

Andreas Filler,
Matthias Ludwig,
Reinhard Oldenburg (Hrsg.)

Werkzeuge im Geometrieunterricht

Vorträge auf der 29. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 10. bis 12. September 2010 in Marktbreit

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek
La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deutsche Nationalbibliografie; les données bibliographiques détaillées peuvent être consultées sur Internet à l'adresse <http://dnb.d-nb.de>.

Andreas Filler, Matthias Ludwig, Reinhard Oldenburg (Hrsg.)

Werkzeuge im Geometrieunterricht

Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 12. September 2010 in Marktbreit

ISBN 978-3-88120-587-0

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder Zeichnungen vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustimmung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl für die Vervielfältigung durch Fotokopie oder irgendein anderes Verfahren als auch für die Übertragung auf Filme, Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien.

Inhaltsverzeichnis

Editorial	1
Hans-Georg Weigand	
<i>Neue Werkzeuge – neues Denken!?</i>	
<i>Werkzeuge im Geometrieunterricht – Ziele und Visionen 2020</i> 3	
Andreas Filler	
<i>Problemorientierte geometrische Aufgaben – mit oder ohne Computer? ..</i> 19	
Michael Gieding	
<i>Ein Wiki für die Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“</i> 35	
Olaf Knapp	
<i>Voraussetzungen für die Nutzung von DRGS im Unterricht.....</i> 53	
Oliver Labs	
<i>Gleichungen in Bildern.....</i> 73	
Ingmar Lehmann	
<i>Dreiecke im Dreieck</i>	
<i>Vermutungen und Entdeckungen – DGS als Wundertüte</i> 101	
Swetlana Nordheimer	
<i>Geometrische Veranschaulichung und Bruchrechnung</i> 121	
Markus Ruppert, Jan Wörler	
<i>Die Zukunft der Raumgeometrie liegt in Menschenhand – Raumgeometriesoftware und ihre Schnittstellen zum Menschen</i> 149	
Jürgen Steinwandel, Matthias Ludwig	
<i>Die Suche nach der angemessenen Darbietung räumlicher Strukturen – Analyse von Präsentationsformen und Beschreibungsmodell der Körperkomplexität</i> 173	
Hans Walser	
<i>Der Baustein ist das Werkzeug</i> 185	

Inhaltsverzeichnis

Autorenverzeichnis	197
--------------------------	-----

Editorial

Andreas Filler, Matthias Ludwig, Reinhard Oldenburg

Liest man das Wort „Werkzeug“, mag man zunächst an Hilfsmittel oder „Mittel zum Zweck“ denken, bei Werkzeugen im Geometriunterricht sicherlich vorrangig an Bleistift, Zirkel und Lineal sowie den Computer. Der vorliegende Tagungsband behandelt das Thema „Werkzeuge im Geometriunterricht“ wesentlich umfassender; die einzelnen Beiträge gehen auf sehr unterschiedliche Facetten des Begriffs „Werkzeug“, bezogen auf die Mathematik und speziell die Geometrie, ein. Deutlich wird an diesen Facetten das dialektische Verhältnis von Werkzeugen und „Produkten“, wobei „Produkte“ des Geometriunterrichts natürlich hauptsächlich (Er)Kenntnisse und Fähigkeiten sind. Geometrische Kenntnisse und Fähigkeiten können wiederum zu Werkzeugen (für die Geometrie selbst, für andere Bereiche der Mathematik oder natürlich auch für die Welt außerhalb der Mathematik) werden und somit der Gewinnung neuer (Er)Kenntnisse und Fähigkeiten dienen, welche sich ihrerseits eventuell wiederum in Werkzeuge verwandeln können und so weiter.

Der einführende Beitrag zu diesem Band basiert auf dem von *Hans-Georg Weigand* gehaltenen Hauptvortrag auf der Herbsttagung 2010 des Arbeitskreises Geometrie und gibt einen umfassenden Überblick über mathematische Werkzeuge, ihre historische Entwicklung und ihre verschiedenen Funktionen (nicht nur) für den Mathematikunterricht. Wesentliche Aspekte des Begriffs „Werkzeug“, die in dem einführenden Beitrag von Weigand diskutiert werden, finden sich dann anhand konkreter Beispiele in den folgenden Beiträgen wieder.

Im Mittelpunkt der Beiträge von *Swetlana Nordheimer* und von *Oliver Labs* steht der Werkzeugcharakter der Geometrie für Veranschaulichungen arithmetischer Inhalte (speziell der Bruchrechnung) bzw. von Sachverhalten der elementaren Algebra. Hierbei sind innermathematische Vernetzungen von besonderer Bedeutung, und es wird deutlich, dass die Nutzung der Geometrie als Werkzeug gleichzeitig zum Erwerb bzw. zur Vertiefung geometrischer Kenntnisse und Fähigkeiten beitragen kann.

Mit Konstruktions- und Visualisierungswerkzeugen für die Raumgeometrie befassen sich die Beiträge von *Olaf Knapp*, von *Jürgen Steinwandel* und

Matthias Ludwig sowie von *Markus Ruppert* und *Jan Wörler*; auch in dem schon erwähnten Beitrag von *Oliver Labs* treten Werkzeuge für raumgeometrische Veranschaulichungen auf. Während *Steinwandel/Ludwig* Vergleiche der Wirksamkeit klassischer und computergestützter Veranschaulichungen räumlicher Körper anstellen, analysiert *Knapp* dynamische Raumgeometrie-Software unter den Gesichtspunkten Ergonomie und Usability. Einen Überblick über weit in die Zukunft reichende Entwicklungen computerbasierter interaktiver Visualisierungs- und Konstruktionsumgebungen geben *Ruppert/Wörler*.

Der Einsatz dynamischer Geometriesoftware für die Lösung anspruchsvoller geometrischer Probleme wird in den Beiträgen von *Andreas Filler* und von *Ingmar Lehmann* thematisiert. Einerseits wird hierbei aufgezeigt, wie der Computer als „Werkzeug“ Schülern helfen kann, interessante geometrische Zusammenhänge zu entdecken, auf der anderen Seite wird diskutiert, ob die Verwendung des Computers die Herausbildung von Problemlösestrategien fördert oder eher behindert. Auf diese Frage ergeben sich anhand verschiedener Beispiele durchaus kontroverse Antworten.

Michael Gieding befasst sich in seinem Beitrag mit hochschuldidaktischen Fragen, konkret der Nutzung von Möglichkeiten des „Web 2.0“ für eine Lehrveranstaltung „Einführung in die Geometrie“. Er beschreibt, wie sich damit Diskussionsprozesse anregen lassen, die Studierende in stärkerem Maße dazu führen sollen, eigenständig zu Erkenntnissen zu gelangen.

Hans Walser schließlich verwendet einfache geometrische Formen wie Quadrate, gleichseitige Dreiecke und gleichschenklige Trapeze als „Werkzeuge“, um interessante, komplexere geometrische Formen aufzubauen. Ein Beispiel hierfür ist der auch auf dem Umschlag dieses Bandes abgebildete Fibonacci-Stern.

Zusammenfassend meinen wir, dass die Beiträge dieses Bandes vielfältige interessante Facetten von Werkzeugen im Geometriunterricht sichtbar werden lassen. Es zeigt sich auch, dass die vielfältigen Aspekte dieser Thematik noch lange nicht ausdiskutiert sind und viele Fragen einer weiteren Vertiefung bedürfen, so dass sich der Arbeitskreis Geometrie auch zukünftig immer wieder dieses Themengebietes annehmen wird.

Neue Werkzeuge – neues Denken!?

Werkzeuge im Geometrieunterricht

– Ziele und Visionen 2020

Hans-Georg Weigand

Zusammenfassung. Werkzeuge spielten in der historischen Entwicklung der Mathematik eine wichtige Rolle. Ob Zirkel, Lineal, Ellipsenzirkel, Winkelmesser, Abakus, Rechenschieber, Rechenmaschine, Taschenrechner oder Computer, stets waren mit neuen Werkzeugen auch veränderte Arbeitsweisen und damit einhergehend auch neue Denkweisen verbunden. Mit neuen Werkzeugen war häufig auch die Hoffnung verbunden, mathematische Inhalte effizienter, anschaulicher und verständlicher vermitteln bzw. lehren und lernen zu können. Es sollen zunächst derartige Hoffnungen an einigen exemplarisch ausgewählten Werkzeugen rückblickend analysiert und bewertet werden. Dann soll der Frage nachgegangen werden, welche Bedeutung zukünftig – vor allem digitale – Werkzeuge für den Mathematikunterricht, für das Verständnis geometrischer (mathematischer) Inhalte, für das Lehren und Lernen und schließlich auch für die weitere Entwicklung der Geometrie- und Mathematikdidaktik haben können.

Zur Bedeutung von Werkzeugen

"Der Fortschritt der Menschheit dokumentiert sich in seinen Werkzeugen. Werkzeuge sind zum einen Ergebnis von Erkenntnissen, und zum anderen sind neue Erkenntnisse nicht ohne Werkzeuge möglich. Wir sagen oft, dass eine Zeit nicht reif gewesen sei für gewisse Einsichten; häufig müsste es aber heißen, dass die jeweilige Zeit nicht über geeignete Werkzeuge verfügte, um entsprechende Einsichten gewinnen zu können." (Claus 1990, S. 43)

In diesem Zitat des Informatikers Volker Claus wird eine Dualität deutlich, nämlich die Wechselbeziehung zwischen *Werkzeug* einerseits und *Erkenntnis, Einsicht und Fortschritt* andererseits. Im Folgenden wird diese Wechselbeziehung im Hinblick auf die Bedeutung mathematische Werkzeuge für das *Lehren und Lernen von Mathematik* hinterfragt. Es geht also um die *didaktische Bedeutung mathematischer Werkzeuge*.

Dabei gehen wir davon aus, dass der Computer die lange Kette der mathematischen Werkzeuge fortsetzt: Abakus, Ziffernsysteme, Rechenmaschine, Taschenrechner, und dass er das Lehren und Lernen mathematischer Denk- und Arbeitsweisen, die im Mathematikunterricht schon immer wichtig waren, wie strukturiertes Denken, modulares Denken, funktionales Denken, unterstützt und fördert.

Was sind mathematische Werkzeuge?

Ein Werkzeug ist für einen bestimmten Zweck konstruiert. Es verstärkt menschliche Fähigkeiten (wie Hammer, Zange oder Schaufel) oder verleiht dem Menschen neue Fähigkeiten (wie Fernglas, Mikroskop oder Flugzeug). Wir wollen dabei – basierend auf Hischer (2010) – zwischen Werkzeug und Hilfsmittel unterscheiden (auch wenn die Grenzen fließend sind): Werkzeuge sind „vielseitig und ergebnisoffen“ (ebd., S. 39), während Hilfsmittel für einen bestimmten enger ausgelegten Zweck konstruiert sind (wie etwa ein Korkenzieher).

Was sind mathematische Werkzeuge? Dazu gehören zunächst *gegenständliche Werkzeuge* wie Zirkel und Lineal, Geodreieck, Parabelzeichner, Taschenrechner und Computer. Der Werkzeugbegriff kann aber auch allgemeiner gesehen werden. Ein *Algorithmus* kann ein Werkzeug sein, etwa das Newtonverfahren bei der Berechnung einer Nullstelle, oder ein *mathematischer Satz*, wie der Zwischenwertsatz oder Mittelwertsatz, kann als Werkzeug zur Lösung einer Aufgabe herangezogen werden. Auch *Computerprogramme* können als Werkzeuge bezeichnet werden. So nennt etwa Stephan Kaufmann sein Buch über Mathematica: 'Mathematica als Werkzeug', für Henn u. Jock (1993) ist das Computerprogramm CABRI Géomètre ein "Werkzeug des Geistes im Dienste der Mathematik". Schließlich können auch *Schreibweisen* und *Notationen* als Werkzeuge für mathematisches Denken angesehen werden.

(Mathematische) Werkzeuge gibt es also sowohl auf der *gegenständlichen* oder *enaktiven Ebene* (Zirkel, Lineal, Parabelzirkel), der *Objektebene* (Sätze, Algorithmen), als auch auf der *symbolischen Ebene* (Schreibweisen, Notationen). „Reale“ Werkzeuge oder mathematische Instrumente sind zunächst auf der gegenständlichen Ebene vorhanden, sie erzeugen auf der symbolischen Ebene mathematische Objekte (etwa Kurven oder Zahlen), und ihnen liegt eine – technisch umgesetzte – mathematische Idee zugrunde, d. h. sie realisieren einen mathematischen Zusammenhang.

Also: Mathematisches Werkzeuge oder Instrumente

- dienen einem *Zweck*, nämlich dem Erzeugen oder Herstellen mathematischer Objekte, wie z. B. geometrische Kurven oder dem Berechnen bestimmter Zahlen, wie etwa dem größten gemeinsamen Teiler.
- bauen auf einer *mathematischen Idee* auf;