e]r R[e]h[e] forts[e]tz[en] mag, bricht m[an] sie [nu]r [ni]cht ab, so lange m noch | kl[e]ine[r] als das, w[a]s m[an] im l[e]tzt[e]n F[a]ctor als Coeff.[izient] abzieht. |

B[e]w[e]i[s]. B[e]k[ann]t. ||

15

L[e]hrs[at]z W[enn] d[ie] Gl[ie]ch[un]g[en] des vor[i]g[en] § f[ür] irg[en]d e[inen] b[e]st[imm]t[en] W[e]rth v[on] m g[e]lt[en], so g[e]lt[en] sie auch | f[ür] m + 1. |

B[e]w[e]i[s]. D[en]n es ist $\cos(m+1)\varphi = \cos m\varphi \cdot \cos\varphi - \sin m\varphi \cdot \sin\varphi =$ (nach d[e]r Vor[au]ss[etzung]) |

$$= \cos^m\varphi \cdot \cos\varphi - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \cos^{m-1}\varphi \sin^2\varphi + m \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-3}{4} \cos^{m-3}\varphi \sin^4\varphi - \dots \pm m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \dots \frac{m-r-1}{r} \cdot \cos^{m-r+1}\varphi \sin^r\varphi | - m \cdot \cos^{m-1}\varphi \cdot \sin^2\varphi + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cos^{m-3}\varphi \cdot \sin^4\varphi - \dots \pm m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-r+2}{r-1} \cos^{m-r+1}\varphi \cdot \sin^r\varphi ||$$

20

$$= \cos^{m+1}\varphi - (m+1) \frac{(m)}{2} \cos^{m-1}\varphi \cdot \sin^2\varphi + (m+1) \frac{m}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cos^{m-3}\varphi \sin^4\varphi - \dots |$$

Das allg[e]m[eine] Gl[ie]d ist $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-r+2}{r-1} (1 + \frac{m-r+1}{r}) \cos^{m-r+1}\varphi \cdot \sin^r\varphi = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-r+2}{r-1} \cdot \frac{(m+2)}{r} \cos^{m+1-r}\varphi \cdot \sin^r\varphi | = (m+1) \frac{(m)}{2} \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot \frac{(m+1-r+1)}{r} \cdot \cos^{m+1-r}\varphi \cdot \sin^r\varphi$; w[e]lch[e]s d[ie] For[m]el f[ür] d[en] cos. ist. |

Eb[en]so w[ir]d d[ie] f[ür] d[en] sin[us] g[e]f[un]d[en]. |

L[e]hrs[at]z. Also gelt[en] d[ie] Form[e]ln des e[r]st[en] L[e]hrs[at]zes allg[emein] f[ür] j[e]de g[an]ze pos.[itive] Z[a]hl m. — ||

25

NB. Für e[in]e n[e]g[at]iv[e] o[der] g[e]broch[en]e ab[e]r si[n]d sie h[ier]d[urc]h noch [ni]cht erwies[en].^s || Für solch[e] W[e]rthe v[on] m g[e]lt[en] sie w[o]hl [nu]r w[enn] $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} < \pm 1$ ist. Denn [nu]r in d[ie]s[e]m F[all]e | conv[er]gir[en] die Reihen. Denn d[ie] ob[i]g[en] R[e]h[e]n lass[en] sich auch so ausd[rück]k[en] |

27

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi (1 - m \cdot \frac{m-1}{2} \operatorname{tg}^2\varphi + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \operatorname{tg}^4\varphi - \dots) ||$$

30

$$\sin m\varphi = \cos^m\varphi (m \operatorname{tg}\varphi - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \operatorname{tg}^3\varphi + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \operatorname{tg}^5\varphi - \dots) |$$

Woraus (g[e]l[e]g[en]h[e]itl[ic]h b[e]m[e]rkt) auch f[ür] l[e]g[en]d[e]r L[e]hrs[at]z. |

L[e]hrs[at]z.

$$1031 \operatorname{tg} m\varphi = \frac{m \cdot \operatorname{tg}\varphi - m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \operatorname{tg}^3\varphi + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \operatorname{tg}^5\varphi - \dots^h}{1 - m \cdot \frac{m-1}{2} \operatorname{tg}^2\varphi + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \operatorname{tg}^4\varphi - \dots}$$

^s Die Zeilen 26–28 sind vorne durch einen Strich markiert.

^h Die restlichen Zeilen 33–41 sind gestrichen.

Aufg[abe]. D[ie] T[an]g[en]te des n f[a]ch[en] W[i]nk[el]s d[urc]h d[ie] des e[in]f[a]ch[en] in e[ine]r R[ei]he ausz[u]dr[üc]k[en]. |

Auf[lösung]. Es sey d.[ie] T[an]g[en]te des e[in]f[a]ch[en] W[ink]el[s], x; u[nd] tg nφ = A · x^α + B x^β + C x^γ + .. + R x^θ | so [m]uß d[urc]h Diff[e]r[en]tiation³: n(1 + tg²nφ) = α · A · x^{α-1} + β B x^{β-1} + γ C x^{γ-1} + .. q R x^{θ-1} |

$$\begin{aligned} n + nA^2 \cdot x^{2\alpha} + 2n A B x^{\alpha+\beta} + n B^2 \cdot x^{2\beta} + 2n A C x^{\alpha+\gamma} + 2n B C \cdot x^{\beta+\gamma} + \\ 5 \quad nC^2 x^{2\gamma} + \dots + nR^2 \cdot x^{2\theta} = \alpha \cdot A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \dots + qR x^{\theta-1} \parallel \text{Also}^4 \\ \alpha - 1 = 0, A = n; \beta - 1 = 2\alpha = 2; \beta = 3, B = \frac{n^3}{3}; \gamma - 1 = \alpha + \beta = 4, \gamma = 5; C = \\ \frac{2n \cdot AB + nB^2}{5} = \frac{2n^4}{5 \cdot 3} + \frac{n^4}{5} \parallel \end{aligned}$$

U.[nd] d[ie] Gl[ie]d[e]r übe[r] (q - 1) hi[na]us kö[n]nen e[inan]d[er] [ni]cht m[e]hr gl[e]ich g[e]s[e]tzt w[er]d[en]; sie [m]üss[en] also so kl[e]in w[er]d[en] kö[n]nen, | als m[an] [n]ur will, w[e]lch[e]s [n]ur da[n]n mögl[i]ch ist, w[enn] x ein *echt[e]r Bruch*. - D[a]ß ab[e]r dann d[ie] R[ei]he d[en] | W[e]rth v[on] tg nφ w[ir]kl[i]ch ausd[rüc]ke, [m]uß and[er]swoh[e]r erwies[en] w[er]d[en]. Etwa a.[us] ihr[e]r Uib[e]r[ein]st[immun]g, [m]it d[en] | R[ei]h[en] d[e]r v[or]h[er]g[e]h[en]d[en] L[e]hrs[ä]tze, d[e]r[en] Gült[i]gk[e]it f[ür] ei[nen] g[e]br[äuch]lichen o[der] neg[ativen] Exp[onenten] m[an] ab[e]r noch darth[un] || [mu]ß. |

Um z[u] b[e]weis[en], d[a]ß d[ie] R[ei]h[en] f[ür] sin nφ, cos nφ in ihr[e]r gr[ößt]en Allg[e]m[ein]h[e]it k[e]ine and[er]e | Form hab[en] kö[n]nen, als d[ie] ob[en] ang[e]g[e]b[ene]n; ka[n]n m[an] so v[er]f[a]hr[en]. |

Es sey sin nφ = Ax^α + Bx^β + Cx^γ + .. Rx^θ, wo x = sinφ ist. So ist d[urc]h Diff[e]r[en]tiation | n cos nφ = (αAx^{α-1} + βBx^{β-1} + γCx^{γ-1} + ... + qRx^{θ-1})

$$\begin{aligned} 15 \quad \cos\varphi \text{ u. [nd] noch [ma]hl[is] diff[e]r[en]tirt} \parallel \text{U. [nd] - n}^2 \cdot \sin n\varphi = (\alpha \cdot (\alpha - 1) \\ 19 \quad Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)Bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1)Cx^{\gamma-2} + \dots + q(q-1)Rx^{\theta-2}) \cos\varphi - || - (\alpha \cdot A \cdot \\ 20 \quad x^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \dots + qRx^{\theta-1}) x \parallel \end{aligned}$$

$$\text{Ab[e]r}^5 \cos\varphi = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 \dots - \text{Auch zu umständl[i]ch! - |}$$

G[e]l[e]g[en]h[e]itl[i]ch. Die For[me]ln, w[e]lche d[en] Sin., Cos. d[urc]h ein Prod[uct] ausd[rüc]k[en], b[e]weist Käst[ner] (Anf[ang]sgsr[ünde] d[er] Anal[ysis] des Unendl[ichen] S. 270) g[an]z richtig. |

Kö[n]nte m[an] d[ie] Allg[e]m[ein]gült[i]gk[e]it ob[i]g[e]r Form[e]ln f[ür] sin mφ, cos mφ [ni]cht d[urc]h ähnl[i]che Schlüsse | wie b[eim] Binom[ial]-

³ Diese Gleichung stimmt nicht, weil im linken Glied nach φ differenziert wird und im rechten Glied nach tgφ.
⁴ Die Gleichung für C stimmt nicht.
⁵ Das Zeichen des letzten Glieds der Summe sollte ein Minuszeichen sind.

theor[em] erw[e]i[s]en. Sie g[e]lt[en] *erw[e]i[s]t[i]ch* f. $\bar{u}r$ $n = -1$. $w[enn]$ $tg\varphi < \pm 1$. || F[e]rn[e]r erh[e]llet, d[a]ß $w[enn]$ sie f. $\bar{u}r$ 2 b[e]st[imm]te $W[e]rthe$ p u[n]d q gelt[en] sie auch f. $\bar{u}r$ $(p + q)$ g[e]lt[en] | [mü]ss[en]. Denn, $w[enn]$ p u[n]d q g[an]ze Z[a]hl[en] b[e]deut[en]: so [mü]ss[en] die erst[en] Gl[ie]d[e]r | w[e]lch[e]r S.[umme] d[ie] For[m]e | $\cos(p + q) \varphi = \cos p \cdot \varphi \cdot \cos q \cdot \varphi - \sin p \cdot \varphi \cdot \sin q \cdot \varphi$ gibt, w[enn] m[an] d[ie] W[e]rthe f. $\bar{u}r$ c[o]s p φ , etc. subst.[ituert] | üb[e]r[e]i[n]st[immen]d s.[ein] [m]it denj:[enigen], w[e]lche d[ie] Form[e]l $\cos(p + q) \varphi = \cos^{(p+q)} \varphi + \dots$ gibt. U. s. w. kurz, || g[an]z auf ähnl.[iche] Art, wie b.[eim] Binom[ia]lth.[eorem] g[e]schloss[en] w[ir]d. |

§. Hier nächst wäre d[ie] R[i]cht[i]gk[e]it d[e]r Form[e]l schon f. $\bar{u}r$ j[e]de *neg[at]ive* g[an]ze Z[a]hl erwies[en], | i[m]me[r] un[t]e[r] d[e]r B[e]d[ing]ung, d[a]ß $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = tg\varphi < \pm 1$ sey. ||

§. Es w[ir]d sich w[o]hl auch darth.[un] l[a]ss[en], d[a]ß, $w[enn]$ d[ie] e[in]e v[on] beyd[en] For[m]e[n] f. $\bar{u}r$ | i]rg[en]d ei[n]en W[e]rth v[on] m | gilt, auch d[ie] and[er]e gelte: o[der] d[a]ß $w[enn]$ m[an] d[en] W[e]rth d.[er] ei[n]en = U s[e]tzt, d[e]r W[e]rth d[e]r and.[eren] = $(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}$ sey* || *W[ir]d sich auf eb[en] d[ie] Art darth.[un] l[a]ss[en], wie d[e]r L[e]hrs.[atz] $(1 + px + \dots)(1 + qx + \dots) = 1 + (p + q)x + \dots$ b.[eim] B[i]no[mia]lth[eorem]. D[e]nn $w[enn]$ m e[in]e | g[an]ze Z[a]hl b[e]deutet, so $[\mu]ß (1 - U^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - \cos^2 m\varphi)^{\frac{1}{2}} = \sin m\varphi$ s.[ein] - etc et[c] S.[iehe] 1038 ||

§. Dann ließe sich v[ie]ll[e]cht, um ihre Gült[i]gk[e]it auch f. $\bar{u}r$ $\frac{1}{n}$ z[u] b[e]w[e]i[s]en, (wo n e[in]e g[an]ze pos.[it]ive Z.[ahl] vorst[e]llt) | so z[u] W[e]rke g[e]h[en]. Sey $\cos^{\frac{1}{n}} \varphi - \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \cdot \cos^{\frac{1}{2}-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi \dots = U$; so ist $\frac{1}{n} \cos^{\frac{1}{n}-1} \varphi \cdot \sin \varphi - \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \cdot \cos^{\frac{1}{2}-2} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \dots = (1 - U^2)^{\frac{1}{2}}$. Und, nach ei.[nem] d[e]r vorh[e]rg[e]h.[enden] §., $2U (1 - U^2)^{\frac{1}{2}} = \dots$ ||

1032 U. s. w. ||

Lacroix Algebra. |

Anfangsgr[ün]de d[e]r Alg[e]bra v.[on] S.F. Lacroix. Nach d.[er] 7 t[en] Ausg.[abe] | üb[e]rs.[etzt] [m]it Anm.[erkungen] u.[nd] Zus.[ätzen] v.[on] M. Metternich D.[oktor] d[e]r Phil.[osophie], Prof.[essor] d[e]r M[a]th.[ematik] | u[n]d Phys[ik]. N[e]bst ei.[nem] Anh.[ang] worin d[e]r S[atz]: »a.[us] e[in]e[r] g[e]g[e]benen M[en]ge v[on] F[a]ctor[en], ka[nn] || »das Prod[uct] nach N Weis[en] g[e]bild[e]t w[er]d[en]« v[oll]st[ändig] erw[ies]en ist. Mainz. 1811. | *Vorr[ede]*. Lacroix hat in e[in]e[r] eig[enen] Abh.[andlung] Les essays sur l'Enseignement en général | et sur celui des Mathématiques en particulier, (a.[us] d[e]r Vorr[e]d[e] z[u] s.[einer] Alg[e]bra entst[anden]) | v[ie]l Gut[e]s übe[r]

- L[e]hrm[e]th.[ode] vorg[e]tr[a]g[en]. °(Mich däucht, ich k[enn]e d[ie]ß Gute
a.[us] s.[einer] Geom.[etrie]° |
– D[a]ß d[e]r B[e]w[e]i[s] des S[a]tz[e]s, d[a]ß F[a]ct:[oren] [m]it v[e]ränd.[erter]
Ord[nun]g e[ine]r[e]i[e] Prod[uk]t g[e]b[en], in d[en] Anf[an]gsggr[än]d[en]
10 f[e]hle, || hat z[u]erst d’Alembert er[inner]t. (Euleri Calc.[ulus] Diff.[erentialis]
annot.[atio] ad § 214.) Legendre hat in |s.[einem] groß[en] W[e]rke *Essais sur la*
*Théorie des nombres*⁶ e[inen] B[e]w[e]i[s] z[u] g[e]b[en] g[e]sucht | d[e]r v.[on]
d.[em] des V[er]f.[assers] v[e]rsch[ieden] ist. – G[e]g[e]nw[ä]rtig[e]s ist [nu]r
d[e]r erste Th[e]l; d[e]r 2^{te} | Th[e]l enth[ä]lt d[ie] Anw[andung] d[e]r
Alg[ebra] auf g[erade] u[nd] kr[umme] L[ini]en, d[e]r dritte das *Com-*
p[lemen]t v[on] F[unk]tion[en], | v.[on] v[e]rsch[ie]d[enen] M[eth]od[en]
Gl[e]ich[un]g[en] a[u]fz[u]l[ös]en, v.[om] Newt[on]sch[en] Binom, v.[on]
15 Reih[en] etc – D[e]r V[er]f.[asser] will || auch d[ie]se Th[e]ile üb[er]s[e]tz[en]. |

- §. 8. E[ine] Gl[e]ich[un]g ist d[ie] Gl[e]ichh[eit] 2[e]r Gr[öß]e[ßen]. |
§. 20. S. 41. Ann[erkennung] des Uib[er]s[e]tzers (die Subtr[aktion] neg[ativer]
Gr[öß]e[ßen], wie Kästner. $7 - (-3) = 7 + 3 - 3 - (-3) = 7 + 3$. |
§. 58. a. Metternich u[n]t[er]sch[e]d[e]t e[ine] abs[olute] u[nd] rel[atīve] B[e]-
20 d[eut]un[g] d[e]r Z[e]ich[en] +, –. In d[er] abs[oluten] b[e]z[e]ichn[en] || sie
zu addir[en]de, u.[nd] z[u] subtr[a]h[ie]r[en]de Gr[öß]e[ßen]. – Zwo a.[us] e[ine]r-
l[e]i EINH[eit]en b[e]st[e]h[en]de Z[a]hl[en] o[der] Größ[en] | könn[en] sich
g[egen] e[inan]d[e]r so v[er]halt[en], d[a]ß sich ihre Einh[eit]en w[e]chs[e]ls-
w[eise] z[e]r[nicht]en, w[enn] sie z[u]s[a]m[m]enk[o]m[m]en, u[nd] si[nd]
dah[e]r | so z[u] e[inan]d[e]r, wie d[ie] addit[iv]e u[nd] subtr[a]h[ie]r[en]
Z[a]hl[e]n. (D[ie] B[e]sp[ie]le, d[ie] d[e]r V[er]f.[asser] anführt si[n]d zi[em]-
l[i]ch | unpass[en]d, als Lin[ien] nach ob[en] u[nd] u[n]t[en], v[er]g[an]g[ene]
u[nd] k[ün]ft[ige] Z[eit] Zahl[en] v[on] solch[en] entg[e]g[enge]s[et]zten
Eig[en]s[chaften] w[er]d[en] | [m]it entg[e]g[enge]s[et]zten *Zeich[en]*, d[ie]
ei[nen] [m]it +, d[ie] and[eren] [m]it – aufg[e]nom[m]en. D[ie] Schick-
25 l[i]chk[eit] d[ie]s[e]r Z[e]ich[en] erh[e]ll[e]t d[a]r[au]s, || w[eil] addit[iv]e u[nd]
subtr[a]kt[iv]e Einh[eit]en sich gl[e]ichf[alls] z[e]r[nicht]en. Dieß ist [nun]
d[ie] r[e]l[atīve] B[e]d[eut]un[g] d[e]r | *Zeich[en]* + –. Die Z[e]ich[en] + –
drück[en] also in ihr[e]r r[e]l[atīve]n B[e]d[eut]un[g] *Eig[en]sch[af]t[en]*
d[e]r GröÙe aus, d[ie] | *unabh[ängig] v[on] d[er] GröÙh[eit] n[ur] in Wort[en]*
ang[e]g[e]b[en] w[e]rd[en], u[nd] d[e]r Si[nn] l[e]cht d[a]d[urc]h v[e]r-
st[än]dli[ch] w[ir]d, w[enn] m[an] | d[ie] e[ine] v[on] *zwo entg[egen]g[e]s[et]z-*

⁶ Vergl. Legendre *Essai*, Introduction.