

Zum Buch;  
das Abiturspaket bei  
[www.lernhelfer.de](http://www.lernhelfer.de)  
**FÜR NUR 1,-EURO**  
• Originalprüfungen  
• Lernkartensets  
• Schülerlexikon

# DUDEN

BASISWISSEN  
SCHULE

## ABITUR

# Mathematik



BUCH

WEB

APP

Das Standardwerk für Abiturienten

Duden

**BASISWISSEN SCHULE**

# Mathematik

ABITUR

4., aktualisierte Auflage

Dudenverlag  
Berlin

**Herausgeber**

Dr. Hubert Bossek (†), Prof. Dr. habil. Karlheinz Weber

**Autoren**

Armin Baeger, Dr. Hubert Bossek (†), Dr. Georg-Christian Brückner,  
Frank Gräf, Irmhild Kantel, Ardito Messner, Dr. Marga Schmidt,  
Dr. habil. Michael Schmitz, Prof. Dr. habil. Karlheinz Weber,  
PD Dr. habil. Bernd Wernicke, Prof. Dr. habil. Wolfgang Zillmer

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbiografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Das Wort **Duden** und der Reihentitel **Basiswissen Schule** sind für den Verlag Bibliographisches Institut GmbH als Marke geschützt.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Für die Inhalte der im Buch genannten Internetlinks, deren Verknüpfungen zu anderen Internetangeboten und Änderungen der Internetadresse übernimmt der Verlag keine Verantwortung und macht sich diese Inhalte nicht zu eigen.

Ein Anspruch auf Nennung besteht nicht.

Für die Nutzung des Internetportals [www.lernhelfer.de](http://www.lernhelfer.de) gelten die Allgemeinen Geschäftsbedingungen (AGB) des Internetportals, die jederzeit unter dem entsprechenden Eintrag abgerufen werden können.

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

© Duden 2015

D C B A

Bibliographisches Institut GmbH, Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

**Redaktionelle Leitung**

David Harvie

**Redaktion**

Dr. Hubert Bossek (†), Anja Ziemer

**Illustrationen**

Christine Gebreyes, Gerlinde Keller

**Herstellung**

Ursula Fürst

**Layout**

Britta Scharffenberg

**Umschlaggestaltung**

Büroeco, Augsburg

**Satz**

DZA Druckerei zu Altenburg GmbH, Altenburg

**Grafiken**

Birgit Kintzel, Sybille Storch

**Druck und Bindung**

Těšínská tiskárna, Český Těšín

Printed in Czech Republic

ISBN 978-3-411-71744-6

[www.lernhelfer.de](http://www.lernhelfer.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik</b>	<b>9</b>
<b>1.1</b>	<b>Mathematik und ihre grundlegenden Arbeitsmethoden</b>	<b>10</b>
1.1.1	Grundlagen mathematischer Bildung	11
1.1.2	Kommunizieren, Argumentieren und Begründen	12
1.1.3	Mathematisieren und Modellieren	17
1.1.4	Lösen von Problemen	20
1.1.5	Internet und neue Medien	22
<b>1.2</b>	<b>Grundbegriffe der Mathematik</b>	<b>24</b>
1.2.1	Mengen	24
1.2.2	Logische Operationen mit Aussagen und Aussageformen	30
1.2.3	Definitionen	34
1.2.4	Schlussregeln	36
1.2.5	Beweise	39
<b>2</b>	<b>Zahlenfolgen</b>	<b>43</b>
<b>2.1</b>	<b>Der Begriff Zahlenfolge</b>	<b>44</b>
<b>2.2</b>	<b>Eigenschaften von Zahlenfolgen</b>	<b>46</b>
2.2.1	Monotonie und Beschränktheit	46
2.2.2	Partialsummen	48
<b>2.3</b>	<b>Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen</b>	<b>49</b>
<b>3</b>	<b>Funktionen und ihre Eigenschaften</b>	<b>55</b>
<b>3.1</b>	<b>Der Begriff Funktion</b>	<b>56</b>
<b>3.2</b>	<b>Darstellung von Funktionen</b>	<b>58</b>
<b>3.3</b>	<b>Eigenschaften von Funktionen</b>	<b>60</b>
3.3.1	Monotonie und Beschränktheit	60
3.3.2	Symmetrie	61
3.3.3	Periodizität	61
3.3.4	Umkehrbarkeit	62
3.3.5	Nullstellen	63
3.3.6	Abschnittsweise definierte Funktionen	63
<b>3.4</b>	<b>Verknüpfen und Verketteten von Funktionen</b>	<b>65</b>
<b>3.5</b>	<b>Funktionenscharen</b>	<b>67</b>
<b>3.6</b>	<b>Klassen reeller Funktionen</b>	<b>68</b>
3.6.1	Einteilung	68
3.6.2	Lineare Funktionen	70
3.6.3	Quadratische Funktionen	71
3.6.4	Potenzfunktionen und Wurfelfunktionen	73
3.6.5	Gebrochenrationale Funktionen	74
3.6.6	Trigonometrische Funktionen	75
3.6.7	Exponentialfunktionen	81
3.6.8	Logarithmusfunktionen	82
3.6.9	Weitere spezielle reelle Funktionen	84

■ Überblick 69

■ Überblick 86

<b>4</b>	<b>Gleichungen und Gleichungssysteme</b>	<b>87</b>
4.1	Lineare, quadratische, biquadratische Gleichungen	88
4.2	Gleichungen höheren Grades	90
4.3	Gleichungen mit absoluten Beträgen	93
4.4	Wurzelgleichungen	94
4.5	Goniometrische Gleichungen	95
4.6	Exponential- und Logarithmengleichungen	97
4.7	Lineare Gleichungssysteme	98
4.7.1	Gaußsches Eliminationsverfahren	98
4.7.2	Lösbarkeit und Lösungsmenge von Gleichungssystemen	101
4.7.3	Determinanten; Regel von Cramer	104
4.7.4	Homogene und inhomogene Gleichungssysteme	107
4.8	Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme	110
<b>5</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>115</b>
5.1	Grenzwerte und Konvergenz von Zahlenfolgen; Grenzwertsätze	116
5.2	Reihen	120
5.3	Grenzwerte von Funktionen; Grenzwertsätze	123
5.4	Stetigkeit von Funktionen	126
<b>6</b>	<b>Differenzialrechnung</b>	<b>129</b>
6.1	Grundbegriffe der Differenzialrechnung	130
6.1.1	Ableitung einer Funktion	130
6.1.2	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	134
6.1.3	Ableitungen höherer Ordnung	135
6.2	Regeln zur Ableitung von Funktionen	137
6.2.1	Konstanten-, Potenz- und Faktorregel	137
6.2.2	Summen-, Produkt- und Quotientenregel	138
6.2.3	Kettenregel	140
6.2.4	Umkehrregel	141
6.2.5	Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung	142
6.2.6	Partielle Ableitung von Funktionen mit zwei Variablen	143
6.3	Ableitung elementarer Funktionen	144
6.3.1	Ableitung von Potenzfunktionen	144
6.3.2	Ableitung von trigonometrischen Funktionen	144
6.3.3	Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
6.4	Sätze über differenzierbare Funktionen	150
6.5	Untersuchung von Funktionseigenschaften	154
6.5.1	Monotonieverhalten	154
6.5.2	Extrema	155
6.5.3	Krümmungsverhalten und Wendestellen	162
6.5.4	Verhalten im Unendlichen	166
6.5.5	Unstetigkeitsstellen	168
6.5.6	Beispiele für Funktionsuntersuchungen	171
6.6	Extremwertprobleme	177
6.7	Bestimmen von Funktionsgleichungen	180
6.7.1	Approximation durch Polynomfunktionen	180
6.7.2	Die Taylorsche Formel für ganzrationale Funktionen	184

■ Überblick 136

■ Überblick 149



6.7.3	Der Satz von Taylor	186	
6.7.4	Das Verfahren der linearen Regression	189	■ Überblick 192
<b>6.8</b>	<b>Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen</b>	<b>193</b>	
6.8.1	Grafische Suche von Nullstellen	193	
6.8.2	Bisektionsverfahren	194	
6.8.3	Newtonsches Näherungsverfahren	195	
6.8.4	Allgemeines Iterationsverfahren	196	■ Überblick 198
<b>7</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>199</b>	
<b>7.1</b>	<b>Das unbestimmte Integral</b>	<b>200</b>	
7.1.1	Die Begriffe <i>Stammfunktion</i> und <i>unbestimmtes Integral</i>	200	
7.1.2	Regeln für das Ermitteln von unbestimmten Integralen	202	
<b>7.2</b>	<b>Das bestimmte Integral</b>	<b>204</b>	
7.2.1	Flächeninhalt unter der Normalparabel	204	
7.2.2	Der Begriff <i>bestimmtes Integral</i>	205	
7.2.3	Begriffserweiterung und Eigenschaften bestimmter Integrale	209	
<b>7.3</b>	<b>Beziehung zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral</b>	<b>211</b>	
7.3.1	Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze	211	
7.3.2	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	212	
<b>7.4</b>	<b>Weitere Integrationsmethoden</b>	<b>213</b>	
7.4.1	Integration durch lineare Substitution	213	
7.4.2	Integration durch nichtlineare Substitution	213	
7.4.3	Partielle Integration	215	
7.4.4	Integration durch Partialbruchzerlegung	215	
<b>7.5</b>	<b>Berechnen bestimmter Integrale; Anwendungen</b>	<b>217</b>	
7.5.1	Integrationsregeln	217	
7.5.2	Ermitteln von Flächeninhalten	217	
7.5.3	Physikalische Probleme	224	
7.5.4	Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern; Bogenlänge von Kurven	228	■ Überblick 233
<b>7.6</b>	<b>Uneigentliche Integrale und nicht elementar integrierbare Funktionen</b>	<b>234</b>	
<b>7.7</b>	<b>Numerische Integration</b>	<b>236</b>	■ Überblick 238
<b>8</b>	<b>Differenzen- und Differenzialgleichungen</b>	<b>239</b>	
<b>8.1</b>	<b>Differenzengleichungen</b>	<b>240</b>	
8.1.1	Die Begriffe <i>Differenzengleichung</i> und <i>Lösung einer Differenzengleichung</i>	240	
8.1.2	Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	243	
<b>8.2</b>	<b>Differenzialgleichungen</b>	<b>246</b>	
8.2.1	Arten von Differenzialgleichungen	246	
8.2.2	Lösungsverhalten von Differenzialgleichungen	247	
8.2.3	Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen 1. Ordnung	250	
8.2.4	Näherungsverfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen 1. Ordnung	253	■ Überblick 254

<b>9</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>255</b>
9.1	Komplexe Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen	256
9.2	Algebraische Darstellung komplexer Zahlen	258
9.3	Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	260
9.4	Komplexe Zahlen in Exponentialform	262
<b>10</b>	<b>Vektoren und Vektorräume</b>	<b>263</b>
10.1	Zur Entwicklung der analytischen Geometrie	264
10.2	Vektoren; Gleichheit, Addition und Vervielfachung	265
10.3	Parallelität, Kollinearität und Komplanarität von Vektoren	271
10.4	Linearkombination von Vektoren; Basen in der Ebene und im Raum	272
10.5	Koordinatensysteme	276
10.6	Punkte, Strecken und Dreiecke in einem Koordinatensystem	282
10.6.1	Mittelpunkt einer Strecke in der Ebene und im Raum	282
10.6.2	Schwerpunkt eines Dreiecks	282
10.6.3	Betrag eines Vektors; Länge einer Strecke	283
10.6.4	Flächeninhalt eines Dreiecks	284
10.7	Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit	286
10.8	Skalarprodukt von Vektoren	288
10.8.1	Definition und Eigenschaften	288
10.8.2	Anwendungen des Skalarprodukts	291
10.9	Vektorprodukt und Spatprodukt von Vektoren	293
10.9.1	Vektorprodukt	293
10.9.2	Spatprodukt	294
10.10	Beweise unter Verwendung von Vektoren	298
10.11	Vektorräume	299
10.11.1	Der Begriff <i>Vektorraum</i>	299
10.11.2	Unterräume und Erzeugendensysteme	300
10.11.3	Basen und Dimension von Unterräumen	302
<b>11</b>	<b>Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes</b>	<b>303</b>
11.1	Geraden in der Ebene und im Raum	304
11.1.1	Punktgleichung einer Geraden	304
11.1.2	Zweipunktgleichung einer Geraden	307
11.1.3	Normalform der Gleichung einer Geraden in der Ebene	308
11.1.4	Lagebeziehungen von Geraden	310
11.1.5	Orthogonalität und Schnittwinkel von Geraden der Ebene	313
11.2	Ebenen im Raum	316
11.2.1	Gleichung einer Ebene in Vektorform	316
11.2.2	Gleichung einer Ebene in Koordinatenschreibweise	317
11.2.3	Hessesche Normalform der Ebenengleichung	320
11.2.4	Spezielle Ebenen	321
11.2.5	Lagebeziehungen von Gerade und Ebene	323
11.2.6	Lagebeziehungen von zwei Ebenen	326
11.3	Schnittwinkelberechnungen	330
11.3.1	Schnittwinkel zweier Geraden im Raum	330
11.3.2	Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	331
11.3.3	Schnittwinkel zweier Ebenen	331

■ Überblick 285

■ Überblick 297

■ Überblick 315

■ Überblick 329

■ Überblick 333

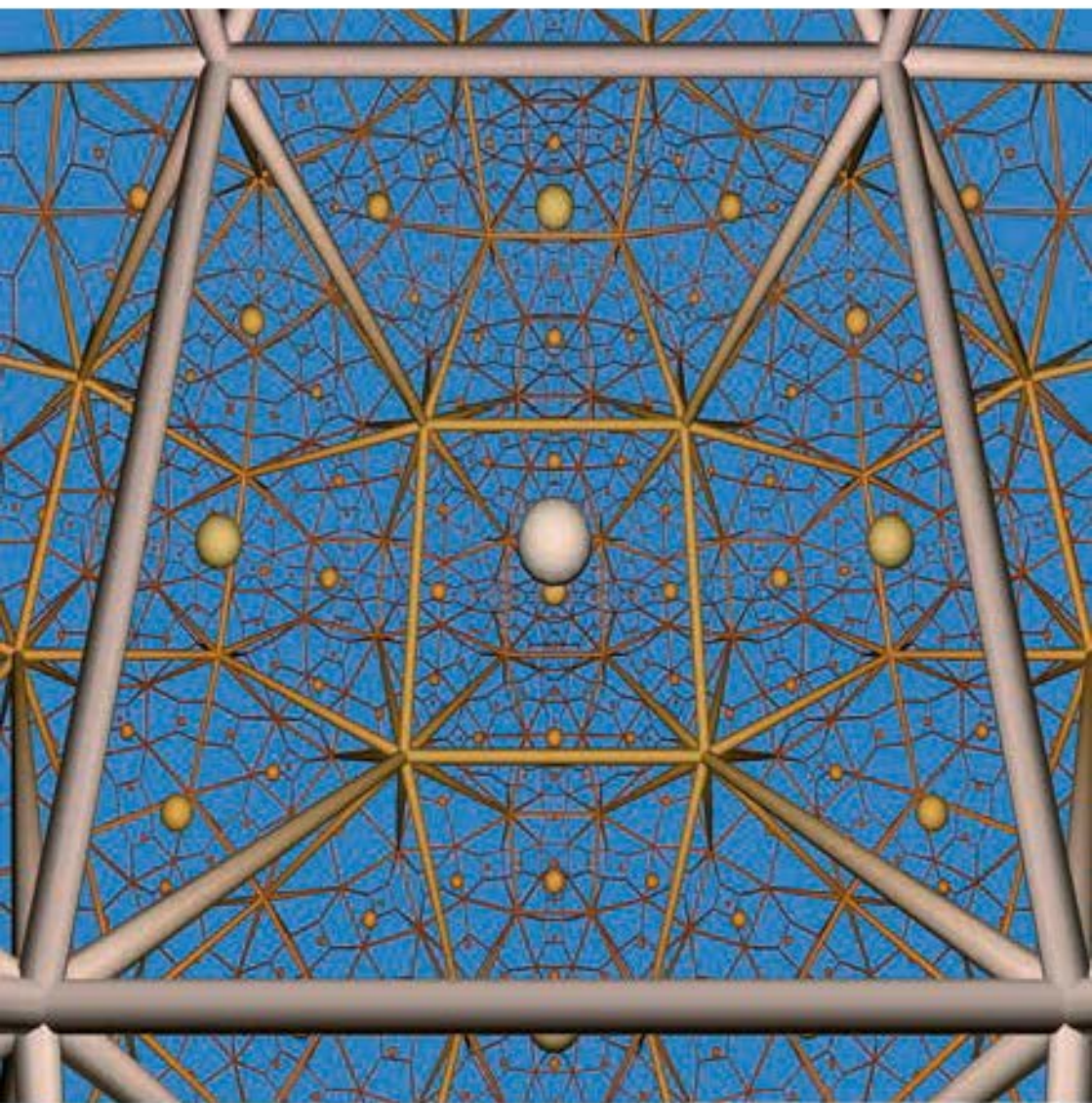
<b>11.4</b>	<b>Abstandsberechnungen</b>	<b>334</b>
11.4.1	Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene und von einer Ebene im Raum	334
11.4.2	Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum	336
11.4.3	Abstand von Geraden im Raum	337
11.4.4	Abstand von Ebenen	340
<b>11.5</b>	<b>Kreise und Kugeln</b>	<b>342</b>
11.5.1	Gleichungen von Kreis und Kugel	342
11.5.2	Kreis und Gerade	346
11.5.3	Lagebeziehungen von Kreisen	347
11.5.4	Lagebeziehungen von Kugeln, Geraden und Ebenen	348
<b>11.6</b>	<b>Kegelschnitte</b>	<b>353</b>
11.6.1	Schnittfiguren eines Kegels	353
11.6.2	Ellipse	354
11.6.3	Hyperbel	357
11.6.4	Parabel	359
<b>12</b>	<b>Matrizen</b>	<b>361</b>
<b>12.1</b>	<b>Der Begriff Matrix</b>	<b>362</b>
<b>12.2</b>	<b>Rechnen mit Matrizen</b>	<b>365</b>
12.2.1	Addition und skalare Vervielfachung von Matrizen	365
12.2.2	Multiplikation von Matrizen	366
12.2.3	Bilden inverser Matrizen	370
<b>12.3</b>	<b>Rang einer Matrix; Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme</b>	<b>372</b>
<b>12.4</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>374</b>
<b>13</b>	<b>Wahrscheinlichkeitstheorie</b>	<b>377</b>
<b>13.1</b>	<b>Zufallsexperimente</b>	<b>378</b>
13.1.1	Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente; Ergebnismengen	378
13.1.2	Zufällige Ereignisse; Verknüpfen von Ereignissen	380
13.1.3	Absolute und relative Häufigkeiten; empirisches Gesetz der großen Zahlen	382
13.1.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung; Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	383
13.1.5	Vier- und Mehrfeldertafeln; Zerlegungen der Ergebnismenge	386
<b>13.2</b>	<b>Gleichverteilung (Laplace-Experimente)</b>	<b>388</b>
13.2.1	Der Begriff Gleichverteilung	388
13.2.2	Rechenregel für die Gleichverteilung (Laplace-Regel)	389
13.2.3	Pfadregeln	390
13.2.4	Zählprinzip bei k-Tupeln	391
13.2.5	Zählprinzip bei n-elementigen Mengen	394
13.2.6	Urnenmodelle; Ziehen mit und ohne Zurücklegen; hypergeometrische Verteilung	395
13.2.7	Simulation mithilfe von Zufallszahlen	398

■ Überblick 341

■ Überblick 352



	<b>13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>401</b>
	13.3.1 Der Begriff <i>bedingte Wahrscheinlichkeit</i> . . . . .	401
	13.3.2 Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten . . . . .	402
	13.3.3 Unabhängigkeit von Ereignissen . . . . .	404
	<b>13.4 Zufallsgrößen</b>	<b>406</b>
	13.4.1 Endliche Zufallsgrößen . . . . .	406
	13.4.2 Erwartungswert . . . . .	408
	13.4.3 Streuung . . . . .	410
	<b>13.5 Binomialverteilung</b>	<b>414</b>
	13.5.1 Bernoulli-Experimente . . . . .	414
	13.5.2 Bernoulli-Ketten; binomialverteilte Zufallsgrößen . . . . .	415
	13.5.3 Grafische Veranschaulichung der Binomialverteilung . . . . .	417
	13.5.4 Tabellierungen zur Binomialverteilung . . . . .	421
	13.5.5 Erwartungswert und Streuung binomialverteilter Zufallsgrößen . . . . .	425
	13.5.6 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace zur Binomialverteilung . . . . .	427
	13.5.7 Normalverteilung . . . . .	430
	13.5.8 Zentraler Grenzwertsatz . . . . .	435
	<b>14 Beschreibende und beurteilende Statistik</b>	<b>437</b>
	<b>14.1 Beschreibende Statistik</b>	<b>438</b>
	14.1.1 Zu Anliegen und geschichtlicher Entwicklung der beschreibenden Statistik . . . . .	438
	14.1.2 Kenngrößen statistischer Erhebungen . . . . .	438
	<b>14.2 Beurteilende Statistik</b>	<b>445</b>
	14.2.1 Zu Anliegen und geschichtlicher Entwicklung der beurteilenden Statistik . . . . .	445
	14.2.2 Grundprobleme des Testens von Hypothesen . . . . .	445
	14.2.3 Alternativtests . . . . .	449
	14.2.4 Signifikanztests . . . . .	456
	<b>15 Rechenhilfsmittel</b>	<b>461</b>
	<b>15.1 Geschichtlicher Abriss</b>	<b>462</b>
	<b>15.2 Elektronische Hilfsmittel</b>	<b>465</b>
	15.2.1 Grafikfähige Taschenrechner . . . . .	465
	15.2.2 Computeralgebrasysteme . . . . .	468
	15.2.3 Tabellenkalkulationen . . . . .	475
	15.2.4 Dynamische Geometriesoftware . . . . .	479
	<b>A Anhang</b>	<b>483</b>
	Register . . . . .	484
	Bildquellenverzeichnis . . . . .	496
■ Überblick 420		
■ Überblick 436		
■ Überblick 444		
■ Überblick 460		





## 1.1 Mathematik und ihre grundlegenden Arbeitsmethoden

Lebenspraktische Anforderungen waren es, die zu ersten mathematischen Erkenntnissen führten – und die Beschreibung und die Lösung derartiger Probleme bestimmten auch im Folgenden wesentlich den Fortschritt der Mathematik. Im zunehmenden Maße trug aber ebenso die Beschäftigung mit innermathematischen Fragestellungen zu einem Ausbau und einer Festigung des mathematischen Theoriegebäudes bei, was wiederum Rückwirkungen auf deren Anwendungsmöglichkeiten zur Folge hatte.

Die Mathematik nahm etwa um 2000 v. Chr. bei den Babyloniern auf elementarer Stufe ihren Anfang. Im 4. und 5. Jahrhundert v. Chr. waren es dann die Griechen, die in Kenntnis der babylonischen Leistungen die Mathematik auf die Stufe einer Wissenschaft im modernen Sinne hoben. Im Zentrum standen dabei die Geometrie und ihre theoretische Grundlegung, die in den berühmten „Elementen“ des EUKLID ihren konzentrierten Ausdruck fand. Aber auch in dieser Zeit spielten Anwendungen der Mathematik eine wichtige Rolle. Die Entstehung der Infinitesimalrechnung und der analytischen Geometrie im 17. Jahrhundert markierten dann nach Jahrhunderten langsamen Vorschreitens einen weiteren revolutionären Fortschritt der mathematischen Wissenschaften, der durch grundlegende theoretische Erkenntnisse und auch durch das Erschließen völlig neuer Anwendungsfelder gekennzeichnet war.

Die Entwicklung der Stochastik als einer der jüngsten mathematischen Teildisziplinen erlaubte schließlich das Erfassen und Bearbeiten von wiederum qualitativ neuen Problemen, die mit Zufall und Wahrscheinlichkeit zusammenhingen.

In allen Etappen war die Entwicklung der Mathematik so durch das Wechselspiel von Erweiterung und Fundierung des Theoriegebäudes einerseits und die Erschließung wie Nutzung neuer Anwendungsfelder andererseits gekennzeichnet, wobei der Schwerpunkt wechselte.

Sowohl für den theoretischen Erkenntnisgewinn wie auch für die Anwendung der Mathematik als

Werkzeug zum Lösen praktischer Probleme ist zunächst einmal Klarheit über die verwendeten Begriffe und Sicherheit bezüglich der Gültigkeit der genutzten Aussagen erforderlich. Mathematik anzuwenden verlangt dann, Beziehungen zwischen dem jeweiligen Problem und dem mathematischen Handwerkszeug herzustellen, den Sachverhalt in mathematischer Sprache zu formulieren und mit dem so gewonnenen mathematischen Abbild des betreffenden Sachverhalts weiterzuarbeiten. Definieren von Begriffen, Begründen und Beweisen von Aussagen sowie mathematisches Modellieren von Sachverhalten sind deshalb von grundlegender Bedeutung für mathematisches Arbeiten.



EUKLID VON  
ALEXANDRIA  
(um 365 bis um 300  
v. Chr.)



### 1.1.1 Grundlagen mathematischer Bildung

Um mathematische Werkzeuge umfassend einsetzen zu können, ist ein systematisch aufgebautes und anwendungsbereites Wissen um mathematische Zusammenhänge erforderlich. Das schließt die Kompetenzen ein, mathematische Fragestellungen im beruflichen wie im alltäglichen Leben zu beschreiben und zu bearbeiten.

Zu diesen Kompetenzen gehört die Fähigkeit,

- selbstständig mathematische Informationen zu beschaffen und anderen verständlich zu erläutern,
- reale Situationen mit mathematischen Mitteln zu beschreiben,
- geeignete Problemlösestrategien auszuwählen und anzuwenden und dabei Hilfsmittelsachgerecht einzusetzen,
- Lösungswege und Ergebnisse zu reflektieren, zu vergleichen und zu bewerten und in geeigneter Form zu präsentieren.

Jede Erweiterung mathematischen Wissens und Könnens setzt unverzichtbar eine *mathematische Grundbildung* voraus. Dazu gehören:

- Fertigkeiten im schriftlichen und mündlichen Rechnen sind eine Voraussetzung für nahezu jedes weitere Arbeiten in der Mathematik und weit darüber hinaus. Fundiertes Rechnenkönnen schließt die Befähigung zum überlegten Einsatz von Hilfsmitteln sowie Sicherheit beim Durchführen von Abschätzungen und beim Bestimmen einer sinnvollen Genauigkeit von Resultatsangaben mit ein. Letzteres steht in engem Zusammenhang mit einem sicheren Umgang im Arbeiten mit Größen, die bei allen Anwendungen eine wichtige Rolle spielen.
- Ebenso unverzichtbar ist ein grundlegendes geometrisches Wissen und Können. Gesicherte inhaltliche Vorstellungen bezüglich wichtiger Begriffe und Sätze aus Planimetrie und Stereometrie, Fertigkeiten im Skizzieren und Konstruieren und ein gewisses räumliches Vorstellungsvermögen dienen nicht nur dem Lösen geometrischer Aufgaben, sondern vor allem der Veranschaulichung wichtiger geometrischer Probleme.
- Die Befähigung im Arbeiten mit Variablen und ein allgemeines „Symbolverständnis“ reichen in ihrer Bedeutung weit über den mathematischen Wissenserwerb hinaus.
- Zu den wichtigsten Hilfsmitteln beim Modellieren inner- und außer-mathematischer Sachverhalte zählen Gleichungen und Gleichungssysteme, mitunter auch Ungleichungen.
- Von ebenso zentraler Bedeutung ist das Arbeiten mit Funktionen, insbesondere die Befähigung, dieses spezielle mathematische Hilfsmittel zum Erfassen und Beschreiben von Vorgängen und Gesetzmäßigkeiten in Natur, Technik und Gesellschaft sowie für das Lösen von Problemen aus diesen Bereichen zu nutzen.
- Für das Erfassen und Beschreiben zufälliger Erscheinungen ist eine gewisse stochastische Denkweise unerlässlich. Dazu gehören das Vertrautsein mit grundlegenden Begriffen und Aussagen der Stochastik und der dazugehörigen Symbolik sowie die Kenntnis elementarer Methoden und Modelle zur Beschreibung zufälliger Erscheinungen und zum Berechnen und Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten.

▶ Mathematische Bildung zeigt sich auch in den Kompetenzen Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren und Problemlösen.



▶ Von Konstruieren wird vorzugsweise gesprochen, wenn besondere Anforderungen an die Genauigkeit gestellt werden. Dagegen wird unter Skizzieren freihändiges Zeichnen verstanden, also flüchtige Entwürfe einer Figur, die nicht maßstäblich dargestellt werden muss, jedoch Wesentliches erfassen sollte.

▶ Typisch für stochastische Methoden ist die Möglichkeit, mithilfe von Simulationen (s. Seite 298) auch komplizierte Vorgänge zu untersuchen.



### 1.1.2 Kommunizieren, Argumentieren und Begründen

Mathematische Bildung zeigt sich auch in der Fähigkeit, mathematische Informationen aufzunehmen und diese verständlich weiterzugeben, also **inhaltsbezogen zu kommunizieren**.

► Die Verwendung neuer Medien kann die Informationsweitergabe anschaulicher und verständlicher machen. Internet oder E-Mail ermöglichen zudem die Kommunikation über enge räumliche Grenzen hinweg.

Zur **Kommunikation** in mathematischen Kontexten gehören:

- ein *korrekter Umgang mit Sprache* in mündlicher und schriftlicher Form;
- das Lesen von Texten mit mathematischen Inhalten, das Erfassen der Inhalte und deren Wiedergabe mit eigenen Worten;
- die Bereitschaft und Fähigkeit, anderen zuzuhören sowie deren Informationen und Argumente aufzunehmen;
- das Interpretieren mathematischer Zusammenhänge;
- die Kenntnis wichtiger Fachbegriffe und deren Abgrenzung zur Umgangssprache;
- das Beschreiben, Erläutern und Präsentieren von Lösungswegen und Ergebnissen;
- die Bereitschaft und Fähigkeit, sich in die Diskussion fachlicher Probleme einzubringen und dabei begründete mathematische Urteile abzugeben.

Um die Richtigkeit einer Aussage oder Entscheidung zu belegen, muss man sie **begründen**, man muss **Argumente finden**, die diese Aussage stützen bzw. die Entscheidung rechtfertigen. Die *Formen der Begründung* sind in Abhängigkeit vom jeweiligen Praxis- oder Wissenschaftsbereich sehr unterschiedlich und häufig auch Veränderungen unterworfen.

■ In den *Naturwissenschaften* ist die Anwendung der experimentellen Methode eine der wichtigsten Vorgehensweisen zur Begründung von Aussagen über Zusammenhänge zwischen bestimmten Erscheinungen oder Vorgängen.

► *Hermeneutik* (griech.) – Auslegungskunst, Deutung

Die *Geisteswissenschaften* (wie etwa die Geschichts-, die Literatur- bzw. die Kunstwissenschaft) bedienen sich u. a. hermeneutischer Begründungen wie z. B. der Analyse und Auswertung von Dokumenten, Schriften, Kunstwerken usw.

In den *Sozialwissenschaften* greift man zur Begründung meist auf statistische Argumente zurück – beispielsweise bei Aussagen zur mittleren Lebensdauer von Frauen oder Männern.

In der *Medizin* bzw. *Pharmazie* ergeben sich Aussagen zur Wirksamkeit neuer Medikamente häufig aus Tierversuchen oder aus Erprobungen mit genau überwachten Menschengruppen.

Auch in der Mathematik werden unterschiedliche Begründungsformen verwendet, wobei der Grad der durch sie jeweils erreichten Gewissheit weit voneinander abweichen kann.

Allen Begründungen ist gemeinsam, dass sie zwar die *subjektive Gewissheit* von der Richtigkeit einer Aussage erhöhen, aber u. U. noch *keinen*

*objektiven Nachweis* für die Gültigkeit in einem beliebigen Fall erbringen können. Letzteres trifft immer dann zu, wenn nicht jeder mögliche Fall für die Begründung erfasst wurde bzw. gar nicht auf diese Weise erfasst werden kann, da es unendlich viele Möglichkeiten gibt.

Neben der *hermeneutischen* Methode sind es vor allem *empirisch-experimentelle* und *mathematisch-analytische* Methoden, die zur Erkenntnisgewinnung beitragen und Begründungen liefern:

### 1. Empirische (oder induktive) Vorgehensweise

Erkenntniszuwachs entsteht hier aus unmittelbar praktischer Erfahrung und aus Versuchen. Durch Suchen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden von einer möglichst großen Anzahl von Einzelbeispielen kann man sehr effektiv zu allgemeinen Aussagen gelangen. Dennoch ist die Verallgemeinerung von Einzelbeispielen ein unzuverlässiger Schritt, sodass die Notwendigkeit entsteht, empirisch gewonnene Vermutungen zu beweisen.

▶ Keine vorschnellen Verallgemeinerungen, auch 100 000 Beispiele geben nicht das Recht, eine Eigenschaft „für alle“ zu schließen.

### 2. Deduktive Vorgehensweise

Mithilfe gesicherter Aussagen werden aus allgemeinen Gesetzmäßigkeiten spezielle Einzelerkenntnisse gewonnen, es wird mit logischen Regeln „vom Allgemeinen auf das Besondere“ schlussfolgert. Deduktive Denk- und Arbeitsweisen liefern „beweiskräftige“ Begründungen.

#### ■ Wir finden Begründungen

- durch *Plausibilitätsbetrachtungen* (z. B., dass für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  und jedes Ereignis  $A$  mit  $A \subseteq Q$  die Beziehung  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$  gilt);
- durch Untersuchen einer größeren Zahl von *Einzelfällen* („*unvollständige Induktion*“);
- durch *Ableiten* von als richtig bekannten Aussagen aus der zu begründenden;
- für die Funktionsweise eines Taschenrechners (z. B. der Vorrangautomatik) durch mehrfaches Ausführen auf verschiedenen Wegen.

**Mathematisches Argumentieren** umfasst folgende Tätigkeiten:

- Erkunden mathematischer Sachverhalte; Sammeln von Informationen aus mathematischen Texten;
- Informationen strukturieren und Voraussetzungen herausarbeiten;
- mathematische Beziehungen zwischen den Informationen, Daten oder Größen suchen und mittels mathematischer Fachsprache darstellen;
- Aufstellen von Vermutungen und Formulieren von Hypothesen;
- intuitives Begründen von Aussagen durch Plausibilitätsklärungen;
- Prüfen, ob sich die Hypothese experimentell untermauern lässt;
- Aussagen mit mathematischen Mitteln schlüssig begründen oder widerlegen, dabei formale und symbolische Elemente nutzen;
- Widerlegen der Hypothese durch Angabe von Gegenbeispielen;
- unterschiedliche Begründungen vergleichen und bewerten;
- kritisches Hinterfragen von Argumentationen und Begründungen;
- Fehler in der Argumentationskette finden und korrigieren.

▶ Ggf. auch Quellen wie Formelsammlungen, Lexika oder Internet nutzen.

Damit aus einer Vermutung über einen mathematischen Zusammenhang ein mathematischer Satz, also eine gesicherte Aussage, wird, muss man die Richtigkeit dieser Vermutung *für jeden möglichen Fall* nachweisen, d.h., es muss deren Allgemeingültigkeit durch einen **mathematischen Beweis** nachgewiesen werden (↗ Seite 39).

Eine wesentliche Voraussetzung für die Erfüllung der Anforderungen an das Argumentieren, Begründen und Beweisen ist ein adäquater Gebrauch der **Sprache**.

Das richtige Verwenden und Verstehen der mathematischen Terminologie und Symbolik sowie die damit verbundene Gewöhnung an eine knappe, präzise Ausdrucksweise unterstützen die Kommunikationsfähigkeit, erhöhen die Wirksamkeit von Erläuterungen und Anweisungen.

► A und B stehen für Aussagen oder Aussageformen.

#### ■ Typisches im mathematischen Sprachgebrauch

**Wird festgestellt:** ..., so bedeutet das:

**x ist nichtnegativ** x ist positiv oder auch gleich null.

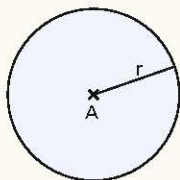
**Daraus folgt ...** Gilt A, dann gilt (ergibt sich daraus) auch B. (Nicht zu verwechseln mit „genau dann“.)

**Genau dann ...** B gilt **dann und nur dann**, wenn A zutrifft. Also: Es handelt sich um eine wechselseitig gültige Beziehung, die eine notwendige **und zugleich** hinreichende Bedingung zum Ausdruck bringt.

**A oder B** Es gilt A **oder** B oder beides. (Umgangssprachlich wird „oder“ meist im Sinne von „entweder – oder“ benutzt, in der Mathematik häufig im Sinne von „oder auch“.)

**Fast alle Elemente ...** A gilt bis auf **endlich viele Ausnahmen** für alle Elemente der betreffenden (unendlichen) Menge.

**Es gibt ein Element ...** Es gibt ein Element **oder mehrere** Elemente ... Also: Es existiert **mindestens** ein Element ...



#### ■ Für Konstruktionsbeschreibungen sind Wendungen einzuprägen wie:

„Ich konstruiere

- einen Kreis *um* ... (den Mittelpunkt A) *mit* ... (dem Radius r),
- eine Senkrechte *zu* ... *durch* ...,
- den Winkel *an* ... *im* ...,
- den Schnittpunkt *von* ... *mit* ...“

Zu den normierten Wendungen zählen auch:

- „Zwei Geraden *schneiden einander*.“ Oder:
- „Zwei Geraden *sind zueinander orthogonal*.“

► Die Arbeitsaufträge werden oftmals mithilfe von **Operatoren** formuliert.

In der folgenden Übersicht wird gezeigt, welche Erwartungen an die Lösungsdarstellung in Abhängigkeit von der Aufgabenformulierung geknüpft werden.



**Operatoren und damit verbundene Erwartungen an Lösungsdarstellungen**

Operator (Arbeitsauftrag)	Erwartungsbild
<i>Nennen Sie ... Geben Sie ... an.</i>	Formulieren eines Sachverhalts; Aufzählen von Ergebnissen ohne Erläuterungen, Begründungen und Lösungsweg
<i>Skizzieren Sie ...</i>	Grafisches Darstellen unter Berücksichtigung wesentlicher Eigenschaften (Freihandskizze möglich)
<i>Zeichnen Sie ... Stellen Sie ... grafisch dar. Konstruieren Sie ...</i>	Exaktes grafisches Darstellen (ggf. unter Nutzung berechneter Werte); maßstäbliches Darstellen eines Sachverhaltes (ggf. unter Nutzung von speziellen Konstruktionsverfahren)
<i>Beschreiben Sie ...</i>	Systematisches Darstellen eines Sachverhalts, Verfahrens oder Lösungsweges mit eigenen Worten, unter Verwendung der Fachsprache und in der Regel in vollständigen Sätzen
<i>Erklären Sie ...</i>	Zusammenhängendes und begründendes Darstellen einer Problemlösung, wobei zugrunde liegende Gesetzmäßigkeiten, Regeln und Beziehungen zu nennen sind; Modelle oder grafische Darstellungen können verwendet werden.
<i>Lösen Sie ... Bestimmen Sie ... Ermitteln Sie ...</i>	Angabe eines nachvollziehbaren Lösungsweges und Formulieren von Ergebnissen, wobei die Wahl der Mittel (z. B. grafisch, numerisch oder symbolisch) offenbleibt, sofern diese nicht explizit vorgegeben sind; ist ein Ausdrucken elektronisch erzeugter grafischer Lösungen nicht möglich, können die Ergebnisse durch Angabe der Lösungsschritte belegt werden; ein Abzeichnen des Displaybildes ist nicht notwendig.
<i>Berechnen Sie ...</i>	Herbeiführen einer Lösung durch Rechenoperationen aus einem erkennbaren Ansatz, wobei elektronische Hilfsmittel (falls nicht ausgeschlossen) zulässig sind; grafisches Lösen ist nicht gestattet
<i>Begründen Sie ...</i>	Darstellen von kausalen Zusammenhängen, wobei Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen und zu nennen sind
<i>Zeigen Sie ... Weisen Sie nach ... Beweisen Sie ...</i>	Lückenloses Führen eines Beweises in mathematisch strengem Sinne; logisches Schließen unter Verwenden bekannter mathematischer Sätze (ggf. unter Verwenden von Gegenbeispielen)
<i>Widerlegen Sie ...</i>	Aufzeigen eines Widerspruchs durch Rechnung, logisches Schließen oder durch Angeben eines Gegenbeispiels
<i>Leiten Sie her ...</i>	Darstellen, wie ein Sachverhalt oder eine Gleichung aus allgemeineren Sachverhalten oder aus anderen Gleichungen entsteht
<i>Beurteilen Sie ...</i>	Formulieren und Begründen eines selbstständigen Urteils, wobei Fach- und Methodenwissen einzubeziehen ist
<i>Entscheiden Sie ...</i>	Begründetes Festlegen auf eine von mehreren Möglichkeiten
<i>Interpretieren Sie ...</i>	Übertragen der Ergebnisse einer mathematischen Überlegung auf das ursprüngliche Problem (Deuten der Ergebnisse)
<i>Untersuchen Sie ... Bewerten Sie ... Diskutieren Sie ...</i>	Herausfinden und Darlegen von Eigenschaften von Objekten oder Beziehungen zwischen solchen (offene Lösungsdarstellungen bis hin zum mathematischen Aufsatz)



## Dokumentation von Lösungswegen

Der Gebrauch normierter Wendungen hilft, Lösungswege in logisch und sprachlich einwandfreier Form darzustellen.

Dies schließt ein

- den adäquaten Gebrauch bestimmter oder unbestimmter Artikel,
- das exakte Verwenden von Aussagenverknüpfungen wie „und“, „oder“, „wenn, so“, „genau dann, wenn ...“,
- das richtige Benutzen von Quantifizierungen („für jedes“, „es gibt – mindestens – ein“),
- den überlegten Gebrauch schlussfolgernder Formulierungen („weil“, „denn“, „also“, „folglich“, „deshalb“ und dergleichen).

► Das Bestreben, nichts Überflüssiges zuzulassen, hilft dem Hörer oder Leser, sich vollständig auf den Gedankengang zu konzentrieren.

Das gilt auch in den anderen Wissenschaften und in der ernsthaften Auseinandersetzung mit Belangen des täglichen Lebens.

► Die Aufforderung „Berechnen Sie ...“ schließt das Nutzen grafischer Werkzeuge aus.

Für die Dokumentation mathematischer Sachverhalte gelten dieselben Regeln, wie sie allgemein für schriftliche Darstellungen üblich sind:

- Sie sollen leserlich, vollständig und übersichtlich sein.
- Sie sind von treffender Kürze und verzichten auf alles nicht Notwendige.
- Sie sind exakt gegliedert und ohne logische Sprünge.
- Der Gedankengang ist erkennbar und *nachvollziehbar*.

Grafikfähige Taschenrechner und Computerprogramme lösen so manche Aufgabe „auf Knopfdruck“. Aber auch bei Verwendung elektronischer Hilfsmittel bleibt das Grundprinzip bestehen, dass Lösungswege nachvollziehbar und in sprachlich einwandfreier Form darzustellen sind. Hier von darf nur abgewichen werden, wenn dies ausdrücklich erlaubt ist.

■ Fixierung des Lösungswegs in Kurzform, sofern gestattet:  
z. B. durch „Geben Sie an ...“ oder „Nennen Sie ...“.

Ausführliche sprachliche Darstellung, wenn ausdrücklich verlangt:  
z. B. durch „Beschreiben Sie ...“, „Zeigen Sie ...“, „Untersuchen Sie ...“.

Wahl der Lösungsstrategie und Wahl des Werkzeugs (numerisches, grafisches oder Programme) ist frei bei Aufforderungen ohne Einschränkungen:

z. B. „Ermitteln Sie ...“, „Bestimmen Sie ...“, „Untersuchen Sie ...“.

Ziel einer **Präsentation** ist es, Arbeitsergebnisse, auch Lösungswege oder arbeitsorganisatorische Entscheidungen, so darzustellen, dass sie

- durch Veranschaulichungen besser verstanden werden,
- problematisieren und zum Nachdenken anregen und
- im Gedächtnis haften bleiben.

Bei den Präsentationsarten sind zwei Grundformen zu unterscheiden:

### Präsentationen zu einem Vortrag

Tafel, Whiteboard oder Flipchart,  
Pinnwand oder Magnetwand,  
Handout (Handzettel/Thesepapier),  
Overheadfolien oder Computerpräsentation

### Stand-alone-Präsentationen

(standalone, engl. sww. eigenständig)

Poster oder Wandzeitung,  
elektronische Präsentationen im Internet,  
im schulinternen Intranet oder auf Speichermedien

### 1.1.3 Mathematisieren und Modellieren

Beim *Anwenden* von Mathematik und bei der Lösung mathematischer Probleme geht es vorrangig darum, einfache reale Prozesse aus der Umwelt mit den zur Verfügung stehenden Mitteln zu *modellieren*.

- Typische Beispiele für Modellierungen im Bereich der Differenzialrechnung sind:

Anwendungssituation (beschrieben durch eine Funktion $f$ mit $f(t)$ )	Modell
Die durchschnittliche Änderung/die mittlere Steigung/die Durchschnittsgeschwindigkeit/das durchschnittliche Wachstum ... im Zeitraum von $t_1$ bis $t_2$ beträgt ...	Differenzenquotient $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$
Die Steigung/die Momentangeschwindigkeit/die Wachstumsgeschwindigkeit/die Änderungsrate ... zum Zeitpunkt $t$ beträgt ...	Differenzialquotient $f'(t) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

► Modellierung heißt meist, sprachliche Formulierungen in eine mathematische Form zu „übersetzen“.

Das Modellieren vollzieht sich in der Regel in folgenden Schritten:

- Ein reales Problem wird mit eigenen Worten formuliert. Dabei werden möglichst alle Voraussetzungen, Bedingungen und Einflussgrößen erfasst und strukturiert.
- Die reale Situation wird vereinfacht; wesentliche Eigenschaften bleiben erhalten, unwesentliche werden nicht berücksichtigt. Welche Aspekte wesentlich sind, hängt vom Ziel des Modells ab.
- Die Situation wird mathematisiert. Dazu wird das umgangssprachlich formulierte Realmodell in ein formales mathematisches Modell „übersetzt“, beispielsweise mithilfe von Gleichungen oder Ungleichungen, Funktionen, Graphen, Matrizen, Vektoren, Zufallsversuchen u. v. a. m.
- Die Arbeit mit dem mathematischen Modell führt schließlich zu Berechnungen oder zu experimentellen Ergebnissen. Auch Methoden der elektronischen Datenverarbeitung und Computersimulationen ordnen sich hier ein.
- Wird die mathematische Lösung anhand des Ausgangsproblems interpretiert, kann dessen Lösung formuliert werden. Dabei ist die Gültigkeit („Validität“) der verwendeten mathematischen Modelle zu überprüfen. Gegebenenfalls muss das Modell revidiert werden.

► Mathematische Zusammenhänge können auch experimentell, z. B. durch Variation verschiedener Parameter, erkundet werden.

Die Anwendung mathematischer Begriffe und Regeln führt zu typischen Mustern, mit denen außermathematische Situationen mathematisch erfasst werden können.

Derartige **Mathematisierungsmuster** sind Modellvorstellungen, die sich zum Erklären typischer Situationen eignen.

► Die Kenntnis typischer „Mathematisierungsmuster“ liefert wirksame Ansätze, um Anwendungssituationen zu modellieren.

Anwendungssituation		Mathematisierungsmuster
Grafische Darstellung von Funktionen, Auswerten von Klimadiagrammen, Berichte über wirtschaftliche Zusammenhänge, algebraische Beschreibung geometrischer Probleme	führen auf	Diagramme, rechtwinkliges Koordinatensystem und Koordinatenmethode.
Physikalische Sachverhalte wie gleichmäßig beschleunigte Bewegungen oder Wurf	führen auf	quadratische Funktionen.
Die mathematische Beschreibung von Schwingungsvorgängen oder notwendige Berechnungen in ebenen Figuren und in Körpern	führen auf	Winkelfunktionen.
Viele Wachstums- und Zerfallsprozesse	führen auf	Exponentialfunktionen.
Auswerten einer Messreihe: • Ist der Graph eine Gerade, die nicht parallel zur x-Achse ist, • Ist f eine streng monotone Funktion mit der Eigenschaft $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$	dann ist f  dann ist f	eine lineare Funktion mit der Steigung $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ,  eine Exponentialfunktion.
Erfassen und Beschreiben wirtschaftlicher Entscheidungsprobleme	führen oft zu	Gleichungs- und Ungleichungssystemen oder Matrizen.
Die Begriffe wie „Änderungsrate“, Anstieg, Steilheit, Krümmung, Richtungswechsel, Tendenzwechsel usw.	führen zu	Ableitungen.
Die Rekonstruktion eines Bestandes aus Änderungsraten oder das Berechnen einer krummlinig begrenzten Fläche	führen zum	Integral.
Preislisten, Zensurenlisten, Testergebnisse	lassen sich darstellen als	Vektoren und Matrizen.
Orthogonalität von Vektoren, Geraden oder Ebenen	führen zu	Skalarprodukt oder Normalvektor.

Viele wirtschaftliche Probleme können mathematisiert und gelöst werden, wenn man die Beziehungen zwischen den – oftmals in Form von Tabellen oder Listen – gegebenen Daten durch *Gleichungen* und *Gleichungssysteme* ausdrückt.

Ein Produzent elektronischer Haushaltsartikel benötigt zur Herstellung seiner Geräte  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  drei verschiedene Bauelemente  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$ . Die erforderlichen Mengeneinheiten können der folgenden Material- und Preisliste entnommen werden:





	$G_1$	$G_2$	$G_3$	Lagerbestand
$b_1$	1	4	3	116
$b_2$	3	2	1	80
$b_3$	5	5	2	162
Materialkosten pro Gerät	180 €	200 €	100 €	

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 116$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 80$$

$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 162 \quad \Rightarrow x_1 = 12; x_2 = 14; x_3 = 16$$

Das aus der Materialliste abgeleitete Gleichungssystem liefert die Anzahl der Geräte  $G_1$  ( $\hat{=}$   $x_1$ ),  $G_2$  ( $\hat{=}$   $x_2$ ) und  $G_3$  ( $\hat{=}$   $x_3$ ), die aus den vorrätigen Bauelementen hergestellt werden können.

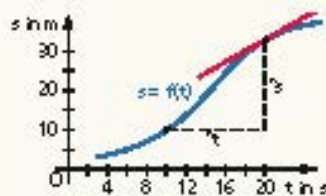
Das Bild zeigt das Weg-Zeit-Diagramm eines geradlinig bewegten Körpers.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers von der zehnten bis zur zwanzigsten Sekunde der Bewegung wird

als Differenzenquotient  $\frac{f(t_{20}) - f(t_{10})}{10}$  berechnet.

Die Augenblicksgeschwindigkeit nach 20 s erhält man als Ableitung der Funktion an der Stelle 20. Mithilfe einer Tangente kann man  $f'(20)$  näherungsweise grafisch ermitteln.

Die Beschleunigung, die der Körper nach 20 s besitzt, führt zur zweiten Ableitung der Funktion  $f$ .



Siehe „Ableitung einer Funktion“ auf Seite 130 f.

Sind von zwei als geradlinig angenommenen Flugbahnen je zwei Koordinaten bekannt, so lässt sich rechnerisch überprüfen, wie groß das Kollisionsrisiko beider Flugzeuge war.

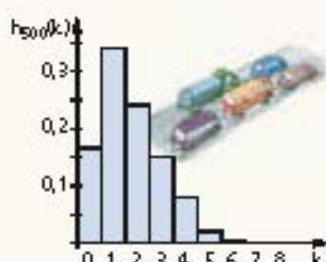
Mithilfe von Koordinaten und Vektoren werden Gleichungen der beiden angenommenen Geraden aufgestellt. Daraus entsteht ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung Aussagen über die Lagebeziehung der Geraden macht.



Siehe „Lagebeziehungen von Geraden“ auf Seite 310 f.

Im Ergebnis einer Verkehrsbeobachtung bei der an einer Kreuzung 500-mal bei zehn nacheinander vorbeifahrenden Pkws registriert wurde, wie viele von ihnen die Farbe Blau besitzen, entstand die nebenstehende Grafik.

Die Gestalt des Säulendiagramms lässt vermuten, dass sich die „Anzahl der blauen Pkws unter zehn zufällig ausgewählten Pkws“ durch das Modell „Binomialverteilung“ beschreiben lässt.



Siehe „Binomialverteilung“ auf Seite 414 ff.



### 15.2.3 Tabellenkalkulationen

Tabellenkalkulationen sind Computernwendungsprogramme, mit denen in Tabellen gerechnet wird. So können

- Listen erstellt,
- Berechnungen mithilfe von Formeln vorgenommen und
- Diagramme erzeugt werden.

► Bekannte Tabellenkalkulationen sind Excel, Lotus 1-2-3, StarCalc und Works.

Hauptanwendungsgebiet sind finanzmathematische und statistische Aufgabenstellungen (Rechnungswesen, Buchhaltung, Lagerwirtschaft), bei denen wiederkehrende Rechnungen mit neuen Ausgangswerten typisch sind. Da beliebige Formeln zu Berechnungen eingesetzt werden können und auch grafische Darstellungen von Funktionen problemlos möglich sind, eignen sich diese Programme aber auch zur Lösung vieler elementarer und schulmathematischer Probleme.

Ein wesentliches Vorteil einer Tabellenkalkulation besteht darin, dass das Programm rechnet und das Ergebnis oder das Diagramm aktualisiert, sobald ein Eingabewert, auf den sich eine Formel bezieht, geändert wird. Dabei ist es von großem praktischem Nutzen, dass die mit einer Tabellenkalkulationssoftware erzeugten Tabellen in Textdateien eingebunden werden können, etwa Excel in Word oder Lotus 1-2-3 in Word pro.

#### Aufstellen von Tabellen; Rechnen mit Formeln

Grundlage einer jeden Tabellenkalkulation sind Tabellen, die sich in Spalten und Zeilen und damit letztlich in einzelne Zellen aufgliedern. In die Zellen können Texte, Zahlen oder Formeln eingetragen werden. Beim Recheweg werden die Inhalte verschiedener Zellen über Operationen miteinander verknüpft. Dazu werden Formeln oder Operationen in den Zellen verankert, in denen das jeweilige Resultat stehen soll.

► Die Oberfläche einer Tabellenkalkulationsprogramms enthält als zentrales Element die Kalkulationstabelle.

- Wachstum eines Anfangskapitals bei jährlichem Zinszuschlag (→ Abschnitt 2.3)

Wachstum eines Anfangskapitals bei jährlichem Zinszuschlag				
Vorgaben		Ergebnisse		
		Jahre n	Endkapital $K_n$	Endkapital $K_{nn}$
1	Anfangskapital $K_0$	20.000,00 €		
2	Zinssatz p	5,00%	1	21.000,00 €
3	Jahre n (1-20)	10	2	22.050,00 €
4	Freibetrag FB	0,00 €	3	23.162,50 €
5	Steuersatz S	25,00%	4	24.310,13 €
			5	25.525,83 €
			6	26.801,91 €
			7	28.142,01 €
			8	29.548,11 €
			9	31.026,56 €
			10	32.577,89 €

► Bei im Festlegen der Zellenverknüpfungen ist zwischen absoluten und relativen Bezügen zu unterscheiden.

Schrittfolge:

1. Anlegen der Tabelle (Textelemente)
2. Eintragen aller Vorgaben (Zahlen) einschließlich der Jahreszahlen
3. Definieren der Zellenverknüpfungen (Formeln), z. B. für das Endkapital  $K_n$  (Zelle D10):

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \text{ also } 20000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n < 10$$

	A	B	C	D
8	Vorgaben			Ergebnisse
9	Anfangskapital $K_0$	20.000,00 €	Jahr $n$	Endkapital $K_n$
10	Zinssatz $p$	5,00%	1	=B9*(1+B10)^C10

4. Kopieren der Formel auf die Ergebniszellen der folgenden Jahre

► Wird der zu berechnende Term in eine Zelle des Arbeitsblatts geschrieben, so berechnet das Kalkulationsprogramm sofort dessen Wert.

Eine Tabellenkalkulation arbeitet an sich auch ohne Zellenverknüpfung:

- Ein Anfangskapital von 20 000 € wird jährlich mit 5 % verzinst. Zu berechnen ist das Endkapital nach fünf Jahren.

Aus  $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$  folgt

$$K_5 = 20\,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5.$$

Ohne Verknüpfung der Zellen:



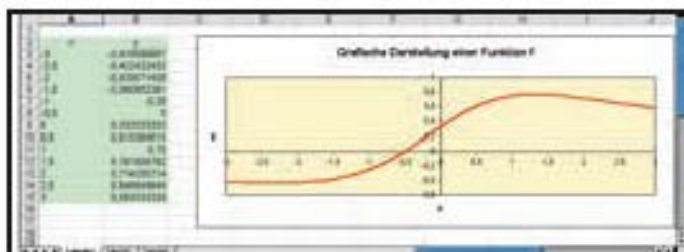
Der große Vorteil der Tabellenkalkulation besteht aber gerade darin, dass über eine Verknüpfung der Zellen jede Änderung eines Eingangswertes sofort ein neues Endergebnis nach sich zieht. Einmal angelegt, steht somit ein für gleichartige Aufgaben immer wieder verwendbares Arbeitsblatt zur Verfügung.

Erzeugen von Diagrammen

Die mit einer Tabellenkalkulation erzeugten Diagramme sind stets mit den Daten einer Tabelle verknüpft.

► Zur grafischen Darstellung einer Funktion muss zuerst eine Wertetabelle aufgestellt werden. Ändert man die Daten der Tabelle, so ändert sich auch das Diagramm.

- Wertetabelle und grafische Darstellung der Funktion  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3}$



Schrittfolge:

- In Spalte A darzustellendes Intervall anlegen
- Funktionsterm in B3 eintragen und in B4 bis B15 kopieren
- Diagramm mithilfe des Diagrammassistenten der jeweiligen Tabellenkalkulation erstellen

## Rechnen mit integrierten Funktionen

Für häufig wiederkehrende Standardberechnungen enthalten die Tabellenkalkulationsprogramme vorbereitete Formeln (sogenannte Funktionen), die nur noch einzufügen und durch spezielle Eingaben zu ergänzen sind. Beispiele der Tabellenkalkulation Excel dafür sind:

- Berechnung einer Wurzel: WURZEL(...)
- Berechnung von  $e^x$ : EXP(...)
- Steigung einer Regressionsgeraden: STEIGUNG(...)
- Berechnung von Binomialverteilungen: BINOMVERT(...)

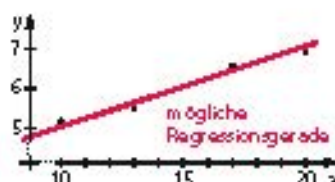
## ■ Ermitteln einer Regressionsgeraden

Gegeben sei die Messwertreihe:

$x_i$	10	13	17	20
$y_i$	5,1	5,5	6,6	6,9

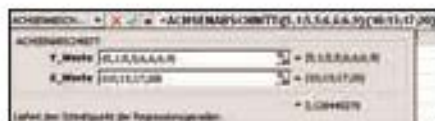
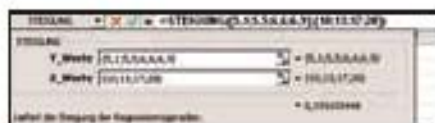
Vermutet wird ein linearer Zusammenhang.

Die Regressionsfunktion  $y = f(x) = mx + n$  ist zu bestimmen.



Steigung  $m$  und absolutes Glied  $n$  werden unter Verwendung der Funktion STEIGUNG(...) und ABSCHNITT(...) berechnet.

Die Tabellenkalkulation liefert die Ergebnisse  $m \approx 0,193$  und  $n \approx 3,128$ .



## Simulation von Zufallsexperimenten mit Excel

## Eingabe

Erzeuge eine Zufallszahl aus dem Intervall $0 \leq Z < 1$ :	= ZUFALLSZAH1()
Erzeuge eine Zufallszahl aus dem Intervall $0 \leq Z < m$ :	m · ZUFALLSZAH1()
Erzeuge eine Zufallszahl aus dem Intervall $1 \leq Z < m$ :	m · ZUFALLSZAH1() + 1
Erzeuge eine ganzzahlige Zufallszahl aus dem Intervall $1 \leq Z < m$ (Ziehen einer von $m$ durchnummerierten Kugeln aus einer Urne):	= GANZZAH1 (m · ZUFALLSZAH1() + 1)
Erzeuge eine Zufallszahl aus der Zweiermenge $\{0; 1\}$ (Werfen einer Münze):	= GANZZAH1 (2 · ZUFALLSZAH1())
Erzeuge eine Zufallszahl aus der Sechsermenge $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (Werfen eines Würfels):	= GANZZAH1 (6 · ZUFALLSZAH1() + 1)



Aus einer Urne mit zwölf weißen und acht schwarzen Kugeln sollen einzeln zehn Kugeln entnommen und sofort wieder zurückgelegt werden. In Spalte A werden die Ziehungen fortlaufend gezählt und in Spalte B werden ganzzahlige Zufallszahlen der Menge  $\{1; 20\}$  erzeugt. In den Spalten C und D wird erfasst, ob eine weiße bzw. eine schwarze Kugel gezogen wurde. Dazu müssen folgende Zellenverknüpfungen vorgenommen werden:

	A	B	C	D
1	Simulation von Ziehungen aus einer Urne			
2	(Die entnommene Kugel wird nach jeder Ziehung zurückgelegt.)			
3	Anzahl der Ziehungen: 10			
4	Anzahl der weißen Kugeln: 12			
5	Anzahl der schwarzen Kugeln: 8			
6			gezogene weiße Kugeln	gezogene schwarze Kugeln
7	Ziehung	Zufallszahl		
8	1	15		
9	2	12		
10	3	16		
11	4	2		
12	5	19		
13	6	3		
14	7	1		
15	8	1		
16	9	8		
17	10	6		
18	Summe			

Zelle B7:  $=\text{GANZZAHL}(\$C\$4 + \$C\$5 * \text{ZUFALLSZAHL}() + 1)$ ,

dann auf B8 bis B16 kopieren

Zelle C7:  $=\text{WENN}(B7 \leq \$C\$4; 1; 0)$ , dann auf C8 bis C16 kopieren

Zelle D7:  $=\text{WENN}(B7 > \$C\$4; 1; 0)$ , dann auf D8 bis D16 kopieren

► Ist ein solches Rechenblatt einmal angelegt, lassen sich damit problemlos Tabellen zur Binomialverteilung aufstellen.

► Beide Formeln könnten aber Zellbezüge in der Tabelle definiert werden. Wesentlich einfacher ist es jedoch, eine im Programm dafür vorgesehene Funktion (in Excel BINOMVERTE...) zu verwenden.

Einer Urne mit 20 Kugeln (10 weißen, 5 grünen und 5 schwarzen) werden „auf gut Glück“ nacheinander und mit Zurücklegen fünf Kugeln entnommen (Abschnitt 13.5).

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden dabei

a) genau  $k$  ( $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ) grüne Kugeln und

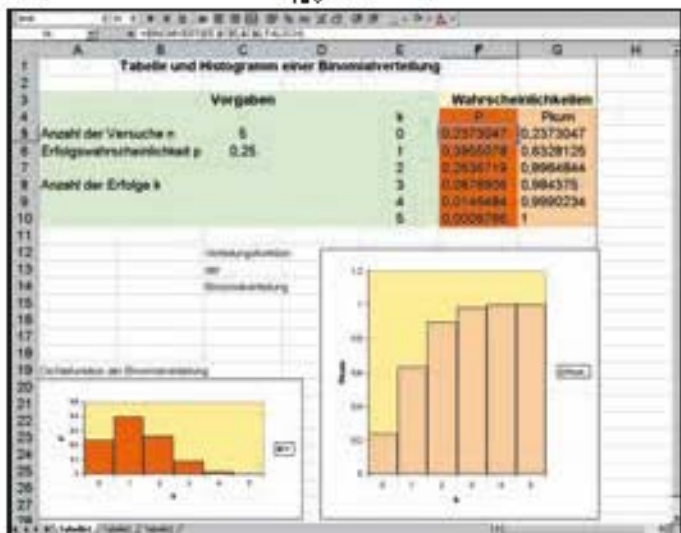
b) höchstens  $k$  ( $k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ) grüne Kugeln entnommen?

Während Frage a) mit der Dichtefunktion

$$P_{\text{np}}(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

zu beantworten ist, sind zu Frage b) kumulierte Wahrscheinlichkeiten zu berechnen; es gilt die Verteilungsfunktion:

$$P_{\text{np}}(0; 1; \dots; k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$$



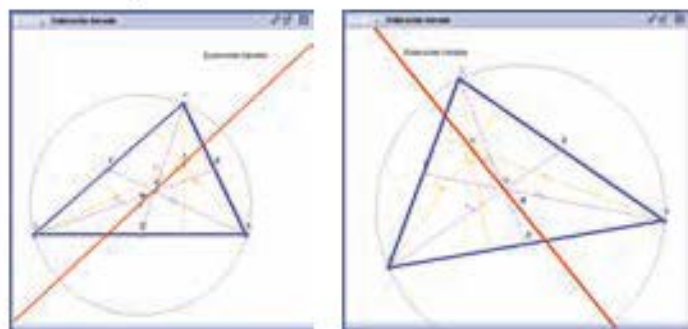
### 15.2.4 Dynamische Geometriesoftware

Für die Darstellung und Untersuchung geometrischer Zusammenhänge am PC gibt es eine Vielzahl von Geometrieprogrammen. Während man mit statischen Programmen „nur“ zeichnen und konstruieren kann, lassen sich Konstruktionen von Polygonen oder Kreisen, die mit dynamischer Geometriesoftware (DGS) erzeugt wurden, stetig verändern. So können Punkte und Geraden verschoben werden, ohne dass sich die damit verbundenen charakteristischen Eigenschaften der Konstruktion ändern. Größen wie Längen und Winkel lassen sich außerdem messen und mit Berechnungen verknüpfen. Das Kernstück einer jeden DGS ist der sogenannte Zugmodus. Er ermöglicht die Dynamisierung der Konstruktion.

#### ■ Eulersche Gerade

Durch Konstruktion eines beliebigen Dreiecks lässt sich zeigen, dass die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden, der Dreieckshöhen und der Mittelpunkt des Umkreises auf einer Geraden, der eulerschen Geraden, liegen.

Durch Ziehen an den Eckpunkten lässt sich das einmal konstruierte Dreieck beliebig verändern. Der veranschaulichte geometrische Zusammenhang, die eulersche Gerade, bleibt dabei erhalten.



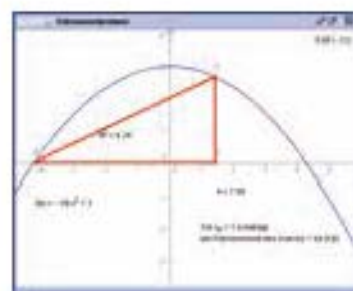
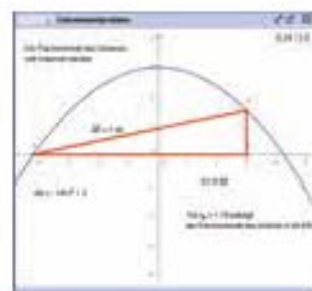
#### ■ Experimentelle Bestimmung von Extremwerten

Dem Graphen der Funktion  $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 3$  ist ein rechtwinkliges Dreieck derart einzubeschreiben, dass ein Eckpunkt mit einem Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse übereinstimmt, ein zweiter Eckpunkt beliebig auf dem Graphen von  $f$  und eine Kathete auf der x-Achse liegt. Aus der Menge aller möglichen Dreiecke ist das mit größtem Flächeninhalt gesucht.

Ist die Funktion grafisch dargestellt, kann ein Dreieck mit den genannten Bedingungen so eingezeichnet werden, dass ein Eckpunkt (P) auf dem Graphen frei beweglich ist. Durch eine vorher definierte Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts wird jede durch Verschieben von P hervorgerufene Änderung des Flächeninhalts unmittelbar angezeigt. Das gesuchte Dreieck mit größtem Flächeninhalt lässt sich dadurch näherungsweise bestimmen.

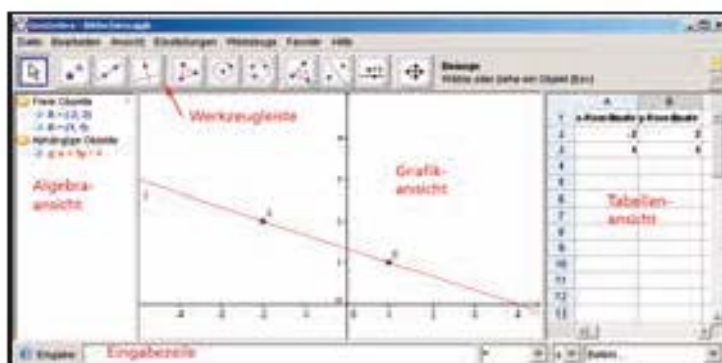
► Bekannte DGS sind Capri Geometrie, Cinderella, Euklid, Dynageo, Geometers Sketchpad oder GeoGebra.

► Mit Hilfe des Mess- und Rechenmodus können Abstände von Punkten und Größen von Winkeln gemessen, angezeigt und in Berechnungen eingebunden werden. Oftmals ist gestattet der Rechenmodus auch die Definition und grafische Darstellung von Funktionen.






Ein Programm mit diesen Eigenschaften ist GeoGebra. Es kann im Internet unter [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) heruntergeladen werden.

Neuere dynamische Geometrieprogramme verbinden geometrische und algebraische Operationen miteinander. Zur Verfügung steht ein Zeichenblatt für geometrische Konstruktionen und für grafische Darstellungen von Funktionen, ein Algebrafenster für algebraische Beschreibungen geometrischer Objekte sowie eine Tabellenansicht. Werden in einem der Fenster Änderungen vorgenommen, so passen sich die Inhalte der jeweils anderen Fenster automatisch an.



### Gerade durch zwei Punkte

Eine Gerade in der Ebene ist entweder durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und durch ihre Steigung festgelegt. Beides kann man zur Konstruktion einer Geraden mit einer Geometriesoftware nutzen. Mithilfe des Werkzeugs *Neuer Punkt*  werden im Grafikfenster zwei Punkte erzeugt, durch die dann nach Auswahl des Werkzeugs *Gerade durch zwei Punkte*  eine Gerade gezeichnet wird. In der Algebraansicht findet man sofort die algebraische Beschreibung aller Objekte: Die beiden Punkte sind mit ihren Koordinaten eingetragen und die Gerade mit ihrer Gleichung (siehe obige Abbildung des Bildschirms). Die Koordinaten der Punkte können zusätzlich in die Tabellenansicht übernommen werden. Verschiebt man die Punkte nach Aktivierung des *Bewegen*-Buttons , so werden sowohl die neuen Koordinaten der Punkte als auch die neue Geradengleichung in der Algebraansicht ausgewiesen.

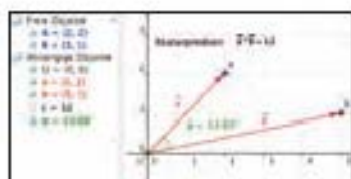


### Skalarprodukt zweier Vektoren

Sind zwei Punkte vorhanden, so kann mit dem Werkzeug Vektor zwischen zwei Punkten

der Verbindungsvektor der Punkte gezeichnet werden.

So wurden im abgebildeten Beispiel die Vektoren  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  dargestellt. Mithilfe des Buttons Winkel lässt sich der Winkel zwischen beiden Vektoren darstellen und anzeigen. Da häufig benötigte Operatoren im Programm als vordefinierte Funktionen vorliegen, kann auch das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  zweier Vektoren sofort berechnet werden. Werden die Vektoren durch Ziehen an den Punkten A oder/und B verändert, so werden die veränderten Vektoren, der Winkel und das neue Skalarprodukt auch in der Algebraansicht aktualisiert.



### Gleichung einer Regressionsgeraden



Werden Messwertpaare als Punkte in ein Koordinatensystem gezeichnet, so kann in dem hier gewählten Beispiel ein linearer Zusammenhang zwischen den x- und den y-Werten vermutet werden. Demzufolge ist eine lineare Regressionsfunktion zu bestimmen.

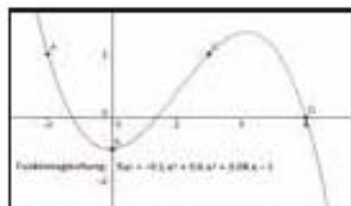
Um die Regressionsgerade zu zeichnen, wird der Button Regressionsgerade im Werkzeugkasten ausgewählt. Zieht man mit der linken Maustaste ein Auswahlrechteck so auf, dass alle Punkte in diesem Rechteck liegen, entsteht sofort die gesuchte Gerade. Im Algebrafenster wird die Geradengleichung angezeigt.

### Gleichungen ganzrationaler Funktionen

Mit dem Befehl `Polynom(A,B,C,D)` wird eine ganzrationale Funktion minimalen Grades erzeugt, deren Graph durch die Punkte A, B, C, D verläuft.

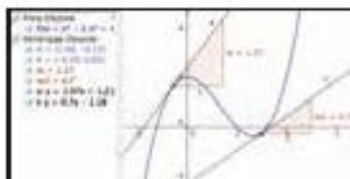
So liefern die Eingaben  $A = (-2, 2)$ ,  $B = (0, -1)$ ,  $C = (3, 2)$  und  $D = (6, 0)$  sofort die grafische Darstellung und die Gleichung der Funktion f mit  $f(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2 + 0,08x - 1$ .

Durch Ziehen an den Punkten (Zugmodus) ändern sich Graph und Gleichung der Funktion.



### Tangente und Steigung einer Funktion

Auf dem Graphen einer zu untersuchenden Funktion, z. B.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , wird ein frei beweglicher Punkt festgelegt. Um die Tangente in diesem Punkt zu zeichnen, wählt man das Werkzeug Tangenten und klickt nacheinander auf den Punkt A und die Funktion f. In der Algebraansicht wird gleichzeitig die Tangentengleichung angegeben. Um ein Steigungsdreieck einzuzichnen und die Steigung der Tangente t angeben zu lassen, genügt es, den Befehl  $m = \text{Steigung}(t)$  in die Eingabezeile einzugeben. Verschiebt man nun den Punkt entlang des Funktionsgraphen, so ändern sich auch Tangente und Tangentengleichung, Steigungsdreieck und die ausgewiesene Steigung.



### Verwendung eines Schiebereglers

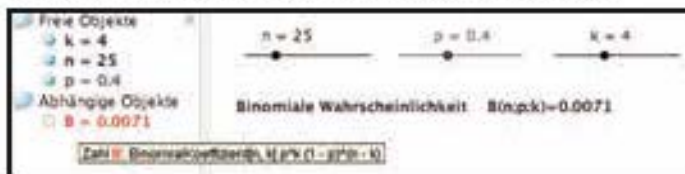
Der Einfluss eines Parameters lässt sich sowohl in grafischen Darstellungen als auch in Berechnungen sehr gut untersuchen, wenn man Schieberegler konstruiert bzw. verwendet.

Wird eine Funktion  $\sin(x + c)$  definiert, so entsteht eine Sinuskurve mit der am Schieberegler eingestellten Verschiebung c. Jede Änderung am Schieberegler wirkt sich unmittelbar auf den Funktionsgraphen aus.



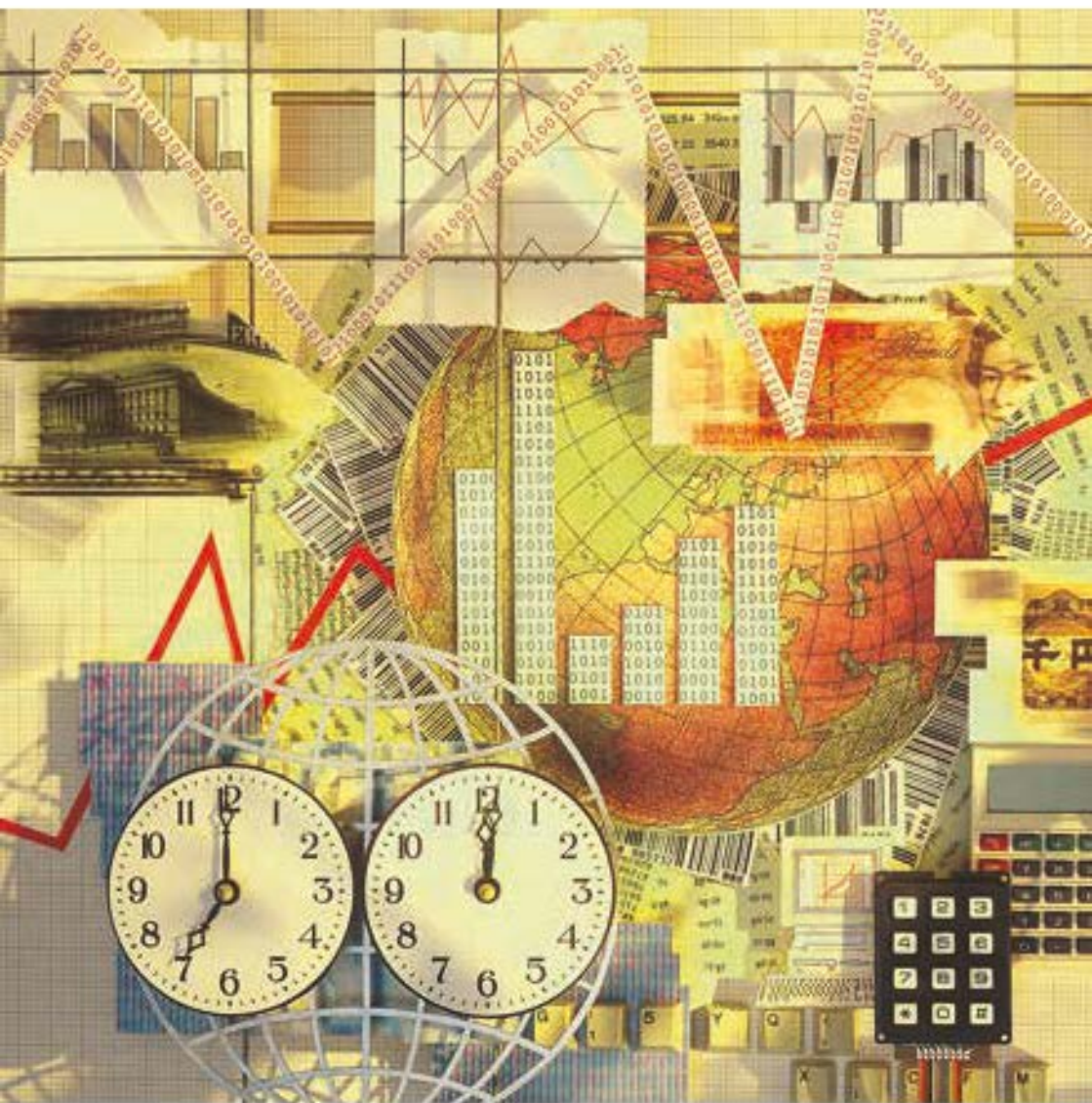
Mit einem Schieberegler lassen sich auch Werte der Binomialverteilung bestimmen, sodass auf entsprechende Tabellen verzichtet werden kann.

Um die Wahrscheinlichkeit B für genau k Erfolge zu berechnen, wird die entsprechende Formel (Seite 415) über die Eingabezeile eingegeben. Für den darin enthaltenen Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  kann der im Programm definierte Befehl `Binomialkoeffizient()` verwendet werden. Die Anzahl n der Versuche, die Wahrscheinlichkeit p und die Anzahl der Erfolge k lassen sich über Schieberegler einstellen.



Anhang

A





## Register

### A

Abakus 462  
 Abbildungsgleichung 375  
 Abbildungsmatrix 374  
 Ableitung 130  
   – höherer Ordnung 135  
   – partielle ~ 143  
 Ableitungsfunktion 133  
 Ableitungsregeln 137  
   – Faktorregel 138  
   – Kettenregel 140  
   – Konstantenregel 137  
   – Potenzregel 137  
   – Produktregel 139  
   – Quotientenregel 140  
   – Summenregel 138  
   – Umkehrregel 141  
 Abstand 334  
   – Punkt/Ebene 334  
   – Punkt/Gerade im Raum 336  
   – Punkt/Gerade in der Ebene 334  
   – von Ebenen 340  
   – von Geraden der Ebene/ des Raumes 337  
 Abtrennungsregel 36  
 ACHENWALL, GOTTFRIED 438  
 Achsenabschnittsgleichung 308  
   – einer Ebene 319  
   – einer Geraden in der Ebene 308  
 Addition von Vektoren 266  
   – Assoziativgesetz 267  
   – Dreiecksregel 266  
   – Kommutativgesetz 267  
   – Parallelogrammregel 266  
   – Vektorkette 268  
 affine Abbildung 376  
 AL-CHWARIZMI 20  
 algebraische Gleichung 90  
 Algorithmus 20  
 allgemeiner Produkt- (Multiplikations-)Satz 401  
 allgemeines Iterationsverfahren 196  
 Alternative 31

Alternativhypothese/Gegenhypothese 448  
 Alternativtest 449  
   – kritischer Wert 453  
   – Testkonstruktion 449  
 Anfangswertproblem 242, 248  
 Anstieg  
   – einer Sekante 131  
   – einer Tangente 131  
 APOLLONIUS VON PERGE 353  
 Approximation von Funktionen 180  
   – Formel von Mac Laurin 188  
   – Interpolation 180, 182  
   – lineare Approximation 184  
   – Regression 180  
   – Schmiegeparabeln 187  
   – Taylor-Entwicklung 180  
 Äquivalenz 33  
 Äquivalenzschluss 38  
 Arbeitsweisen der Mathematik 10  
 ARCHIMEDES 204, 281  
 archimedische Spirale 281  
 Argumentieren 11, 12  
 arithmetisches Mittel 440  
   – gewogenes arithmetisches Mittel 441  
 arithmetische Zahlenfolge 49  
   – Bildungsvorschrift 49  
   – Partialsumme 50  
 Arkusfunktionen 145  
   – Ableitung von ~ 145  
 Asteroide 231  
 Asymptote 125, 166  
 Ausgleichsrechnung 189  
 Aussage 24  
   – Allaussage 25  
   – Existenzaussage 25  
   – logische Operationen 30  
 Aussageform 25  
 Axiom 24, 384

### B

BABBAGE, CHARLES 464  
 Balkendiagramm 444  
 Baumdiagramm 379, 390

bayessche Formel 402  
 BAYES, THOMAS 402  
 bedingte Wahrscheinlichkeit (sverteilung) 401  
   – allgemeiner Produkt- (Multiplikations-)Satz 401  
   – bayessche Formel 402  
   – Rechenregeln 402  
   – Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit 402  
   – spezieller Multiplikations-satz 404  
 Begründen 12  
 Bernoulli-Experiment 414  
   – Wahrscheinlichkeit des ersten Erfolgs 425  
 Bernoulli-Formel 415  
 Bernoulli-Größe 414  
   – Erwartungswert 414  
   – Kenngrößen 414  
 BERNOULLI, JAKOB 201, 414  
 BERNOULLI, JOHANN 56, 151, 201, 251, 256  
 Bernoulli-Kette 415, 451  
   – Erfolgswahrscheinlichkeit 415  
   – Länge 415  
 beschränktes Wachstum 254  
 Beschränktheit 46, 60  
   – nach oben (unten) beschränkte Zahlenfolge 47  
   – Schranke 47  
 beschreibende/deskriptive Statistik 438  
 bestimmtes Integral 204, 205  
   – als Funktion der oberen Grenze 211  
   – Differenzial 205  
   – Eigenschaften 209  
   – Exhaustionsmethode 204  
   – Existenz 208  
   – geometrische Deutung 207, 210  
   – Integralmittelwert 210  
   – Integrand 205  
   – Integrationsgrenzen 205  
   – Integrationsintervall 205  
   – Integrationsregeln 217  
   – Integrationsvariable 205

- bestimmtes Integral/Anwendungen 217
  - Bewegungsabläufe 226
  - Bogenlänge einer ebenen Kurve 230
  - elektrische Ladung 227
  - Flächeninhalt 217
  - Mantelfläche eines Rotationskörpers 231
  - physikalische Arbeit 224
  - Schwerpunkt von Flächen 226
  - Volumen eines Rotationskörpers 228
- Betrag
  - einer komplexen Zahl 258
  - eines Vektors 270, 283
  - Rechnen mit Beträgen 270
- Betragsfunktion 84
- beurteilende Statistik/Prüfstatistik 445
  - Aufgabe 446
- Beweis 25, 39
  - direkter ~ 39
  - indirekter ~ 40
- Beweisverfahren der vollständigen Induktion 40
  - Induktionsanfang 41
  - Induktionsschluss 41
- Bijunktion 33
- Bildungsvorschrift 240
  - explizite ~ 45
  - rekursive ~ 45, 240
- Binomialkoeffizient 394
- Binomialverteilung 416, 451, 477, 478
  - Erwartungswert 426
  - Histogramm der ~ 418
  - Rechenregeln 422
  - Streuung/Varianz 426
  - Tabellierungen der ~ 421
- Bisektionsverfahren 194
- Bogenlänge einer ebenen Kurve 230
- Bogenmaß 76
  - Radiant 77
- BOLZANO, BERNARD 128
- BOMBELLI, RAFFAEL 256
- Boxplot 444
- BUFFON, COMTE GEORGE-LOUIS LECLERC DE 431
- C**
  - CANTOR, GEORG 24
  - Capri Geometrie 479
  - cardanische Formel 91
  - CAS (↗ Computeralgebrasystem) 468
  - Cinderella 479
  - Computeralgebrasysteme 464, 468
    - Programmieren 472
  - CRAMER, GABRIEL 105
  - Curta 464
- D**
  - 3-D-Darstellung 469
  - 3 $\sigma$ -Regel 413, 435
  - DANDELIN, GEMINAL PIERRE 353
  - dandelinsche Kugeln 353
  - DANTZIG, GEORGE BERNARD 113
  - Darstellungssatz für Vektoren 273, 274
  - Definition
    - definiens/definiendum 34
    - explizite ~ 34
    - genetische ~ 35
    - implizite ~ 34
    - Nominaldefinition 35
    - rekursive ~ 35
    - Sachdefinition 35
  - Definitionen 34
  - Definitionslücke 74, 168
    - hebbare ~ 75
  - Derive 469
  - DESCARTES, RENÉ 264
  - Determinanten 104
  - DGS (↗ dynamischer Geometriesoftware) 479
  - Differenzgleichung 240
    - 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 243
    - allgemeine Lösung 242
    - allgemeine Lösung inhomogener linearer ~ 243
    - Anfangswertproblem 242
    - Fixpunkt 241
    - homogene und inhomogene 240
    - lineare 240
    - Lösung 241
    - Lösung homogener linearer ~ 243
    - Lösungsfunktion 241
    - Lösungsschar 242
    - Ordnung 240
    - partikuläre Lösung 242
    - $y_i + 1/y_i$ -Diagramm 240
  - Differenzenquotient 130
  - Differenzial 201, 205
  - Differenzialgleichung 246
    - 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 251
    - 2. Ordnung 249
    - allgemeine Lösung 249
    - Anfangswertproblem 248
    - der Exponentialfunktion 251
    - direktes Integrieren 250
    - explizite Darstellung 246
    - gewöhnliche ~ 246
    - homogene und inhomogene ~ 246
    - implizite Darstellung 246
    - lineare ~ 246
    - Lösung 247
    - Lösung homogener linearer ~ 249
    - Lösungsfunktion 248
    - Lösungsschar 248
    - Lösungsverfahren 250
    - Näherungsverfahren 253
    - numerische Lösungsverfahren 253
    - Ordnung 246
    - partielle ~ 246
    - partikuläre Lösung 249
    - Polygonzugverfahren 253
    - Richtungsfeld 250
    - Runge-Kutta-Verfahren 253
    - Trennen der Variablen 250
    - Veranschaulichung 250
  - Differenzialquotient 131
  - Differenzialrechnung 130
    - mit einem CAS 471
    - Mittelwertsatz der ~ 150

Differenziation 467  
 – numerische ~ 467  
 Differenzierungsregeln 137  
 Differenzierbarkeit 132  
 – Sätze über differenzierbare Funktionen 150  
 – und Stetigkeit 134  
 Differenzmenge 28  
 direkter Beweis 39  
 DIRICHLET, PETER GUSTAV LEJEUNE 56, 85  
 dirichletsche Funktion 85  
 disjunkte Mengen 26  
 Disjunktion 31  
 diskrete Zufallsgröße 406  
 Diskriminante 72, 88  
 Dokumentation 16  
 Doppelungleichung 110  
 Drehung 375  
 Dreieck 282  
 – Flächeninhalt 284  
 – Schwerpunkt 282  
 Durchschnittsmenge 28  
 Dynageo 479  
 dynamische Geometriesoftware 479

## E

Ebene(n) 316  
 – Achsenabschnittsgleichung 319  
 – allgemeine parameterfreie Gleichung einer ~ 318  
 – Dreipunktgleichung 316  
 – Gleichung in Koordinatenschreibweise 317  
 – hessesche Normalform der Gleichung einer ~ 320  
 – im Raum 316  
 – Lagebeziehungen 326  
 – Normalenvektor 320, 321  
 – parameterfreie Gleichung 317  
 – Punktrichtungsgleichung 316  
 – Schnittgerade 327  
 – spezielle ~ 321  
 – zueinander parallele ~ 326  
 e-Funktion 146

Einheitsvektor 270  
 elektronischer Taschenrechner 464  
 Element 24  
 elementfremde Mengen 26  
 Ellipse 354  
 – Brennpunkt 354  
 – Brennpunkteigenschaft 356  
 – Gleichung 355, 356  
 – Haupt-/Nebenachse 354  
 – Haupt-/Nebenscheitel 354  
 – Konstruktion 354  
 – lineare Exzentrizität 355  
 – Mittelpunkt 354  
 – Parametergleichungen 356  
 – Scheitel 354  
 – Symmetrieeigenschaften 354  
 – Tangentengleichung 356  
 – Tangentenkonstruktion 356  
 empirisches Gesetz der großen Zahlen 383  
 empirische Standardabweichung 443  
 empirische Streuung/Varianz 443  
 Ereignis 380  
 – absolute Häufigkeit 382  
 – atomares ~ 381  
 – Elementarereignis 381  
 – Ereignisraum 380  
 – Gegenereignis 381  
 – komplementäres ~ 381  
 – Morgansche Regel 382  
 – paarweise (stochastisch) unabhängige ~ 404  
 – Pfadregel 391  
 – relative Häufigkeit 383  
 – sicheres ~ 381  
 – unmögliches ~ 381  
 – unvereinbares ~ 382  
 – voneinander (stochastisch) unabhängiges ~ 404  
 – Zählprinzip 392  
 Ergebnismenge 378  
 – Baumdiagramm 379  
 – diskrete ~ 379

– endliche ~ 379  
 – Ereignis 380  
 – Wahrscheinlichkeitsfunktion 384  
 – Wahrscheinlichkeitsmaß 384  
 – Wahrscheinlichkeitsverteilung 384  
 – Zerlegung 386  
 Erwartungswert 409  
 EUKLID 479  
 EULER, LEONHARD 48, 56, 256, 264  
 eulersche Formel 262  
 eulersche Gerade 479  
 eulersche Zahl 81  
 $\varepsilon$ -Umgebung 117  
 Excel 475  
 Exhaustionsmethode 204  
 explizite Definition 34  
 Exponentialfunktionen 81, 145  
 – Ableitung von ~ 145  
 Exponentialgleichungen 81  
 exponentielles Wachstum 254  
 Extrema/Extremwerte 155  
 Extrempunkt 471  
 Extremstelle 156  
 – hinreichende Bedingung 158  
 – notwendige Bedingung 157  
 – Vorzeichenwechselkriterium 158  
 Extremwertprobleme 177  
 – Schrittfolge zum Lösen von ~ 178  
 – Zielfunktion 177

## F

Faktorregel 138  
 falksches Schemas 368  
 Fallunterscheidungsregel 37  
 Fehler 1. Art 448  
 – Wahrscheinlichkeit 453  
 Fehler 2. Art 448  
 – Wahrscheinlichkeit 453  
 FERMAT, PIERRE DE 264  
 Fibonacci-Folge 45



- FISHER, RONALD AyLMER 445
- Flächenberechnung durch Integration 233
- Flash 465, 467
- Formel von Mac Laurin 188
- FOURIER, JEAN BAPTISTE JOSEPH DE 56
- Fundamentalsatz der Algebra 91
- Funktion(en) 56
- Ableitung 130
  - abschnittsweise definierte ~ 63
  - Arkusfunktionen 80
  - äußere ~ 66
  - beschränkte ~ 60
  - Beschränktheit 60
  - Betragsfunktion 84
  - Darstellung 58
  - Definitionsbereich 56
  - Definitionslücke 168
  - Differenzenquotient 130
  - Differenzialquotient 131
  - Differenzierbarkeit 131, 132
  - dirichletsche ~ 85
  - Exponentialfunktionen 81
  - Extrema/Extremwerte 155
  - Funktionenschar 67
  - Funktionsgleichung 58, 180
  - Funktionsklassen 68
  - Funktionsterm 58
  - Funktionswert 56
  - ganzrationale ~ 68, 166
  - Ganzzteilfunktion 85
  - gaußsche Klammerfunktion 85
  - gebrochenrationale ~ 68, 74, 166
  - gerade ~ 61
  - grafische Darstellung 465
  - Graph 58
  - Graphenschar 67
  - Grenzwert 123
  - Grenzwertsätze 124
  - hyperbolische ~ 147
  - innere ~ 66
  - inverse ~ 62
  - Kosinusfunktion 75
  - Kotangensfunktion 76
  - Krümmungsverhalten 162
  - Kurvendiskussion 171
  - lineare ~ 70
  - Linkskurve/linksgekrümmt 162
  - Logarithmusfunktionen 82
  - Maximum 128
  - mehrerer unabhängiger Variablen 57
  - Minimum 128
  - monoton fallende ~ 60
  - Monotonie 60
  - Monotonieverhalten 154
  - monoton wachsende ~ 60
  - nichtrationale ~ 168
  - Nullstelle 63
  - Parameterdarstellung 59, 142
  - Periodizität 61
  - Polstelle/Pol 74, 168
  - Polynomfunktion 180
  - Potenzfunktionen 73
  - quadratische ~ 71
  - Rechtskurve/rechtsgekrümmt 162
  - reelle ~ 58
  - Schranke 60
  - Signumfunktion 85
  - Sinusfunktion 75
  - Stetigkeit 126
  - Stetigkeitssätze 127
  - Symmetrie 61
  - Tangensfunktion 75, 78
  - ungerade ~ 61
  - Wendepunkt/-stelle 163
  - Wertebereich 56
  - Wortvorschrift 58
  - Wurzelfunktionen 74
  - zusammengesetzten ~ 64
  - zyklometrische ~ 80
- Funktionenklassen 86
- Funktionenschar 67, 160, 165
- Geradenstreckung 67
  - Graphenschar 67
  - lokale Extrema 160
  - Scharparameter 67
  - Spiegelung 67
  - Verschiebung 67
- Funktionsgleichung 58
- Funktionsterm 58
- G**
- GALILEI, GALILEO 57, 463
- Galton-Brett 389
- GALTON, FRANCIS 389, 445
- ganzrationale Funktionen 68, 166
- Ganzzteilfunktion 85
- GAUSS, CARL FRIEDRICH 51, 91, 256, 264, 443
- gaußsche Klammerfunktion 85
- gaußsche Summenfunktion 432
- gaußsche Zahlenebene 258
- gebrochenrationale Funktionen 68, 74, 166
- Definitionslücke 74
  - Nennerfunktion 74
  - Nullstellenbestimmung 74
  - Polgerade 75
  - Polstelle/Pol 74
- genau dann, wenn ... 46
- geometrische Mittel 52
- geometrische Reihe 122
- Konvergenzkriterium 122
- geometrisches Mittel 442
- geometrische Zahlenfolge 51, 240
- Bildungsvorschrift 52
  - Partialsumme 53
- geordnetes Paar 29
- Gerade(n) 70, 304
- Achsenabschnittsgleichung 308
  - allgemeine parameterfreie Gleichung einer ~ 306
  - einander schneidende ~ 311
  - hessesche Normalform der Gleichung 309
  - Lagebeziehungen 310
  - Normalenvektor 309

- Orthogonalitätsbedingungen 313
  - parameterfreie Gleichung 306
  - Punktrichtungsgleichung 304
  - Schnittwinkel 313, 314
  - zueinander parallele ~ 311
  - zueinander windschiefe ~ 313
  - Zweipunktgleichung 307
  - Geradenstreckung eines Graphen 67
  - Gleichmächtigkeit 27
  - Gleichung(en) 88
    - algebraische ~ 90
    - biquadratische ~ 89
    - Exponentialgleichungen 97
    - goniometrische ~ 95
    - Grad einer ~ 88
    - grafisches Lösen 466
    - lineare ~ 88
    - Logarithmengleichungen 97
    - mit absoluten Beträgen 93
    - numerisches Lösen 467
    - quadratische 88
    - symbolisches Lösen 470
    - transzendente ~ 97
  - Gleichungssystem 466
    - grafisches Lösen 466
    - numerisches Lösen 467
  - Gleichverteilung 388
    - einer stetigen Zufallsgröße 430
    - klassische Wahrscheinlichkeit 389
    - Laplace-Regel 389
    - Laplace-Wahrscheinlichkeit 389
  - globale Extrema 155
  - goldbachsche Vermutung 24
  - goniometrische Gleichungen 95
  - grafikfähige Taschenrechner 465, 468
    - Programmieren 468
  - grafische Darstellung
    - mit CAS 469
    - mit GTR 465
    - mit Tabellenkalkulation 476
  - GRANDI, GUIDO 120
  - GRASSMANN, HERMANN 264
  - Grenzwert 117, 123
    - Funktion 123
    - für  $x \rightarrow \pm\infty$  125
    - uneigentlicher ~ 118
    - Zahlenfolge 117
  - Grenzwertsätze 119, 124
    - Funktion 124
    - Zahlenfolge 119
  - Grundbegriff 24
  - Grundbereich 24
  - Grundgesamtheit 439, 445
    - Stichprobe 446
  - Grundintegrale 202
  - GUNTER, EDMUND 463
- ## H
- Halbebene 111
  - HAMILTON, WILLIAM ROWAN 264
  - Häufigkeit
    - absolute ~ 382, 439
    - relative ~ 383, 439
  - Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 212
  - Heavysidefunktion 134
  - HERZSTARK, CURT 464
  - HESSE, LUDWIG OTTO 309
  - hessesche Normalform
    - der Gleichung einer Ebene 320
    - der Gleichung einer Geraden in der Ebene 309
  - heuristische Strategien 21
  - HIPPOKRATES 204
  - Histogramm 444
  - Hochpunkt 156
  - Horizontalwendepunkt 164
  - Hornerschema 194
  - Hyperbel 73, 357
    - Asymptoten 358
    - Brennpunkt 357
    - Brennpunkteigenschaft 359
  - Gleichung 358
  - Haupt-/Nebenachse 357
  - Konstruktion 357
  - lineare Exzentrizität 357
  - Mittelpunkt 357
  - Scheitel 357
  - Symmetrieeigenschaften 357
  - Tangentengleichung 358
  - Tangentenkonstruktion 359
- hyperbolische Funktion 147
- hyperbolisches Wachstum 254
- hypergeometrische Verteilung 397
- Hypothese 447
  - Alternativhypothese/ Gegenhypothese 448
  - einfache ~ 447
  - Nullhypothese 448
  - Testen von ~ 448
  - zusammengesetzte ~ 447
- ## I
- Implikation 32
    - Konklusion 32
    - Prämisse 32
  - indirekter Beweis 40
  - Infinitesimalrechnung 130
  - Integral 200
    - bestimmtes ~ 204, 205
    - unbestimmtes ~ 201
  - Integralfunktion 211
  - Integralmittelwert 210
  - Integralrechnung
    - mit einem CAS 471
  - Integrand 205
  - Integrandenfunktion 201
  - Integration 467
    - numerische ~ 467
    - partielle 215
  - Integrationsgrenzen 205
  - Integrationsintervall 205
  - Integrationskonstante 201
  - Integrationsmethoden 213
    - lineare Substitution 213
    - nichtlineare Substitution 213
    - Partialbruchzerlegung 215

Integrationsregeln 202, 217  
 Integrationsvariable 201, 205  
 Internet 22, 465  
 Interpolation 180  
 – Polynomansatz 183  
 Intervallschachtelung 194  
 Irrtumswahrscheinlichkeit 448, 456  
 Iteration 193

## J

Junktor 30

## K

Kalkulationstabelle 475  
 Kegelschnitte 353  
 – dandelin'sche Kugeln 353  
 – Ellipse 354  
 – entartete ~ 353  
 – Hyperbel 357  
 – Parabel 359  
 KEPLER, JOHANNES 355  
 keplersche Fassregel 237  
 Kettenlinie 147, 231  
 Kettenregel 140  
 Kettenschluss 36  
 Klasseneinteilung 440  
 klassische Wahrscheinlichkeit 389  
 Klumpenstichprobe 447  
 Koeffizientendeterminante 105  
 Koeffizientenmatrix 362  
 kollinear/Kollinearität 271, 284  
 – von Punkten 284  
 – von Vektoren 271  
 KOLMOGOROW, ANDREI NIKOLAJEWITSCH 384  
 Kombinationen ohne Wiederholung 395  
 Kombinatorik 391  
 Kommunizieren 11, 12  
 komplanar/Koplanarität 271  
 Komplementärmenge 27  
 komplexe Zahl 91, 256  
 – Addition 257  
 – algebraische Darstellung 258

– Anwendungen 262  
 – Betrag 258  
 – Division 261  
 – eulersche Formel 262  
 – Exponentialform 262  
 – gaußsche Zahlenebene 258  
 – Gleichheit 257  
 – imaginäre Einheit 257  
 – imaginäre Zahlen 256  
 – Imaginärteil 258  
 – konjugiert ~ 258  
 – Multiplikation 257, 261  
 – Phase/Phasenwinkel 260  
 – Polarform 260  
 – Realteil 258  
 – Rechenregeln 259, 261, 262  
 – Satz von Moivre 261  
 – trigonometrische Darstellung 260  
 – Umrechnungen 260  
 – Veranschaulichung 258  
 – Zahlenbereichserweiterung 256  
 – Zeigerdiagramm 258  
 Konjunktion 30  
 konkav/konvex 163  
 Konstantenregel 137  
 Kontrapositionsregel 37  
 Konvergenzkriterium 121  
 – für geometrische Reihen 122  
 – Majorante 121  
 – Minorante 121  
 – Vergleichskriterium 121  
 Koordinatensystem 276  
 – Abszissenachse 278  
 – der Ebene 276  
 – im Raum 276  
 – kartesisches ~ 276  
 – Koordinatenachse 278  
 – Koordinatenebene 278  
 – Oktant 278  
 – Ordinatenachse 278  
 – Polarkoordinatensystem 279  
 – Quadrant 278  
 – Rechts-/Linksschraube 277

– schiefwinkliges ~ 279  
 – Ursprung 276  
 Kosinusfunktion 75  
 Kotangensfunktion 76  
 Kreis 342  
 – Definition 342  
 – Gleichung in Vektorschreibweise 342  
 – Koordinatengleichung 343  
 – Lagebeziehungen von ~ 347  
 – Lage Punkt/Kreis in der Ebene 344  
 – Parametergleichungen 345  
 – Passante 346  
 – Sekante 346  
 – Tangente 346  
 – Tangentengleichung 347  
 Kreisdiagramm 444  
 Kreisgleichungen 352  
 Krümmungsverhalten 162  
 Kugelgleichungen 352  
 Kugel(n) 342  
 – Definition 342  
 – Gleichung in Vektorschreibweise 342  
 – Koordinatengleichung 343  
 – Lagebeziehung von ~ 351  
 – Lage Punkt/Kugel 344  
 – Parametergleichungen 345  
 – Passante 348  
 – Sekante 348  
 – Tangente 348  
 – Tangentialebene 349  
 Kurvendiskussion 171  
 – Funktionenschar 175  
 – ganzrationale Funktion 171  
 – gebrochenrationale Funktion 173  
 – nichtrationale Funktion 174

## L

Lagebeziehungen  
 – von Ebenen 326  
 – von Geraden 310



- von Gerade und Ebene 323
- von Kreisen 347
- von Kugeln 351
- Lageparameter 440
  - geometrisches Mittel 442
  - harmonische Mittel 442
  - Median/Zentralwert 441
  - Modalwert/Dichtemittel 442
  - quadratisches Mittel 442
- LAGRANGE, JOSEPH LOUIS 183
- Laplace-Annahme 388
- Laplace-Experiment 388
  - Laplace-(L-) Würfel 388
- Laplace-Regel 389
- LAPLACE, SIMON DE 388
- Laplace-Wahrscheinlichkeit 388
- LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM 56, 130, 201, 464
- LEONARDO FIBONACCI VON PISA 45
- LEXIS, WILHELM 445
- L'HOSPITAL, GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE MARQUIS DE 151
- lineare Abbildung 374
  - Abbildungsgleichung 375
  - affine Abbildung 376
  - Drehung 375
  - Spiegelung 375
  - zentrische Streckung 375
- lineare Approximation 184
- lineare Funktionen 70
  - absolutes Glied 70
  - Anstieg 70
  - Graph 70
  - lineares Glied 70
  - Nullstellenermittlung 70
  - Steigungswinkel 70
- lineare Gleichungssysteme 98, 372
  - Äquivalenzumformung 98
  - Determinanten 104
  - Diagonalform 99
  - Dreiecksform 98
  - gaußsches Eliminierungsverfahren 98
  - Hauptsatz 372
  - homogene ~ 107
  - inhomogene ~ 107
  - Lösung in Vektorschreibweise 102
  - Lösungsmenge 101
  - Matrix eines ~ 100
  - quadratische Systeme 99
  - Regel von Cramer 105
  - Regel von Sarrus 106
  - Trapezform 101
  - Tupel 99
- lineare Interpolation 182
- lineare Optimierung 112
  - Simplex-Methode 113
- lineare Regression 189
  - Ausgleichsrechnung 189
  - Regressionsgerade 189
- lineare Substitution 213
  - partielle Integration 215
- lineares Ungleichungssystem 112
- lineares Wachstum 254
- lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren 286
- lineare Ungleichungen 110
  - Halbebene 111
  - mit zwei Variablen 111
- Linearfaktorzerlegung 90
- Linearkombination der Vektoren 272
  - Koeffizienten 272
  - Nichtparallelität 272
- Linkskurve/linksgekrümmt 162
- Logarithmengleichungen 97
- Logarithmusfunktionen 82, 145
  - Ableitung von ~ 147
  - dekadische ~ 83
  - Logarithmengesetze 83
  - natürliche ~ 83, 148
  - Zusammenhänge zwischen ~ 83
- logische Operationen mit Aussagen 30
  - Alternative 31
  - Äquivalenz 33
  - Bijunktion 33
  - Disjunktion 31
  - Implikation 32
  - Konjunktion 30
  - Negation/Verneinung 30
  - Subjunktion 32
- logistisches Wachstum 254
- lokale Extrema 155
  - einer Funktionenschar 160
- Lösen von Gleichungen 193
- Lösen von Gleichungssystemen 470
- Lösungsfunktion 241, 248

## M

- MACLAURIN, COLIN 188
- Maple 469
- Mathcad 469
- Mathematica 469
- mathematische Software 464
- mathematisch positiver/negativer Drehsinn 277
- Mathematisieren 17
- Mathematisierungsmuster 17
- Matrix/Matrizen 362, 467
  - Abbildungsmatrix 374
  - Addition 365
  - Diagonalmatrix 363
  - Dreiecksmatrix 363
  - eines linearen Gleichungssystems 100
  - Einheitsmatrix 363
  - falsches Schema 368
  - Hauptdiagonale 363
  - Hauptsatz 372
  - inverse ~ 370
  - Koeffizientenmatrix 362
  - Matrizengleichung 369
  - Multiplikation 367
  - Multiplikation mit Vektor 366
  - n-reihige ~ 363
  - Nullmatrix 363
  - Produktmatrix 367
  - quadratische ~ 363
  - Rang 372
  - reguläre ~ 371
  - singuläre ~ 371
  - skalare Vervielfachung 365

- S-Multiplikation 365
- symmetrische/schiefsymmetrische ~ 364
- transponierte ~ 364
- Verflechtungsmatrizen 369
- Verknüpfungsbedingung 367
- Matrizengleichung 369
- Maximum 128, 155
- Median/Zentralwert 441
- Mehrfeldertafel 387
- Menge(n) 24, 445
  - abzählbar unendliche ~ 27
  - Allmenge 25
  - Beschreibung/Angabe von ~ 25
  - disjunkte ~ 26
  - Elemente 24
  - elementfremde ~ 26
  - Gleichmächtigkeit 27
  - Grundbereich 24
  - Komplementärmenge 27
  - leere ~ 25
  - statistische ~ 445
  - überabzählbar unendliche ~ 27
- Mengenoperationen
  - Differenzmenge 28
  - Durchschnittsmenge 28
  - Potenzmengen 29
  - Produktmenge 29
  - Vereinigungsmenge 27
- Mengenrelationen
  - disjunkte Mengen 26
  - elementfremde Mengen 26
  - Gleichmächtigkeit 27
  - Obermenge 26
  - Teilmenge 26
  - überschschnittene Menge 26
- MéRé, ANTONIE GOMBAUD DE 426
- Merkmale/Kenngrößen statistischer Erhebungen 438
  - arithmetisches Mittel 440
  - Lageparameter 440
  - qualitatives ~ 439
  - qualitativ nominales ~ 439
  - qualitativ ordinales ~ 439
  - quantitativ diskretes ~ 439
  - quantitatives ~ 439
  - quantitativ stetiges ~ 439
  - Streuungsparameter 440, 442
- Methode
  - empirisch-experimentelle ~ 13
  - hermeneutische ~ 13
  - mathematisch-analytische ~ 13
- Methode der kleinsten Quadrate 189
- Minimum 128, 155
- MISES, RICHARD VON 383
- Mittelwertsatz der Differenzialrechnung 150
- Mittelwertsatz der Integralrechnung 210
- mittlere absolute Abweichung 443
- Modalwert/Dichtemittel 442
- Modellieren 11, 17
- MOIVRE, ABRAHAM 261
- Monotonie 46, 60
  - monoton wachsende/fallende Funktion 60
  - (streng) monoton fallende Zahlenfolge 46
  - (streng) monoton wachsende Zahlenfolge 46
- Monotonieverhalten 154
- Monte-Carlo-Methode 431
  - buffonsches Nadelwurf-experiment 431
- MORGAN, AUGUSTUS DE 382
- Münzwurf 468
- MuPAD 469
- N
  - nach oben beschränkte Funktion 60
  - nach unten beschränkte Funktion 60
- Näherungsverfahren 193, 198
  - allgemeines Iterationsverfahren 193
  - Bisektionsverfahren 194
  - Interpolation 182
  - regula falsi 195
- NAPIER, JOHN 463
- Negation/Verneinung 30
- neue Medien 22
- NEWTON, ISAAC 130, 195
- newtonsches Näherungsverfahren 198
- NEYMAN, JERZY 445
- nichtrationale Funktionen 168
- Normalenvektor 294
  - einer Ebene 320
  - einer Geraden 308
  - Normaleneinheitsvektor 308
- Normalverteilung 432
  - 3 $\sigma$ -Regel 435
  - Erwartungswert/Streuung 432
  - Standardnormalverteilung 432
- n-Tupel 29
- Nullfolge 118
- Nullhypothese 448
- Nullstellen 72
- Nullstellenermittlung 70
  - grafische ~ 193, 466
  - im Bereich der komplexen Zahlen 92
  - linearer Funktionen 70
  - mit einem CAS 469
  - quadratischer Funktionen 72
- Nullstellensatz von Bolzano 128
- Nullvektor 267
- numerische Differenziation 467
- numerische Integration 236, 467
  - Rechteckmethode 236
  - Trapezmethode 236
- numerische Lösung 241
- numerische Lösungsverfahren 253

## O

Obermenge 26  
 Obersumme 206  
 Operatoren 14  
 Optimierung, lineare 112  
 Orthogonalitätsbedingung 313  
 Ortskurve/Ortslinie 160  
 – der Wendepunkte 165  
 Ortsvektor 276  
 OUGHTRED, WILLIAM 463

## P

Parabel 71, 181, 359  
 – Achse 359  
 – Brennpunkt 359  
 – Brennpunkteigenschaft 360  
 – Gleichung 360  
 – Konstruktion 359  
 – Leitlinie 359  
 – Normalparabel 71  
 – Parameter 359  
 – Scheitel 359  
 – Scheitelpunkt 71  
 – Tangentengleichung 360  
 – Tangentenkonstruktion 360  
 parallel/Parallelität 271  
 – Nichtparallelität 272  
 Parameter 304, 359  
 Parameterdarstellung 59  
 – archimedische Spirale 281  
 – Kreis 279  
 Partialbruchzerlegung 215  
 Partialsumme 48  
 – Partialsummenfolge 48  
 partielle Ableitung 143  
 partikuläre Lösung 242, 249  
 PASCAL, BLAISE 426, 464  
 Pascaline 464  
 PEANO, GIUSEPPE 34  
 PEARSON, EGON SHARPE 445  
 Periodizität 61  
 Permutationen (ohne Wiederholung) 393  
 Personalcomputer 464  
 Pfadregel 391  
 – erste Pfadregel (Produktregel) 391

– Verzweigungsregel 391  
 – zweite Pfadregel (Summenregel) 391  
 Pivot-Zeile 98  
 Poissonverteilung 430  
 Polarkoordinatensystem 279  
 – archimedische Spirale 281  
 – ebenes ~ 279  
 – geografische Breite 280  
 – geografische Länge 280  
 – räumliches ~ 280  
 Polstelle/Pol 74, 168  
 – Polgerade 75  
 Polygonzugverfahren 253  
 Polynom 90  
 Polynomdivision 90  
 Polynomfunktion 180  
 Population 445  
 – Grundgesamtheit 445  
 Potenzfunktionen 73, 144  
 – Ableitung von ~ 144  
 – Hyperbel 73  
 Potenzmengen 29  
 Potenzregel 137  
 Präsentation 16  
 Prinzip des Koordinatenvergleichs 275  
 Prinzip des unzureichenden Grundes 388  
 Problemlösen 11, 20  
 Produktmenge 29  
 Produktregel 139  
 Proportionalwinkel/Proportionalzirkel 463  
 Punktprobe 311, 317  
 Punktrichtungsgleichung einer Ebene 316  
 – Richtungsvektor 316  
 – Spannvektor 316  
 – Trägerpunkt 316  
 Punktrichtungsgleichung einer Geraden 304  
 – in Koordinatenschreibweise 306  
 – in Parameterform 304  
 – in Vektorform 304  
 – Richtungsvektor 304, 307  
 – Stützpunkt 304  
 – Stützvektor 304  
 – Trägerpunkt 304

## Q

quadratische Funktionen 71  
 – allgemeine 73  
 – Diskriminante 72  
 – Normalparabel 71  
 – Nullstellenermittlung 63  
 – Parabel 71  
 – quadratisches Glied 71  
 Quotientenregel 140

## R

Random-Funktion 383, 400, 468  
 Rechenablaufplan 20  
 Rechenbrett 462  
 Rechenhilfsmittel 462, 465  
 Rechenmaschinen 464  
 – Curta 464  
 – elektronische ~ 464  
 – Lochkartensteuerung 464  
 – mechanische ~ 464  
 – Pascaline 464  
 – Staffelwalzenmaschine 464  
 – Tischrechner 464  
 – Vierspeziesmaschine 464  
 – Zweispeziesrechner 464  
 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten 385  
 Rechenscheiben 463  
 Rechenschieber 463  
 Rechenstab 463  
 Rechenstäbchen 463  
 Rechtskurve/rechtsgekrümmt 162  
 Regel von Cramer 104  
 Regel von de l'Hospital 151  
 Regel von Sarrus 106  
 Regression 180  
 – lineare 189  
 Regressionsgerade 189  
 regula falsi 195, 198  
 Reihe 120  
 – arithmetische ~ 122  
 – geometrische 122  
 – harmonische 121  
 – Konvergenzkriterium 121  
 – Summe 120  
 – unendliche 120  
 Richtungsfeld 250  
 RIEMANN, BERNHARD 205



Riemann-Integral 205  
 Riemann-Summen 205  
 ROLLE, MICHEL 150  
 Rotationskörper 228, 469  
 – Mantelfläche eines ~ 231  
 – Volumen eines ~ 228  
 Runge-Kutta-Verfahren 253  
 RUSSELL, BERTRAND 24  
 russellsche Antinomien 24

## S

SARRUS, PIERRE-FRÉDÉRIC 106  
 Sattelpunkt 164  
 Sätze über differenzierbare Funktionen 150  
 Satz vom ausgeschlossenen Dritten 32  
 Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch 31  
 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit 402  
 Satz von Rolle 150  
 Satz von Taylor 188  
 Satz von Vieta 256  
 Satz von Weierstrass 128  
 Säulendiagramm 444  
 SCHICKHARDT, WILHELM 464  
 Schluss auf/aus Negation 38  
 Schluss auf eine Allaussage 36  
 Schlussregeln 36  
 – Abtrennungsregel 36  
 – Äquivalenzschluss 38  
 – Fallunterscheidungsregel 37  
 – Kettenschluss 36  
 – Kontrapositionsregel 37  
 – Schluss auf Allaussage 36  
 – Schluss auf/aus Negation 38  
 Schmiegeparabeln 187  
 Schnittwinkel 313, 314  
 – einer Geraden mit einer Ebene 331  
 – von Geraden der Ebene 313  
 – zweier Ebenen 331  
 – zweier Geraden im Raum 330

Sekantennäherungsverfahren 195, 198  
 signifikanter Unterschied 448  
 Signifikanzniveau 448, 456  
 Signifikanztest 449, 456  
 – einseitiger 458  
 – linksseitiger 458, 459  
 – rechtsseitiger 458, 459  
 – statistische Sicherheit 457  
 – zweiseitiger 457, 458, 459  
 Signumfunktion 85  
 Simplex-Methode 113  
 simpsonsche Regel 237  
 SIMPSON, THOMAS 237  
 Simulation 395, 468  
 – Urnenmodell 396  
 – Zufallszahlen 398  
 Sinusfunktion 75  
 – allgemeine 78  
 – Amplitude 79  
 – Nullstellen 79  
 – Periodenlänge 79  
 – Phasenverschiebung 79  
 Skalarprodukt von Vektoren 288  
 – Berechnung aus den Koordinaten 290  
 – Eigenschaften 289  
 S-Multiplikation 365  
 Software, mathematische 464  
 solve 467, 470  
 Spannweite/Variationsbreite, -weite 442  
 Spat-(Parallelepipeds-) Volumen 295  
 Spatprodukt 295  
 Speicher 465, 472  
 spezieller Multiplikationssatz 404  
 Spiegelung 375  
 Spiegelung eines Graphen 67  
 Sprache, mathematische 14  
 Staffelwalzenmaschine 464  
 Stammfunktion 200  
 – Grundintegrale 202  
 Standardabweichung 411  
 Standardnormalverteilung 432  
 – Dichtefunktion 432

– Erwartungswert/Streuung 433  
 – gaußsche Summenfunktion 432  
 – Verteilungsfunktion 432  
 – zentraler Grenzwertsatz 435  
 Statistik, beschreibende/deskriptive 438  
 stetige Zufallsgröße 430  
 – exponentiell verteilte ~ 431  
 – geometrische Wahrscheinlichkeitsverteilung 431  
 – gleichverteilte ~ 430  
 – normalverteilte ~ 432  
 – standardnormalverteilte ~ 432  
 Stetigkeit 126, 134  
 – links-/rechtsseitige ~ 127  
 – stetige Fortsetzung 126  
 – stetig hebbbar/stetig ergänzbar 126  
 – unstetig 126  
 Stetigkeitssätze 127  
 Stichprobe 446, 447  
 – Auswahlssatz 447  
 – hochsignifikanter Unterschied 456  
 – Klumpenstichprobe 447  
 – (proportional) geschichtete ~ 447  
 – repräsentative ~ 446  
 – signifikanter Unterschied 456  
 – Stichprobenumfang 446  
 – Stichprobenwert 446  
 – Zufallsstichprobe 447  
 Strategien, heuristische 21  
 Strecke 282  
 – Länge 283  
 – Mittelpunkt 282  
 Streifendiagramm 444  
 Streudiagramm 444  
 Streuung 411  
 Streuungsparameter 440, 442  
 – empirische Standardabweichung 443  
 – empirische Streuung/Varianz 443

- mittlere absolute Abweichung 443
- Spannweite/Variationsbreite, -weite 442
- Subjunktion 32
- Substitution 89, 96, 97
- Subtraktion von Vektoren 268
- Summenregel 138
- Summenzeichen 48
- symbolisches Rechnen 468
- Symmetrie 61
  - gerade Funktion 61
  - ungerade Funktion 61

**T**

- Tabellenkalkulationen 475
- Tangensfunktion 75
- Tangente 352
- Tangentennäherungsverfahren 195, 198
- Tangentenproblem 131
- Tangentialebene 352
- Taschenrechner 464
  - elektronischer ~ 464
  - grafikfähiger ~ 465, 468
- Tautologie 31, 36
  - Schlussregel 36
- TAYLOR, BROOK 185
- Taylor-Entwicklung 180
- Taylor-Reihe 186
- taylorsche Formel 185
- taylorsche Näherungspolynome 185
- Teilmengen 26
- Terrassenpunkt 164
- Testen von Hypothesen 448
  - Ablehnungsbereich 448
  - Alternativtest 449
  - Annahmebereich 448
  - Fehler 1. Art 448
  - Fehler 2. Art 448
  - Irrtumswahrscheinlichkeit 448, 456
  - Signifikanzniveau 448, 456
  - Signifikanztest 449, 456
- Tiefpunkt 156
- Tischrechner 464
- transzendente Gleichung 97

- trigonometrische Funktionen 75, 144
  - Ableitung von ~ 144
  - Arkusfunktionen 80
  - Eigenschaften 77
  - Komplementärwinkelbeziehung 78
  - Kosinusfunktion 75
  - Kotangensfunktion 76
  - Quadrantenbeziehungen 78
  - Sinusfunktion 75
  - spezielle Funktionswerte 78
  - Tangensfunktion 75
  - Umkehrfunktionen 80
  - zyklometrische Funktionen 80
- trigonometrische Gleichungen 95
- Tripel 29, 99
- TSCHEBYSCHEW, PAFNUTI LWOWITSCH 412, 445
- tschebyschewsche Ungleichung 412
- TULLIUS, SERVIUS 438
- Tupel 99

**U**

- überschnittene Menge 26
- Ulam-Folge 35
- ULAM, STAN 35
- Umkehrfunktion 62
- Umkehrregel 141
- unbestimmtes Integral 201
  - Differenzial 201
  - Integrand/Integrandenfunktion 201
  - Integrationskonstante 201
  - Integrationsregeln 202
  - Integrationsvariable 201
- uneigentliches Integral 234
- Ungleichungen 110
- Ungleichungssystem 112
- Unstetigkeitsstellen 126, 168
  - endlicher Sprung 127
  - hebbare ~ 170
  - Lücke 126, 170
  - Polstellen 168
- Sprünge 170
- unendlicher Sprung 127
- Untersumme 206
- Urliste 439
  - Diagramm 439
  - Strichliste 439
- Urnenmodell 396

**V**

- Variablenbindung 25
- Variationen
  - mit Wiederholung 394
  - ohne Wiederholung 395
- Vektor(en) 265
  - Addition 266
  - Basis 273, 274
  - Betrag eines ~ 270, 283
  - Darstellungssatz für ~ 273, 274
  - Einheitsvektor 270
  - entgegengesetzter ~ 268
  - Gleichheit 266
  - kollinear/Kollinearität 271
  - komplanar/Komplanarität 271
  - Komponenten 273, 274
  - Koordinaten 273, 274
  - Koordinatenvergleich 275
  - lineare Hülle 301
  - Linearkombination von ~ 272
  - linear (un-)abhängige ~ 286
  - Normaleinheitsvektor 308
  - Normalenvektor 294
  - Nullvektor 267
  - Orthogonalitätsbedingung 291
  - Orthogonalität von ~ 276, 289
  - Ortsvektor 276
  - parallel/Parallelität 271
  - Repräsentant von ~ 265
  - Richtungskosinuswerte 292
  - Skalarprodukt 288
  - Spaltenvektor 277

- Spatprodukt 295
- Subtraktion von ~ 268
- vektorielle Größen 265
- Vektorprodukt 293
- Vervielfachung eines ~ 268
- Zeilenvektor 277
- Vektorkette 268
- Vektorprodukt 293, 294
  - mehrfaches ~ 296
  - Rechengesetze 293
- Vektorraum 299
  - Basis 302
  - Dimension 302
  - Erzeugendensystem 301
  - Unterraum 300
- VENN, JOHN 26
- Venn-Diagramm 381
- Vereinigungsmenge 27
- Verflechtungsmatrizen 369
- Verhalten im Unendlichen
  - ganzrationale Funktionen 166
  - gebrochenrationale Funktionen 166
  - nichtrationale Funktionen 168
- Verkettung von Funktionen 66
- Verknüpfung von Funktionen 65
- Verschiebung eines Graphen 67
- Verteilungsfunktion der Zufallsgröße 407
  - kumulierte (summierte) Wahrscheinlichkeit 407
- Vielfachung eines Vektors 268
  - Rechnen mit Vervielfachungen 269
- Vierfarbenproblem 24
- Vierfeldertafel 381
  - mit Parametern 387
- Vierspeziesmaschine 464
- VIETA, FRANÇOIS 89, 264
- Vorzeichenfunktion 85
- Vorzeichenwechselkriterium 158

## W

- Wachstum 475
- Wachstumsprozesse 147
- Wachstums-/Zerfallsprozesse 54
- Wahrscheinlichkeit(stheorie) 378, 383
  - axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff 384
  - Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitstheorie 384
  - bedingte ~ 401
  - frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff 383
  - klassische ~ 389
  - Rechenregeln 385
  - statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff 383
- Wahrscheinlichkeitsverteilung 384, 407
  - bedingte ~ 401
  - Binomialverteilung 416
  - Darstellung einer ~ 408
  - geometrische ~ 431
  - Gleichverteilung 388
  - hypergeometrische Verteilung 397
  - Laplace-Annahme 388
  - Laplace-Experiment 388
  - Poissonverteilung 430
- WEIERSTRASS, KARL THEODOR 128
- Wendepunkt/Wendestelle 163
  - hinreichende Bedingung 164
  - notwendige Bedingung 164
- WEYL, HERMANN 264
- Works 475
- worksheet 469
- Wurzelfunktionen 74
- Wurzelgleichungen 94
- Wurzelsatz von Vieta 89

## Z

- Zahlenbereichserweiterung 256
- Zahlenfolge(n) 44
  - allgemeines Glied 45
  - alternierende ~ 47

- arithmetische ~ 49
- Beschränktheit 47
- bestimmte divergente ~ 118
- Bildungsvorschrift 45, 49
- Darstellungsmöglichkeiten 45
- divergente ~ 118
- endliche ~ 45
- geometrische ~ 51
- Glieder 44
- Grenzwert 117
- Grenzwertkriterium 118
- Grenzwertsätze 119
- Index 44
- konstante ~ 45
- konvergente ~ 117
- Kurzschreibweise 44
- Monotonie 46
- Nullfolge 118
- Partialsumme 48
- Partialsummenfolge 48
- reelle ~ 44
- Reihe 120
- Schranke 47
- Ulam-Folge 35
- unendliche ~ 45
- $\varepsilon$ -Umgebung 117
- Zählprinzipien 392
  - für k-Tupel 392
  - für Mengen 395
  - Kombinationen ohne Wiederholung 395
  - Permutationen (ohne Wiederholung) 393
  - Simulationen 395
  - Urnenmodell 396
  - Variationen mit Wiederholung 394
  - Variationen ohne Wiederholung 395
- zentraler Grenzwertsatz 435
- zentrische Streckung 375
- Zerfallsprozesse 147
- Zielfunktion 177
- Zinsberechnung 53
  - Aufzinsfaktor 54
  - Zinseszinsen 54
- Zufallsexperiment 378
  - absolute Häufigkeit 382
  - Baumdiagramm 390



- Bernoulli-Experiment 414
- Ereignis 380
- Ergebnismenge 378
- Gesetz der großen Zahlen 383
- k-stufiges ~ 379
- mehrstufiges ~ 379
- relative Häufigkeit 382
- Vierfeldertafeln 381
- Zufallsgröße 406
- Zufallsgröße 406, 446
- 3 $\sigma$ -Regel 413
- Bernoulli-Größe 414
- Dichtefunktion 430
- diskrete ~ 406
- endliche ~ 406
- Erwartungswert 409
- geometrisch verteilt 425
- Standardabweichung 411
- stetige ~ 430
- Streuung 411
- tschebyschewsche Ungleichung 412
- Verteilungsfunktion 407, 430
- Wahrscheinlichkeitsverteilung 407
- Zufallszahlen 398, 468
- Pseudozufallszahlen 400
- Zugmodus 479
- ZUSE, KONRAD 464
- Zweipunktgleichung einer Geraden 307
- in Koordinatenschreibweise 308
- Zweispieziesrechner 464
- Zwischenwertsatz 128

## Bildquellenverzeichnis

Adam Opel AG 56/3, 131/1; Joachim Barig, Berlin 43/1; Bibliographisches Institut GmbH, Berlin 455/1; Hubert Bossek, Hoppegarten 224/1, 465/1; © CORBIS/Royalty-Free 55/1, 437/1; Cornelsen Experimenta 79/1; Cornelsen Schulverlage GmbH 63/4, 351/3, 463/3; Deutsche Post 63/6; Fontshop 483/1; © GaToR-GfX – Fotolia.com 377/1; © theowl84 – Fotolia.com 11/1; © Udo Bojahr – Fotolia.com 464/2; mgo/in-effigie.de 199/1; Sibylle Haase, Bremen 63/7; IMA, Hannover 454/1; Intel GmbH, München 255/1; Kintzel, B., Berlin 281/2, 459/1; S. Levy/T. Munzner, National Center for Supercomputing Applications, Champaign, IL, USA 9/1; G. Liesenberg, Berlin 10/2, 342/1, 393/1, 462/1, 462/2, 463/2, 464/1; B. Mahler, Fotograf, Berlin 458/1; MEV Verlag, Augsburg 361/1, 438/1, 456/1, 461/1, 468/1; Meyer, L., Potsdam 19/2, 82/1; NASA, Nick Galante/PMRF 87/1; Photo Disc Inc. 53/1, 154/1, 162/1, 227/1, 239/1, 303/1, 347/1, 455/2; picture-alliance/HB Verlag 288/1; PlanetSolar 323/1; Schwaneberger Verlag GmbH 63/5; shutterstock.com/Wessel du Plooy 130/1; shutterstock.com/Luciano Mortula 129/1; Siemens AG/München 115/1; Siemens-Pressebild 18/1, 263/1; Dr. Sonnenfeld, Gerd, Fredersdorf 398/1; Weber, Karlheinz, Berlin 310/2, 334/1, 334/2, 336/1, 337/1, 340/1