# Inhaltsverzeichnis

## A Wahrscheinlichkeiten

Seite



## B Potenzfunktionen



## C Exponential- und Logarithmusfunktionen



## D Trigonometrie



## E Verhalten ganzrationaler Funktionen

Einige Zufallsexperimente lassen sich nicht mehr durch Baumdiagramme übersichtlich zeichnen und zählen. Um solche Fälle trotzdem bewerten zu können, gibt es allgemeine Zählprinzipien:

Möchte man n Elemente in einer bestimmten Reihenfolge anordnen, bestehen an der ersten Position n Möglichkeiten, an der zweiten Position bestehen n-1 Möglichkeiten, da ja bereits ein Element an der ersten Position festgelegt wurde, usw. Mathematisch ausgedrückt ergibt das: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ (lies: „n Fakultät“)

Es gibt also n! *Permutationen ohne Wiederholung (also keine Elemente gleicher Art treten auf)*. Für den Fall, dass unter den n Elementen k Elemente gleicher Art sind, verbleiben nur noch $\frac{n!}{k!}$ Permutationsmöglichkeiten *(Permutationen mit Wiederholung)*.

**Eine Vierergruppe, bestehend aus zwei Jungs und 2 Mädels, möchte eine Kanufahrt machen. Sie überlegen in welcher Reihenfolge sie sich hinsetzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?**

Die Jugendlichen werden alle in einem Kanu sitzen. Die Möglichkeiten ihrer Sitzreihenfolge bezeichnet man als Permutationen. Diese Anzahl kannst du mit Hilfe der Fakultät bestimmen. Die vier Jugendlichen entsprechen dabei den Elementen n aus der Formel, die vertauscht werden können.

zum Video

$4! = 24$

Wenn man die beiden Jungs und die beiden Mädels je als gleiche „Elemente“ ansieht, reduziert sich die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten wie folgt: $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

**Überlege zunächst welche Elemente als gleich angesehen werden können. Dann kannst du die Permutationen und die möglichen Varianten bestimmen.**

## Übungen

**1.**

Notiere die möglichen Anordnungen aus dem zweiten Teil der Beispielaufgabe.

**2.**

Wie viele Möglichkeiten gibt es, um
**a)** die Ziffern 1 bis 5 anzuordnen?
**b)** die Ziffern 1 bis 6 anzuordnen?
**c)** die Ziffern 1 bis 4 und zweimal die 5 anzuordnen?
**d)** die Ziffern 1 bis 3 und dreimal die 4 anzuordnen?
**e)** die Ziffern 1 und 2 und zweimal die 3 sowie zweimal die 4 anzuordnen?

**3.**

Sophie möchte beim Shoppen in 10 verschiedene Geschäfte, davon sind drei Schuhgeschäfte, zwei Parfümerien und fünf Kleidungsgeschäfte. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt, diese Läden zu besuchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn zwischen den verschiedenen Geschäften einer Art nicht unterschieden wird?

Du suchst die Anzahl, dass bei einem Versuch mit 6 Durchführungen (n=6) 4 zum Erfolg führen. Jetzt markierst du dir im Pascal'schen Dreieck einen der Pfade, der dieses Ereignis beschreibt. Dabei ist es egal, in welcher Reihenfolge die Erfolge E bzw. Misserfolge M geworfen werden:

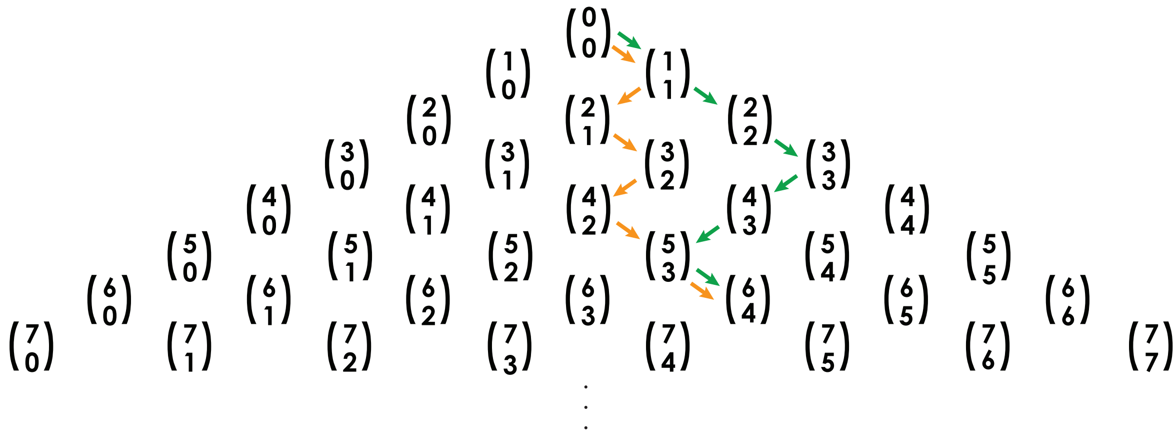
$P(E \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow E) = P(E \rightarrow E \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow E)$

Dabei geht man folgende Pfade ab. Alle starten bei $\binom{0}{0}$

$\binom{0}{0} \rightarrow \binom{1}{1} \rightarrow \binom{2}{1} \rightarrow \binom{3}{2} \rightarrow \binom{4}{2} \rightarrow \binom{5}{3} \rightarrow \binom{6}{4}$

$\binom{0}{0} \rightarrow \binom{1}{1} \rightarrow \binom{2}{2} \rightarrow \binom{3}{3} \rightarrow \binom{4}{3} \rightarrow \binom{5}{3} \rightarrow \binom{6}{4}$

Die obere Zahl erhöht sich stetig um eins. Die untere erhöht sich nur bei Erfolgen. Ein Pfeil nach rechts entspricht also einem Erfolg und nach links einem Misserfolg.



Beide Pfade führen also zu $\binom{6}{4}$. Wenn man diesen Binomialkoeffizienten an der anderen Darstellung des Pascal'schen Dreiecks abliest, sieht man, dass $\binom{6}{4} = 15$ ist . Es gibt also 15 verschiedene Möglichkeiten, die auftreten können. Bei Versuchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit von Erfolg und Misserfolg kannst du die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks bestimmen. Dabei musst du den Binomialkoeffizienten durch die Summe aller Binomialkoeffizienten in dieser Zeile (n = 6) teilen:

$\binom{6}{0} = 1 \quad \binom{6}{1} = 6 \quad \binom{6}{2} = 15 \quad \binom{6}{3} = 20 \quad \binom{6}{4} = 15 \quad \binom{6}{5} = 6 \quad \binom{6}{6} = 1$

Du berechnest dann: $\frac{15}{1+6+15+20+15+6+1} = \frac{15}{64} = 0{,}2344 = 23{,}44\%$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 23,44%.

**Mit dem Pascal'schen Dreieck kann bei Zufallsversuchen schnell die Anzahl der Pfade, die zum Erfolg führen, bestimmt werden. Dabei ist es egal, welchen Weg man im Pascal'schen Dreieck wählt, denn sie führen alle zu demselben Binomialkoeffizienten.**

# 3 Binomialkoeffizient

Bei Zufallsversuchen mit einer großen Anzahl an Durchführungen ist es mühsam, das Pascal'sche Dreieck abzubilden, um eine Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Um jedoch die Anzahl der Möglichkeiten zu ermitteln, kann der zugehörige Binomialkoeffizient berechnet werden. Bei einem Versuch mit n Durchführungen und k Erfolgen gilt die Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

**Bei einem Würfelspiel wird 20 Mal nacheinander gewürfelt. Dabei soll exakt 6 Mal eine 6 auftreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis eintritt?**

zum Video

Die Anzahl der Durchführungen ist 20. Dabei sollen 6 Erfolge eintreten. Der Binomialkoeffizient, der nun bestimmt werden muss ist:

$$\binom{20}{6} = \frac{20!}{(20-6)! \cdot 6!} = \frac{20!}{14! \cdot 6!} = 38760$$

Es gibt also 38760 verschiedene Möglichkeiten, die zu diesem Ereignis führen. Bei Versuchen mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit von Erfolg E und Misserfolg M musst du auch die Pfadwahrscheinlichkeit berücksichtigen, um die gesuchte Gesamtwahrscheinlichkeit zu bestimmen.

$$P(E) = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad P(M) = \frac{5}{6}$$

$$P(\text{Ereignis}) = \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-6}$$

Diese Wahrscheinlichkeit gilt für einen dieser Pfade. Anhand der Summenregel musst du jetzt alle Pfade mit gleichem Ausgang addieren. Du kannst aber auch die Anzahl der Pfade, die der Binomialkoeffizient darstellt, mit der Pfadwahrscheinlichkeit multiplizieren:

$P(\text{6 Erfolge aus 20 Versuchen}) = 1{,}67 \cdot (10)^{-6} \cdot 38760 = 0{,}0647 = 6{,}47\%$

**Mit dem Binomialkoeffizienten bestimmst du die Anzahl der Pfade, die zum Ereignis (hier 6 Erfolge aus 20 Versuchen) führen. Multiplizierst du diese Anzahl mit der Wahrscheinlichkeit eines Pfads, so kannst du die Gesamtwahrscheinlichkeit des Ereignisses bestimmen. Wahrscheinlichkeiten auf diese Art zu berechnen, wird auch als Binomialverteilung bezeichnet.**

## Übungen

**1.**

Eine Münze wird 17 Mal geworfen. Sie ist vorher gezinkt worden, sodass die Wahrscheinlichkeit von Kopf auf 0,55 gestiegen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit 12 Mal Kopf zu werfen?

**2.**

Bei einem Glücksspiel werden aus einem Topf mit 25 Kugeln nacheinander Kugeln gezogen. Von den Kugeln im Topf sind 15 blau und 10 rot. Es werden 12 Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 8 blaue Kugeln zu ziehen? Wie groß ist sie bei höchstens 8 blauen Kugeln?

**3.**

Die Wahrscheinlichkeit 6 Richtige aus 49 zu ziehen, kannst du mit der Pfadwahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(\text{6 aus 49}) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44}$$

Begründe, warum diese Wahrscheinlichkeit auch über das Pascal'sche Dreieck bzw. den Kehrwert des Binomialkoeffizienten $\binom{49}{6}$ berechnet werden kann.

Die Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion nennt man Logarithmusfunktion. Wie auch bei den Wurzelfunktionen entsteht die Umkehrfunktion durch vertauschen der Variablen. Der Graph entsteht durch Spiegelung an der Geraden f(x) = x.

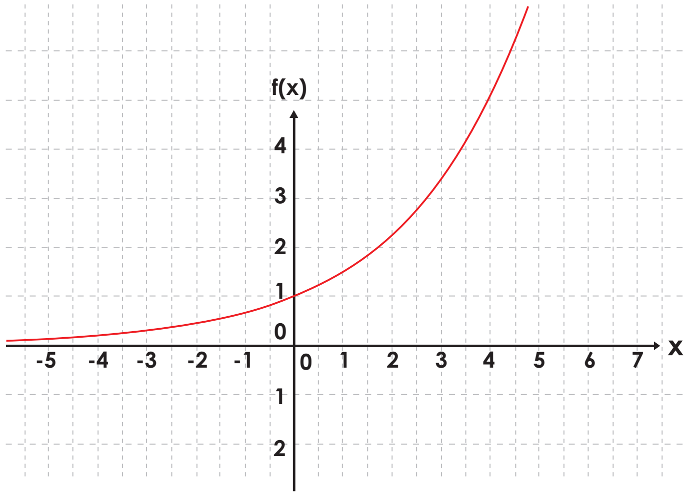
Eine Exponentialfunktion der Gleichung

$f(x) = a^x$ wird durch die Logarithmusfunktion
$f(x) = \log_a x$ umgekehrt.

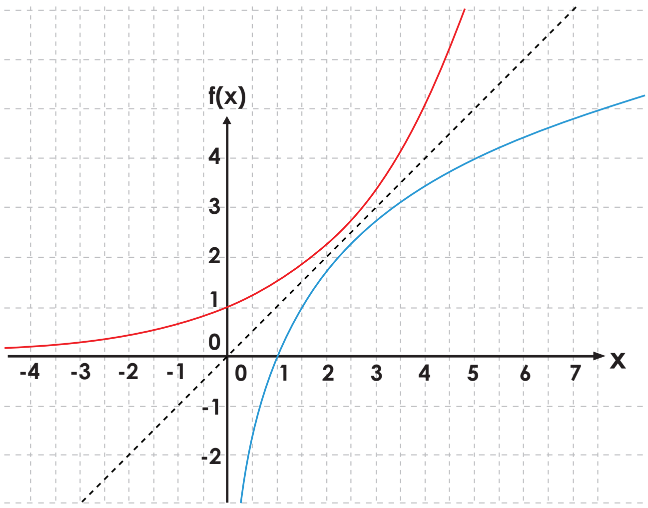
Bei der Logarithmusfunktion wird der Parameter a als Basis bezeichnet und x als Argument. Die Logarithmusfunktion verläuft durch den Punkt (1 ; 0), denn es gilt:

$\log_a(1) = 0$ denn $a^0 = 1$

**Bestimme graphisch die Umkehrfunktion der gegebenen Exponentialfunktion. Stelle anschließend beide Funktionsgleichungen auf.**




Graphisch kannst du die Umkehrfunktion bilden, indem du eine Spiegelung an der Geraden f(x) = x durchführst.




zum Video

Die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion kannst du wie gehabt aufstellen.

$f(0) = b \cdot a^0 = b \;\rightarrow\; f(0) = 1 = b$
$f(1) = a^1 = 1{,}5 \;\rightarrow\; a = 1{,}5$
$f(x) = a^x \;\rightarrow\; f(x) = (1{,}5)^x$

Die Logarithmusfunktion entsteht dann aus dem Umkehroperator einer Exponentialrechnung.

$f(x) = \log_a x \;\rightarrow\; f(x) = \log_{1,5} x$

Dabei wurden Variable und Funktionswert vertauscht.

**Eine Logarithmusfunktion hat den charakteristischen Punkt (1 ; 0). Am weiteren Verlauf kannst du diese Funktionen direkt erkennen.**

## Übungen

**1.** Notiere die Umkehrfunktionen:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = \left(\frac{7}{2}\right)^x$ c) $f(x) = (-3)^x$

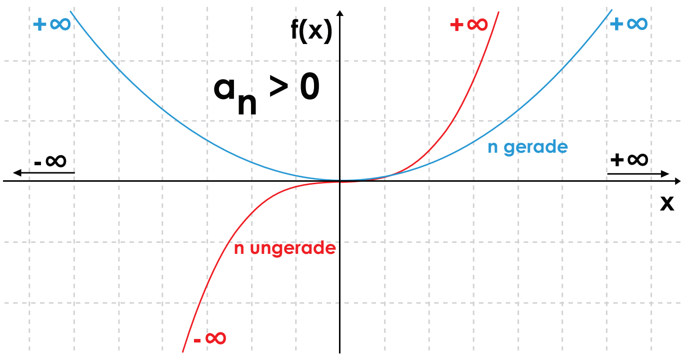
**2.** Bilde graphisch die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $f(x) = (0{,}5)^x$

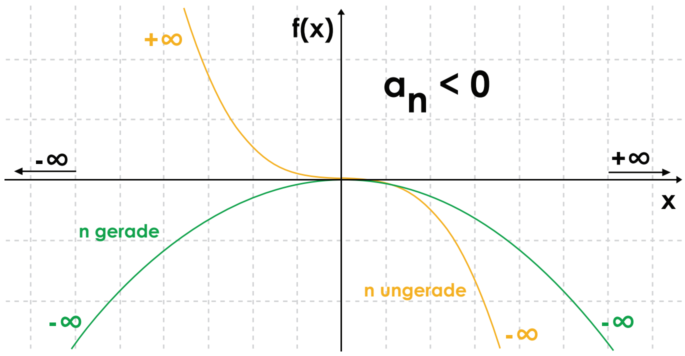
**3.** Bestimme die Basis

a) $\log_a 64 = 3$ b) $\log_a 0{,}01 = -2$ c) $\log_a 27 = 3$

Um Potenzfunktionen der Form $f(x) = a_n x^n$ einordnen zu können, wird oftmals das sogenannte Grenzverhalten betrachtet. Unter dem Grenzverhalten versteht man den Verlauf der Funktion in den Randbereichen, d.h. bei $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$. Umgekehrt kann man auch aus einem gegebenen Funktionsgraphen Rückschlüsse auf die Potenz und den Koeffizienten ziehen.

| | $a_n > 0$ | | $a_n < 0$ | |
|---|---|---|---|---|
| | n gerade | n ungerade | n gerade | n ungerade |
| $x \to -\infty$ | $f(x) \to +\infty$ | $f(x) \to -\infty$ | $f(x) \to -\infty$ | $f(x) \to +\infty$ |
| $x \to +\infty$ | $f(x) \to +\infty$ | $f(x) \to +\infty$ | $f(x) \to -\infty$ | $f(x) \to -\infty$ |



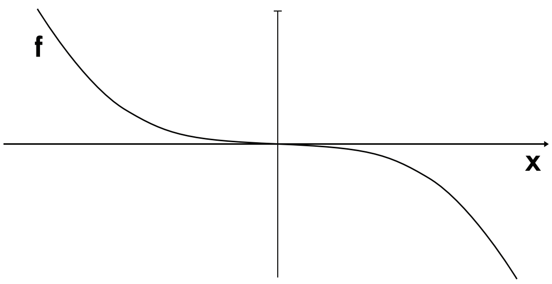




Skizziere den ungefähren Verlauf zu folgenden Funktionen, indem du das Grenzverhalten untersuchst: $f(x) = -3x^3$ $g(x) = x^8$ $h(x) = -0{,}5x^2$

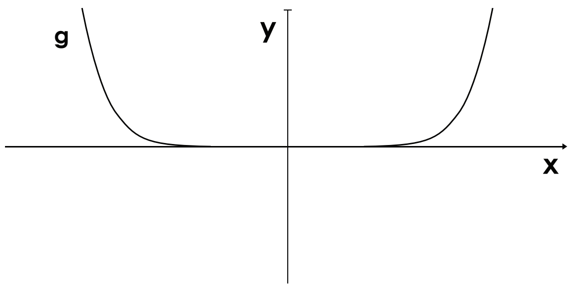
Allgemein kann man vereinfachend sagen, dass Funktionen mit geradem Exponenten immer aus einer Richtung kommen („von oben") und auch wieder in dieselbe Richtung gehen („nach oben"). Funktionen mit ungeradem Exponenten kommen aus einer Richtung („von unten") und verlassen den Bereich in die andere („nach oben"). Das Vorzeichen gibt lediglich die Ausrichtung an (z.B. „von oben nach oben" oder „von unten nach unten").

zum Video

**$f(x) = -3x^3$** : Da es sich um eine Funktion mit ungeradem Exponenten handelt, verläuft der Graph von einem Quadranten in den diagonal gegenüberliegenden. Das negative Vorzeichen bestimmt, dass der Funktionswert für $x \to -\infty$ positiv wird. Für $x \to +\infty$ wird der Graph negativ.




**$g(x) = x^8$** : Die Funktion hat einen geraden Exponenten, sodass sie sowohl für $x \to -\infty$ als auch für $x \to +\infty$ die gleichen Werte annimmt. Da der Koeffizient positiv ist, geht der Graph links wie rechts ebenfalls in Richtung positiver Funktionswerte, also nach oben.




**$h(x) = -0{,}5x^2$** : Hierbei handelt es sich wieder um eine Funktion mit geradem Exponenten. In diesem Fall ist das Vorzeichen negativ, sodass in beiden x-Richtungen die Werte negativ werden.