Mathematik

Abiturbuch

Auszüge

2018

Bayern

Ausführliche Lösungen zu den Abituraufgaben Mathematik

Prüfung 2017
Prüfung 2016
Prüfung 2015
Prüfung 2014

Mathematik

Abiturbuch 2018

Bayern

Herausgeber: Ionut Radulescu

Hartmann & Radulescu GbR, Ionut Radulescu, Professor-Messerschmitt-Str. 9, 86159 Augsburg

www.deinabitur.de

Druck: KRAUS druck & medien GmbH, 86316 Friedberg

Illustration Comics: Sebastian Ecchius, 86368 Gersthofen

ISBN 978-3-947558-00-1

Liebe zukünftige Abiturientin, lieber zukünftiger Abiturient,

mit diesem Buch wollen wir Dir die Vorbereitung auf das Mathematik-Abitur so einfach wie möglich machen. Uns ist es vor allem wichtig, die Standardaufgaben herauszuarbeiten und Dir zu zeigen, mit welchen „Kochrezepten“ man diese Aufgabentypen lösen kann.

Je nach mathematischem Teilgebiet (**Analysis**, **Stochastik** und **Geometrie**) sieht ein Kochrezept in unserem Buch zum Beispiel so aus:

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Tiefpunkt (Minimum).

positiv
⇨ TP

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$
⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Hochpunkt (Maximum).

negativ
⇨ HP

Unser Abibuch ist als Ergänzung zu unserem Kursbuch gedacht, welches wir in unseren DeinAbitur-Vorbereitungskursen verwenden. In unseren DeinAbitur-Kursen gehen wir die verschiedenen Themen durch, üben die Kochrezepte und Standardaufgaben ein und erklären Dir, an welchen Keywords Du erkennst, welcher Aufgabentyp vorliegt. Danach solltest Du an einer kompletten Abituraufgabe üben, wie Du im größeren Kontext anhand der verschiedenen „Keywords“ die Standardaufgabentypen erkennst.
Und genau an dieser Stelle soll das vorliegende Abibuch einsetzen:

In diesem Buch haben wir die Angaben und Lösungen der Aufgaben der Jahre 2014-2017 abgedruckt.

Für jede Aufgabe stehen deinem Lehrer immer zwei Alternativen zur Verfügung. Am Morgen deines Mathematikabiturs wählt dein Lehrer oder deine Lehrerin zum Beispiel in Analysis Aufgabengruppe 1 aus. Wenn bei Analysis im Teil A Aufgabengruppe 1 gewählt wird, dann muss auch im Teil B Aufgabengruppe 1 gewählt werden. Jedoch kann bei Stochastik oder Geometrie wieder eine andere Aufgabengruppe gewählt werden. Nur Teil A und Teil B müssen zu einer Aufgabengruppe gehören.

Im Abitur bekommst Du ein Geheft, in dem die Hälfte der Aufgaben durchgestrichen sind. Wenn Du also in diesem Buch das 2017er Abitur siehst, ist dies die doppelte Anzahl an Aufgaben (Aufgabengruppe 1 und 2).
Wir haben uns entschieden jeweils ein Abitur komplett abzudrucken, damit Du besser einschätzen kannst, was auf Dich zukommt. Solltest Du beispiels-

weise zuerst alle Analysis Aufgaben rechnen wollen, kannst Du die jeweiligen Teilgebiete schnell an den verschiedenen Farben erkennen
(Analysis, Stochastik und Geometrie)

Damit Du unsere Lösungswege besser nachvollziehen kannst, sind unsere Lösungen meistens länger, als sie im Abitur verlangt sind. Aus diesem Grund haben wir graue Anmerkungskästen eingeführt, um Dir ausführlichere Erläuterungen zu geben aber gleichzeitig klar zu machen, was Du unbedingt im Abitur aufs Blatt schreiben musst und was ergänzend für Dich ist. Oft bieten wir auch mehrere verschiedenen Lösungsmöglichkeiten an. Mit QR-Codes am Rand verweisen wir auf noch ausführlichere Lösungsmöglichkeiten zu diversen Aufgaben.

Zusätzlich arbeiten wir stets an Lösungsvideos und weiterem Material für deine Abiturvorbereitung. Diese werden kostenlos auf www.deinabitur.de zur Verfügung gestellt.

Da dieses Buch unsere erste Version ist, wollen wir uns hier vorab für eventuelle Fehler entschuldigen. Über Anregungen, gefundene Fehler und Verbesserungsvorschläge freuen wir uns sehr. Diese kannst Du uns bitte an: info@DeinAbitur.de schicken!

Wir wünschen Dir für Dein Abitur und Deinen zukünftigen Lebensweg alles Gute!

Dein Team von DeinAbitur,

Martin	*Julia*	*Max*	*Torben*
Christian	*Alex*	*Sebastian*	*Dieter*
Werner	*Sonja*	*Ionut*	*Andreas*
Gerhard	*David*	*Milan*	*Christina*
Victoria	*Johannes*	*Daniel*	*Patrick*
Christoph	*Tobias*	*Gregor*	*Verena*
Michael	*Nico*	*Philipp*	*Tim*

Besonderheiten zum bayerischen Mathematik-Abitur.

Das vorliegende Buch beinhaltet die bayerischen Mathematik Aufgaben und Lösungen der Jahre 2014-2017 (ohne CAS).
Wir haben das Jahr 2014 als Erstes gewählt, da in diesem Jahr zum ersten Mal die drei Teilgebiete Analysis, Stochastik und Geometrie in zwei Prüfungsteile A und B aufgeteilt wurden. In diesem Format soll auch das Abitur der nächsten Jahre sein.
Das erste G8 Abitur wurde 2011 geschrieben. Die Aufgaben 2011 bis 2013 sehen vom Format etwas anders aus als dein Matheabitur 2018, jedoch eignen sich diese Aufgaben auch wunderbar zum Üben. Aus diesem Grund findest Du auf unserer Homepage www.deinabitur.de alle Angaben und Lösungen der bisherigen G8 Abiture.
Die ursprüngliche Idee der Aufteilung des Mathe - Abiturs in die beiden Prüfungsteile A und B war, dass der Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel (die offizielle Merkhilfe, Taschenrechner und das stochastische Tafelwerk) und der Prüfungsteil B mit diesen Hilfsmitteln zu schreiben ist. Jedoch gibt es seit der Einführung der beiden Prüfungsteile die Option den Prüfungsteil A auch mit Hilfsmittel zu schreiben, jedoch hat man dann insgesamt für das Mathe-Abi weniger Zeit.
Du kannst dich also zwischen diesen beiden Optionen entscheiden:

Option 1: Teil A ohne Hilfsmittel, Teil B mit Hilfsmitteln

9:00 Uhr – 10:30 Uhr

Prüfungsteil A
ohne Hilfsmittel

Bearbeitet werden nur die Aufgaben des Prüfungsteils A; die Aufgabenstellungen zum Prüfungsteil B liegen noch nicht vor.

15 Minuten Pause

10:45 Uhr – 13:45 Uhr

Prüfungsteil B
mit Hilfsmittel

Bearbeitet werden nun die Aufgaben des Prüfungsteils B, die Aufgaben des Prüfungsteils A wurden um 10:30 Uhr abgegeben.

Option 2: Teil A und Teil B mit Hilfsmitteln

9:00 Uhr

Prüfungsteile A und B

mit Hilfsmittel

13:00 Uhr

Die Schüler erhalten das komplette Abitur und können für beide Teile alle erlaubten Hilfsmittel verwenden.

Für welche Variante soll ich mich entscheinden?

Variante 1 („ohne“)	Variante 2 („mit“)
Vorteile	**Vorteile**
• man hat insgesamt eine halbe Stunde länger Zeit zum Rechnen! • man hat eine 15-minütige Pause, in der man aufs Klo gehen kann, so dass diese Zeit nicht von der „Rechenzeit“ wegfällt • In der 15-minütigen Pause kann man sich gegenseitig beruhigen, was man alles richtig hat. • Der Prüfungsteil A ist tatsächlich ohne Hilfsmittel lösbar.	• Der Taschenrechner könnte auch im Teil A eine „psychologische Stütze“ sein. • Man bekommt das komplette Abitur und kann zum Beispiel Analysis Teil A und Teil B am „Stück“ machen und muss zwischen den Gebieten nicht „hin- und herspringen“. Man kann sich die Zeit also frei einteilen. • Wenn man beim Bearbeiten des Teils B einen Fehler im Teil A bemerkt, kann man diesen noch korrigieren.
Nachteile	**Nachteile**
• Eventuell fällt einem beim Bearbeiten des Teils B etwas zu Teil A ein, was man verbessern will, aber man hat dann diesen Prüfungsteil nicht mehr zur Verfügung. • In der Pause können sich Deine Mitschüler und Du aber auch gegenseitig „verrückt“ machen, was alles falsch sein könnte.	• Man hat eine halbe Stunde weniger „Rechenzeit“ und auch keine Pause von 15 Minuten, die man für Klogänge verwenden kann. Die Zeit ist im Abitur sehr knapp bemessen!

Unser Rat:

Auch wenn in der Auflistung die Vor- und Nachteile beider Prüfungsvarianten sich die Waage halten, raten wir eher zu der Variante 1 („ohne Hilfsmittel"). Wir haben dazu die Noten unserer Schüler in der Q11 und Q12 mit den Abiturergebnissen verglichen. Wenn man dabei die Unterschiede zwischen den Vorjahresnoten und den Abiturnoten vergleicht, so schneiden im Schnitt die Schüler, welche das Abitur ohne Hilfsmittel im Teil A
schreiben relativ zur den anderen Scbüler besser ab. Die Zeit im Abitur ist recht knapp und die zusätzliche halbe Stunde Bearbeitungszeit ist wertvoller als die Hilfsmittel im Teil A. Es gibt auch Schüler, die beim Teil A schneller als in 90 Minuten fertig sind und im Teil B mehr Zeit bräuchten, jedoch haben die wenigsten Schüler es bereut die Variante 1 zu wählen. Schüler, die jedoch Variante 2 gewählt hatten, äußerten sich öfters, sie hätten mehr Zeit gebraucht!

Insgesamt sind in der Prüfung **120 Bewertungseinheiten** (BE) zu erreichen. Im Teil A sind 40 BE (20 für Analysis und je 10 für Stochastik und Geometrie) zu ereichen. Im Teil B sind es 80 BE (40 für Analysis und je 20 für Stochastik und Geometrie. Das Mathe-Abitur wird nach folgender Tabelle bewertet.

BE	Punkte	Note	BE	Punkte	Note
120 - 115	15	1+	72 - 67	7	3-
114 - 109	14	1	66 - 61	6	4+
108 - 103	13	1-	60 - 55	5	4
102 - 97	12	2+	54 - 49	4	4-
96 - 91	11	2	48 - 41	3	5+
90 - 85	10	2-	40 - 33	2	5
84 - 79	9	3+	32 - 25	1	5-
78 - 73	8	3	24 - 0	0	6

Das Kultusministerieum stellt für die Bereiche Analysis, Stochastik und Geometrie je zwei Aufgabengruppen zur Auswahl. Der Prüfungsausschuss an jeder Schule wählt die Aufgabengruppe aus, die die Schüler im Abitur bearbeiten sollen. Im vorliegenden Abiturbuch haben wir jeweils beide Aufgabengruppen abgebildet.

Abiturprüfungen nach Jahrgängen

Abiturprüfungen nach Teilgebieten

Analysis

Stochastik

Geometrie

Analysis 2017 - Aufgabengruppe A1

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wir d mit G_g bezeichnet.

2 **a)** Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunktes von G_g mit der y-Achse an.

4 **b)** Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w\colon\ x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

2 Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **a)** Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

3 **b)** Die Tangente an den Graphen von f im Punkt S (0 | 1) begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

3 Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

2 **a)** Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = 2 ist eine senkrechte Asymptote.

2 **b)** Die Funktion g ist nicht konstant und es gilt: $\int_0^2 g(x)\,dx = 0$.

4 An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

3 **a)** Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

2 **b)** Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\,\frac{1}{h}$ beträgt.

20

Analysis 2017 - Aufgabengruppe A2

BE

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{(3+x)^2}{x-1}$ und maximalem Definitionsbereich. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Geben Sie D und die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an. **3**

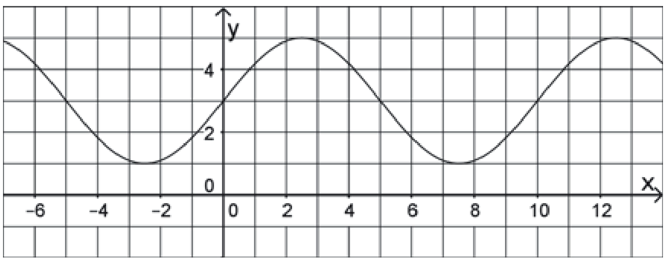
b) Zeigen Sie, dass f (x) zum Term $x + 7 + \frac{16}{x-1}$ äquivalent ist, und geben Sie die Bedeutung der Geraden g mit der Gleichung y = x + 7 für G_f an. **3**

2 Eine Funktion f ist durch $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f. **2**

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt S (0 | 1) begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist. **3**

3 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion
$g: x \mapsto p + q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}x\right)$ mit $p, q, r \in \mathbb{N}$.



a) Geben Sie p, q und r an. **3**

b) Der Graph der Funktion h geht aus dem Graphen der Funktion g durch Verschiebung um zwei Einheiten in positive x-Richtung hervor. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an. **1**

4 An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung. **3**

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\ \frac{1}{h}$ beträgt. **2**

20

Lösung Analysis 2017 A1

1 Gegeben ist die Funktion g: $x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

a) Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunktes von G_g mit der y-Achse an.

Teil 1: Maximale Definitionsmenge

Definitionsmenge

$\frac{Z}{\underbrace{N}_{\neq 0}}$, $\sqrt{\underbrace{\dots}_{\geq 0}}$, $\ln(\underbrace{\dots}_{>0})$

$4 + x \geq 0 \qquad | -4$

$x \geq -4$

⇨ $D_g = [-4; \infty[$

Teil 2: Schnittpunkt mit der y-Achse

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 2\sqrt{4+0} - 1 \\
&= 2\sqrt{4} - 1 \\
&= 2 \cdot 2 - 1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

⇨ Schnittpunkt: $(0 \mid 3)$

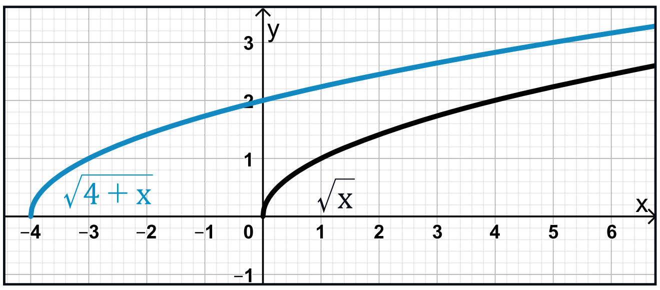
b) Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion w: $x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

Teil 1: Entwicklung des Graphen

$\sqrt{x} \xrightarrow{\text{wird zu}} \sqrt{\boxed{4+}x}$

$w(x) = \sqrt{x}$

$w(x+4) = \sqrt{4+x}$



⟵ Verschiebung parallel zur x-Achse um 4 Einheiten nach links.

Stochastik 2017 - Aufgabengruppe A1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

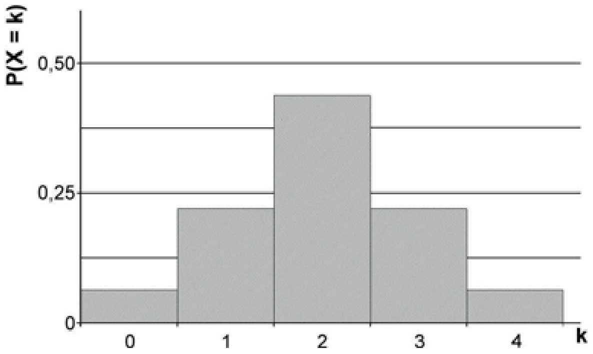
2 **a)** Interpretieren Sie den Term $(1 - p)^7$ im Sachzusammenhang.

1 **b)** Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

2 **c)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

2 **d)** Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

3 **2** In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ und dem Erwartungswert 2 dargestellt. Weisen Sie nach, dass es sich dabei nicht um eine Binomialverteilung handeln kann.



10

Stochastik 2017

Aufgabengruppe A2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 a) Nebenstehende Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Tragen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein. **3**

	A	$\overline{A}$	
B	0,12		
$\overline{B}$			
	0,3		

b) Im Vorfeld einer Wahl wird eine wahlberechtigte Person zufällig ausgewählt und befragt. Betrachtet werden folgende Ereignisse: **2**

C: „Die Person ist älter als 50 Jahre."

D: „Die Person will die derzeitige Regierungspartei wählen."

Erläutern Sie, was in diesem Sachzusammenhang eine stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse C und D bedeuten würde.

2 Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:

a) Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden. **2**

b) Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel: **3**

> Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind. **10**

Erläutern Sie, was in diesem Sachzusammenhang eine stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse C und D bedeuten würde.

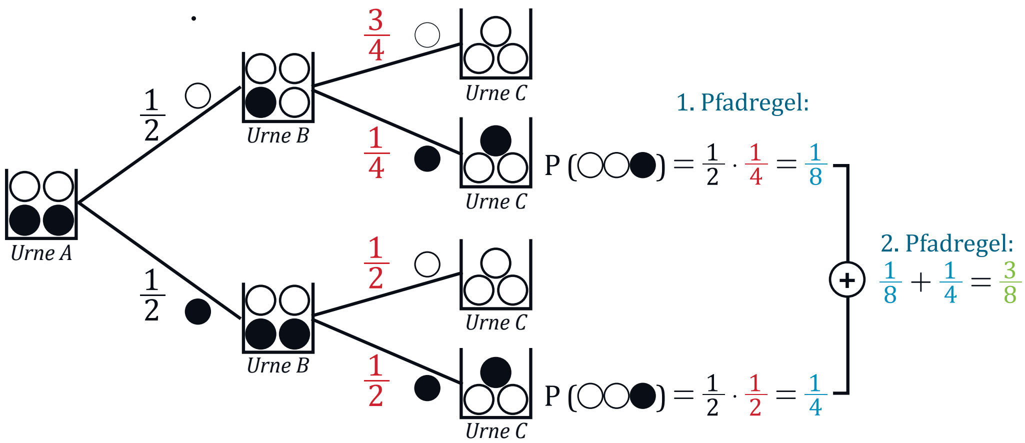
Lösung: Eine stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse C und D würde bedeuten, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die derzeitige Regierungspartei wählt, unabhängig davon ist, ob sie älter oder jünger als 50 Jahre ist.

Das bedeutet, dass der Anteil der Personen über 50, die die derzeitige Regierungspartei wählen, genauso groß ist, wie der Anteil aller Wahlberechtigten, die die derzeitige Regierungspartei wählen.

Anmerkung:
Zur Argumentation hätte ebenso die Gleichheit $P_D(C) = P(C) = P_{\bar{D}}(C)$ herangezogen werden können. Unter den Wählern der Regierungspartei ist der Anteil der über 50-jährigen genau so groß wie bei den Wählern insgesamt bzw. bei denjenigen Wählern, die die Regierungspartei nicht unterstützen.

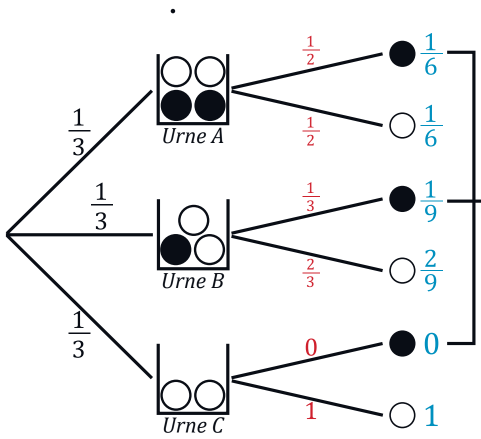
2 Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:

a) Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.



Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in Urne C zwei weiße und eine schwarze Kugel befinden, beträgt $\frac{3}{8}$.

b) Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt. Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.



2. Pfadregel:

$P(\bullet) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{15}{54} = \frac{5}{18}$

Damit bei dem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind, muss der im Mittel zu erwartende Auszahlungsbetrag pro Spiel gleich dem Betrag des eingezahlten Einsatzes sein.

Ansatz:
$E(X) = 1$ €

$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n$

ausgezahlter Betrag im Gewinnfall

x_i	0 €	A
p_i	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{18}$

Wahrscheinlichkeit für den Verlust des Einsatzes

Wahrscheinlichkeit, dass ein Betrag ausgezahlt wird: $P(\bullet)$

$$E(X) = 1$$
$$0 \cdot \frac{13}{18} + A \cdot \frac{5}{18} = 1$$
$$A \cdot \frac{5}{18} = 1 \qquad \Big| \cdot \frac{18}{5}$$
$$A = \frac{18}{5} = 3{,}60$$

$\Rightarrow$ Wird eine schwarze Kugel gezogen, so sollten 3,60 € ausbezahlt werden.

Anmerkung:
Weitere Lösungsmöglichkeiten und Beispiele zu diesem Aufgabentyp „faires Spiel“ findest Du in unserem Kursbuch.

Lösungen Analyis 2016 A1

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$ mit maximaler Definitionsmenge D.

a) Bestimmen Sie D.

Definitionsmenge

$\underbrace{\frac{Z}{N}}_{\neq 0}$, $\sqrt{\underbrace{\ldots}_{\geq 0}}$, $\ln(\underbrace{\ldots}_{>0})$

ln x	Wurzel	
$x > 0$	$1 - \ln x \geq 0$	$\mid + \ln x$
$0 < x$	$1 \geq \ln x$	$\mid e^{()}$
	$e \geq x$	
	$x \leq e$	

$\Rightarrow 0 < x \leq e \Rightarrow D =]0; e]$

b) Bestimmen Sie den Wert $x \in D$ mit $f(x) = 2$.

$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$ mit $D =]0; e]$

$2 = \sqrt{1 - \ln x}$ $\quad \mid \; ()^2$

$4 = 1 - \ln x$ $\quad \mid + \ln x; \; -4$

$\ln x = -3$ $\quad \mid e^{()}$

$x = e^{-3} = \frac{1}{e^3} < e$ $\quad \Rightarrow \frac{1}{e^3} \in D$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto x^2 \cdot \sin x$ punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, dx$ an.

$g(x) = x^2 \cdot \sin x$

Bestimmung des Symmetrieverhaltens

- $f(-x)$ berechnen
- wenn $f(-x) = f(x)$: $\quad G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Wenn $f(-x) = -f(x)$: $\quad G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Sinusfunktion

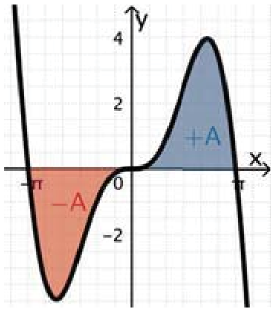
Der Graph der Sinusfunktion sin(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Es gilt somit: $\sin(-x) = -\sin(x)$

$g(-x) = (-x)^2 \cdot \sin(-x) = x^2 \cdot (-\sin x) = -x^2 \cdot \sin x = -g(x)$

⇨ G_g ist damit punktsymmetrisch zum Ursprung.

⇨ Wegen der Punktsymmetrie gilt: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, dx = 0$



Fläche oberhalb des Graphen

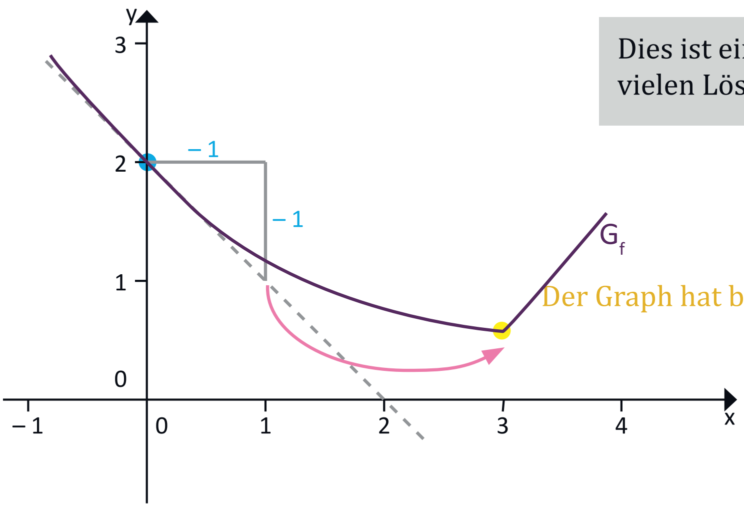
=

Fläche unterhalb des Graphen

Aufgabe 3

Skizzieren Sie im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion **f** mit den folgenden Eigenschaften:

- f ist nur an der Stelle x = 3 nicht differenzierbar.
- f (0) = 2 und für die Ableitung f' von f gilt: $f'(0) = -1$.
- Der Graph von f ist im Bereich $-1 < x < 3$ linksgekrümmt.



Dies ist eine von unendlich vielen Lösungen.

Lösung Stochastik 2016
A2

1 Die Aufgabe ist identisch zu Teilaufgabe 2 der Aufgabengruppe 1.

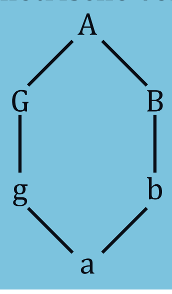
2 An einem P-Seminar nehmen acht Mädchen und sechs Jungen teil, darunter Anna und Tobias. Für eine Präsentation wird per Los aus den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Team aus vier Personen zusammengestellt.

a) Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden kann.
E1: „Anna und Tobias gehören dem Team an.“

Hypergeometrische Verteilung (Bienenwabe)

Bestand

Ziehung



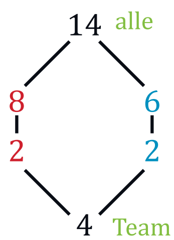
$$P(g) = \frac{\binom{G}{g} \cdot \binom{B}{b}}{\binom{A}{a}}$$

8 Mädchen und 6 Jungen = 14 Teilnehmer ($A = 14$) In jedem Team sind 4 Personen ($a = 4$). Anna und Tobias sind die „Guten“ ($G = 2$), die beide dem Team angehören sollen ($g = 2$). Übrig bleiben 12 „böse“ Teilnehmer ($B = 12$), von denen 2 noch dem Team von Anna und Tobias angehören ($b = 2$).

$$P(E1) = \underbrace{\frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{14}{4}}}_{\text{würde als Ergebnis ausreichen}} \left(= \underbrace{\frac{6}{91}}_{\text{Wahrscheinlichkeit berechnen}} \right)$$

Anmerkung
Die Bezeichnungen „gut“ und „böse“ beziehen sich auf die Beispielgeschichte von Sepp und Resi aus dem Kursbuch.

E2: „Das Team besteht aus gleich vielen Mädchen und Jungen.“
⇒ Team: 4 Personen (2 Mädchen, 2 Jungen)



$$P(E2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{14}{4}}$$

b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Term berechnet werden kann:

$$\frac{\binom{14}{4}-\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$$

> Es handelt sich hier nicht um die Formel für die hypergeometrische Verteilung.

Durch folgende Erweiterungen lässt sich der Term in die Formel für die hypergeometrische Verteilung umformen:

$$\frac{\binom{14}{4}-\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}=\frac{\binom{14}{4}}{\binom{14}{4}}-\frac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}=1-\frac{\binom{6}{4}\cdot\overbrace{\binom{8}{0}}^{=1}}{\binom{14}{4}}$$

Mit dem Term, der von 1 abgezogen wird, lässt sich nach der Formel der hypergeometrischen Verteilung die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass ein 4er-Team nur aus Jungen $\binom{6}{4}$ und keinem Mädchen $\binom{8}{0}$ besteht.

Da wir diesen Term von 1 subtrahieren, erhalten wir das Gegenereignis, welches besagt, dass mindestens ein Mädchen im 4er-Team sein muss.

$$\boxed{P(\overline{E})=1-P(E)}$$

Dein Abitur

Analysis 2016

Aufgabengruppe B1

BE

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f: $x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$ Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

2 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse und begründen Sie, dass G_f oberhalb der x-Achse verläuft.

3 **b)** Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

4 **c)** Zeigen Sie, dass für die zweite Ableitung f'' von f die Beziehung $f''(x) = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ für $\in \mathbb{R}$ gilt. Weisen Sie nach, dass G_f linksgekrümmt ist.

(Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$)

3 **d)** Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

3 **e)** Berechnen Sie die Steigung der Tangente g an G_f im Punkt $P(2 \mid f(2))$ auf eine Dezimale genau. Zeichnen Sie den Punkt P und die Gerade g in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-4 \le x \le 4$, $-1 \le y \le 9$).

4 **f)** Berechnen Sie f (4), im Hinblick auf eine der folgenden Aufgaben auf zwei Dezimalen genau, und zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f im Bereich $-4 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1e ein.

3 **g)** Zeigen Sie durch Rechnung, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\frac{1}{4} \cdot [f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = 1$ gilt.

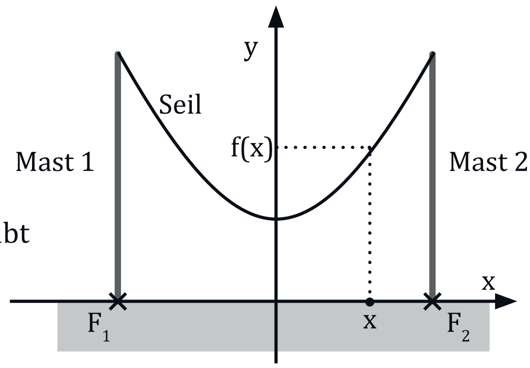
Die als Kurvenlänge $L_{a;b}$ bezeichnete Länge des Funktionsgraphen von f zwischen den Punkten $(a \mid f(a))$ und $(b \mid f(b))$ mit $a < b$ lässt sich mithilfe der Formel $L_{a;b} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)^2]}\, dx$ berechnen.

4 **h)** Bestimmen Sie mithilfe der Beziehung aus Aufgabe 1g die Kurvenlänge $L_{0;b}$ des Graphen von f zwischen den Punkten $(0 \mid f(0))$ und $(b \mid f(b))$ mit $b > 0$.

(Ergebnis: $L_{0;b} = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}$)

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Die Enden eines Seils werden an zwei vertikalen Masten, die 8,00 m voneinander entfernt sind, in gleicher Höhe über dem Erdboden befestigt. Der Graph G_f aus Aufgabe 1 beschreibt im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ modellhaft den Verlauf des Seils, wobei die Fußpunkte F_1 und F_2 der Masten durch die Punkte $(-4\,|\,0)$ bzw. $(4\,|\,0)$ dargestellt werden (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.



a) Der Höhenunterschied zwischen den Aufhängepunkten und dem tiefsten Punkt des Seils wird als Durchhang bezeichnet. Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells den Durchhang des Seils auf Zentimeter genau. **2**

b) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels, den das Seil mit Mast 2 im Aufhängepunkt einschließt, sowie mithilfe der Kurvenlänge aus Aufgabe 1h die Länge des zwischen den Masten hängenden Seils auf Zentimeter genau. **5**

Der Graph von f soll durch eine Parabel näherungsweise dargestellt werden. Dazu wird die in $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktion q betrachtet, deren Graph den Scheitelpunkt $(0\,|\,2)$ hat und durch den Punkt $(4\,|\,f(4))$ verläuft.

c) Ermitteln Sie den Term $q(x)$ der Funktion q, ohne dabei zu runden. **4**

d) Für jedes $x \in \,]0;4[$ wird der Abstand der vertikal übereinander liegenden Punkte $(x\,|\,q(x))$ und $(x\,|\,f(x))$ der Graphen von q bzw. f betrachtet, wobei in diesem Bereich $q(x) > f(x)$ gilt. Der größte dieser Abstände ist ein Maß dafür, wie gut die Parabel den Graphen G_f im Bereich $0 < x < 4$ annähert. Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte, mithilfe derer man diesen Abstand rechnerisch bestimmen kann. **3**

40

Analysis 2016

Aufgabengruppe B2

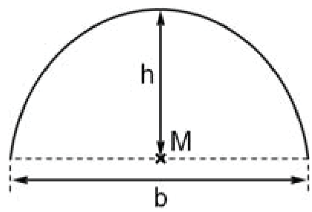
BE

Im Rahmen eines W-Seminars modellieren Schülerinnen und Schüler einen Tunnelquerschnitt, der senkrecht zum Tunnelverlauf liegt. Dazu beschreiben sie den Querschnitt der Tunnelwand durch den Graphen einer Funktion in einem Koordinatensystem. Der Querschnitt des Tunnelbodens liegt dabei auf der x-Achse, sein Mittelpunkt M im Ursprung des Koordinatensystems; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Für den Tunnelquerschnitt sollen folgende Bedingungen gelten:

I Breite des Tunnelbogens = 10 m

II Höhe des Tunnels an der höchsten Stelle: h = 5 m

III Der Tunnel ist auf einer Breite von mindestens 6 m mindestens 4 m hoch.



1 Eine erste Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand verwendet die Funktion $p : x \mapsto -0{,}2\,x^2 + 5$ mit Definitionsbereich $D_p = [-5; 5]$.

6 **a)** Zeigen Sie, dass die Bedingungen I und II in diesem Modell erfüllt sind. Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, unter dem bei dieser Modellierung die linke Tunnelwand auf den Tunnelboden trifft.

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen nun den Abstand d(x) der Graphenpunkte $P_x\,(x\,|\,p(x))$ vom Ursprung des Koordinatensystems.

3 **b)** Zeigen Sie, dass $d(x) = \sqrt{0{,}04x^4 - x^2 + 25}$ gilt.

5 **c)** Es gibt Punkte des Querschnitts der Tunnelwand, deren Abstand zu M minimal ist. Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Punkte P_x, für die d(x) minimal ist, und geben Sie davon ausgehend diesen minimalen Abstand an.

2 Eine zweite Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand verwendet eine Kosinusfunktion vom Typ $k : x \mapsto 5 \cdot \cos(c \cdot x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ und Definitionsbereich $D_k = [-5; 5]$, bei der offensichtlich Bedingung II erfüllt ist.

5 **a)** Bestimmen Sie c so, dass auch Bedingung I erfüllt ist, und berechnen Sie damit den Inhalt der Querschnittsfläche des Tunnels.

(zur Kontrolle: $c = \frac{\pi}{10}$, Inhalt der Querschnittsfläche: $\frac{100}{\pi}\,m^2$)

2 **b)** Zeigen Sie, dass Bedingung III weder bei einer Modellierung mit p aus Aufgabe 1 noch bei einer Modellierung mit k erfüllt ist.

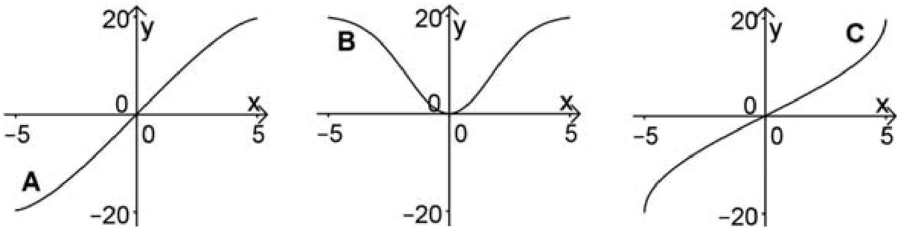
(Fortsetzung nächste Seite)

3 Eine dritte Modellierung des Querschnitts der Tunnelwand, bei der ebenfalls die Bedingungen I und II erfüllt sind, verwendet die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{25-x^2}$ mit Definitionsbereich $D_f = [-5; 5]$.

a) Begründen Sie, dass in diesem Modell jeder Punkt des Querschnitts der Tunnelwand von der Bodenmitte M den Abstand 5m hat. **5**
Zeichnen Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf spätere Aufgaben: $-5 \leq x \leq 9$, $-1 \leq y \leq 13$) und begründen Sie, dass bei dieser Modellierung auch Bedingung III erfüllt ist.

Betrachtet wird nun die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ mit Definitionsbereich $D_F = [-5; 5]$.

b) Zeigen Sie mithilfe einer geometrischen Überlegung, dass $F(5) = \frac{25}{4}\pi$ gilt. **5**
Einer der Graphen A, B und C ist der Graph von F. Entscheiden Sie, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht infrage kommen.



c) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Inhalt der Querschnittsfläche des Tunnels bei einer Modellierung mit f von dem in Aufgabe 2a berechneten Wert abweicht. **2**

Der Tunnel soll durch einen Berg führen. Im betrachteten Querschnitt wird das Profil des Berghangs über dem Tunnel durch eine Gerade g mit der Gleichung $y = -\frac{4}{3}x + 12$ modelliert.

d) Zeigen Sie, dass die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $R(4 \mid f(4))$ parallel zu g verläuft. Zeichnen Sie g und t in das Koordinatensystem aus Aufgabe 3a ein. **4**

e) Der Punkt R aus Aufgabe 3d entspricht demjenigen Punkt der Tunnelwand, der im betrachteten Querschnitt vom Hangprofil den kleinsten Abstand e in Metern hat. Beschreiben Sie die wesentlichen Schritte eines Verfahrens zur rechnerischen Ermittlung von e. **3**

40

Lösung Analysis 2016 B1

1 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$, $D = \mathbb{R}$

a) Teil 1: Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse.

> f(0) berechnen: $S_y\,(0 \mid f(0))$

$f(0) = e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow S_y = (0 \mid 2)$

Teil 2: Begründen Sie, dass G_f oberhalb der x-Achse verläuft.

> G_f oberhalb der x-Achse, wenn $f(x) > 0$

$f(x) = \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{>0} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{>0} > 0$

b) Teil 1: Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f.

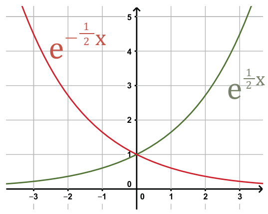
> **Bestimmung des Symmetrieverhaltens**
>
> - $f(-x)$ berechnen
> - wenn $f(-x) = f(x)$: G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
> - Wenn $f(-x) = -f(x)$: G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$f(-x) = e^{\frac{1}{2}(-x)} + e^{-\frac{1}{2}(-x)} = e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x}$

$= e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist demnach achsensymmetrisch zur y-Achse.



Teil 2: Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\to\infty} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\to 0}) = \infty + 0 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\to\infty}) = 0 + \infty = \infty$

> Wegen der Achsensymmetrie von G_f gilt:
>
> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

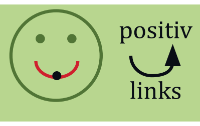
c) Teil 1: Zeigen Sie, dass $f''(x) = \frac{1}{4} f(x)$ gilt für $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4} \cdot \left[e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right] = \frac{1}{4} f(x)$

Teil 2: Weisen Sie nach, dass G_f linksgekrümmt ist.

G_f ist linksgekrümmt, wenn $f''(x) > 0$



$f(x) > 0$ gezeigt in Teilaufgabe a

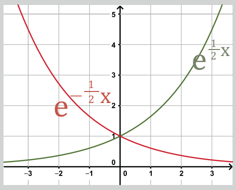
Da $f(x) > 0$ und $f''(x) = \frac{1}{4} f(x)$ ⇨ $f''(x) > 0$.

⇨ G_f ist linksgekrümmt.

Anmerkung

Wenn man nicht auf diesen Zusammenhang kommt, so muss man nochmals zeigen, dass $f''(x) > 0$:

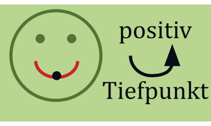
$f''(x) = \underbrace{\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}x}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x}}_{>0} > 0$



d) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Tiefpunkt.



Schritt 1: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} &= 0 && |\cdot 2\\
e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} &= 0 && |+e^{-\frac{1}{2}x}\\
e^{\frac{1}{2}x} &= e^{-\frac{1}{2}x} && |\ln(...)\\
\frac{1}{2}x &= -\frac{1}{2}x && |+\frac{1}{2}x\\
x &= 0
\end{aligned}$$

Schritt 2: $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (siehe Teilaufgabe c)

$$f''(0) = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}\right) = \frac{1}{4} \cdot (1+1) = \frac{1}{2} > 0$$

Schritt 3: $f(0) = 2$ (siehe Teilaufgabe a Teil 1)

⇨ TP $(0 \,|\, 2)$

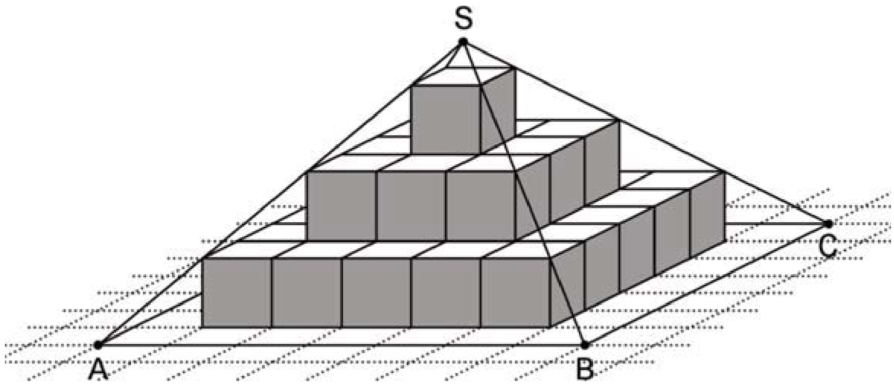
e) Teil 1: Berechnen Sie die Steigung der Tangente g an G_f im Punkt $(2 \,|\, f(2))$ auf eine Dezimalstelle genau.

$m = f'(2) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}2} - e^{-\frac{1}{2}2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (e - e^{-1}) \approx 1{,}2$

Lösung Geometrie 2015
A2

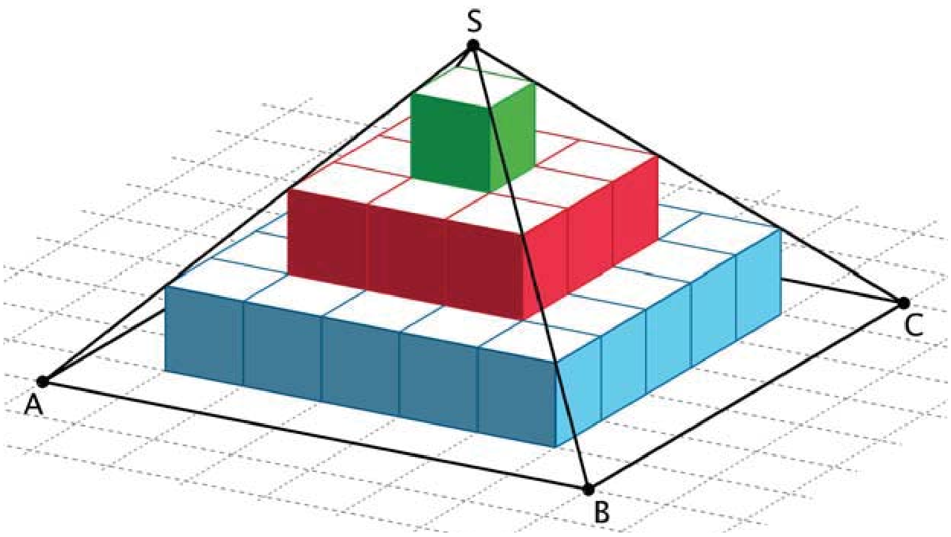
1 Die Aufgabe enspricht Aufgabe 1 der Aufgabengruppe 1.

2 Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD. Der Pyramide ist eine Stufenpyramide einbeschrieben, die aus Würfeln mit der Kantenlänge 1 besteht.



a) Geben Sie das Volumen der Stufenpyramide und die Höhe der Pyramide ABCDS an.

Teil 1: Volumen der Stufenpyramide



Die Stufenpyramide besteht aus $5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 1 = 35$ Würfeln der Kantenlänge 1 LE (Längeneinheit) und je einem Volumen von $(1\text{ LE})^3 = 1$ VE (Volumeneinheit). Somit beträgt das Volumen der Stufenpyramide 35 VE.

$H_0(x) = \int_0^x h(t)\,dt \quad \Rightarrow H_0(0) = \int_0^0 h(t)\,dt = 0$

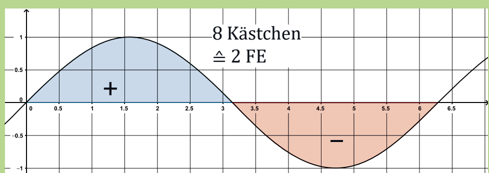
⇨ x = 0 ist Nullstelle der Integralfunktion H_0.

Anmerkung
Da der Graph von h komplett oberhalb der x-Achse und nicht teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse liegt, ist x = 0 auch die einzige Nullstelle der Integralfunktion.

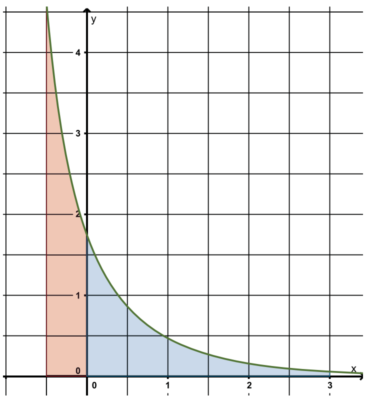
Teil 2: Bestimmen sie mithilfe von Abbildung 2 näherungsweise $H_0(-0{,}5)$ und $H_0(3)$.

Graphische Ermittlung von Funktionswerten einer Integralfunktion

- 4 Kästchen (je 0,5 LE · 0,5 LE) ≙ 1 Flächeninhalt (1 FE)
- Flächen oberhalb der x-Achse haben positiven Wert.
- Flächen unterhalb der x-Achse haben negativen Wert.
- Bei Integration von „rechts nach links" ändert sich das Vorzeichen vom Wert der Integralfunktion.



$$\int_a^b = -\int_b^a$$



Der Funktionswert $H_0(-0{,}5) = \int_0^{-0{,}5} h(t)\,dt$ ist die negative Maßzahl des Flächeninhalts des rot gefärbten Flächenstücks, welches G_h im Intervall [0; − 0,5] mit der x-Achse einschließt.
Der Wert ist negativ, da **„nach links"** integriert wird und G_h **oberhalb der x-Achse** verläuft.
Das Flächenstück lässt sich näherungsweise durch „Kästchenzählen" bestimmen: Fläche ca. 5,5 Kästchen $\frac{5{,}5}{4} \approx 1{,}4$ FE
⇨ $H_0(-0{,}5) \approx -\,1{,}4$ FE (negativ, da nach links integriert wird)

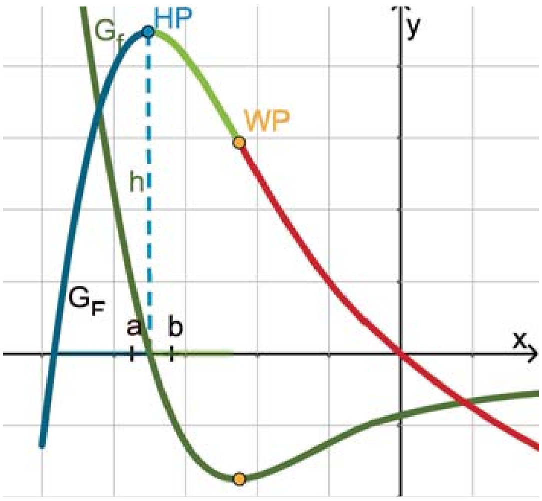
Der Funktionswert $H_0(3) = \int_0^3 h(t)\,dt$ ist die positive Maßzahl des Flächeninhalts des blau gefärbten Flächenstücks, das G_h im Intervall [0; 3] mit der x-Achse einschließt. Fläche ca. 5,25 Kästchen. $\frac{5{,}25}{4} \approx 1{,}3$ FE
⇨ $H_0(3) \approx +\,1{,}3$ FE

Rechts von c (also für c < x ≤ b) verläuft der Graph von f unterhalb der x-Achse. ⇒ F ist hier monoton fallend.

f hat an der Stelle x = c eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von – nach +.
⇒ die Stammfunktion F hat hier ein Maximum.

b) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von F im gesamten dargestellten Bereich.

Um den Graphen von F skizzieren zu können, ist es notwendig, den Zusammenhang zwischen F und f zu kennen:



1) Für x < c: G_f ist oberhalb der x-Achse. ⇒ G_F ist sms.

2) Für x = c: G_F besitzt einen HP. (Teilaufgabe a)

3) Für x > c: G_f ist unterhalb der x-Achse. ⇒ G_F ist smf.

4) TP von G_f: G_F besitzt einen Wendepunkt.

5) Für $x > x_{TP}$: Nach dem TP steigt G_f wieder, bleibt aber unterhalb der x-Achse und nähert sich einem konstanten Wert.
⇒ GF fällt weiter, aber immer weniger steil und nähert sich einer konstanten Steigung.

2. Möglichkeit: Formel zur Scheitelbestimmung

Formel zur Scheitelbestimmung

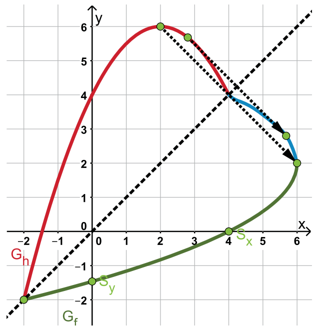
$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad x_S = \frac{-b}{2a}; \quad y_S = f(x_S)$

$$f(x) = \underbrace{-\tfrac{1}{2}}_{a}x^2 + \underbrace{2}_{b}x + \underbrace{4}_{c} \quad \Rightarrow \quad x_S = \tfrac{-2}{-1} = 2$$

$$y_S = -\tfrac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 6$$

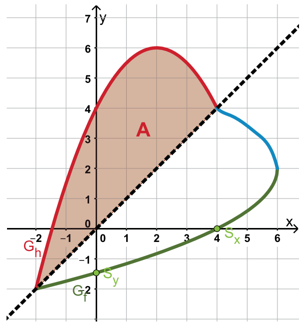
$$\Rightarrow \quad S\,(2\,|\,6)$$

Scheitelform: $h(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 6$



Anmerkung
Der Scheitel hätte auch mit Hilfe der quadratischen Ergänzung oder der Ableitung bestimmt werden können. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes sind diese beiden Vorgehensweisen hier nicht zu empfehlen.

3 Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht in der Wirklichkeit 1 cm.



a) Berechnen Sie den Inhalt des von G_h und der Winkelhalbierenden w eingeschlossenen Flächenstücks. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den Flächeninhalt des Blatts auf der Grundlage des Modells.

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ Bei „oberer Graph" minus „unterer Graph" sind keine Betragsstriche erforderlich.

HDI $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$

$$A = \int_{-2}^{4} [h(x) - x]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 4 - x\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + x + 4\right)dx \overset{\text{HDI}}{=} \left[-\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{4}$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} \left(-\tfrac{1}{6} \cdot 4^3 + \tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4\right) - \left(-\tfrac{1}{6}(-2)^3 + \tfrac{1}{2}(-2)^2 + 4 \cdot (-2)\right)$$

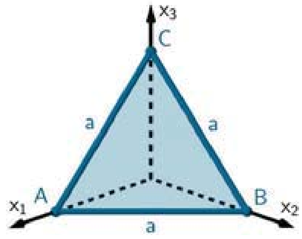
$$= \tfrac{40}{3} - \left(-\tfrac{14}{3}\right) = 18$$

Lösung Geometrie 2014 B1

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC..

1. Möglichkeit: Elementargeometrische Lösung

Da jeder der Punkte A(4 | 0 | 0), B(0 | 4 | 0) und C(0 | 0 | 4) auf einer anderen Koordinatenachse bei 4 liegt, ist das Dreieck ABC mit der Seitenlänge $a = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}|$ gleichseitig.

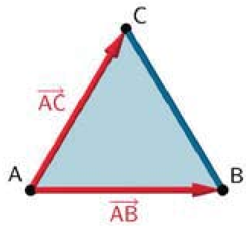


$$a = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{B} - \vec{A}| = \left|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 4^4 + 0^2} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$
$$A_{ABC} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{16 \cdot 2}{4} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Gleichseitiges Dreieck

$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

2.Möglichkeit: Vektorielle Lösung



$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot |(\vec{B} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A})|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}4 \cdot 4 & - & 0 \cdot 0\\ 0 \cdot (-4) & - & (-4) \cdot 4\\ (-4) \cdot 0 & - & 4 \cdot (-4)\end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}16\\16\\16\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16^2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.

Teil 1: Gleichung der Geraden g

Mit dem Aufpunkt P(2 | 2 | 3) und dem Richtungsvektor $\vec{v}$ ergibt sich:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}; \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Teil 2: Koordinaten des Punktes R, in dem g die Ebene E schneidet

Schnittpunkt Gerade - Ebene

$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u};\ \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$

1. Schritt: Koordinaten des Ortsvektors $\vec{X}$ der Gleichung der Geraden g in die Gleichung der Ebene E einsetzen und die Gleichung nach dem Parameter λ auflösen.
2. Schritt: Wert des Parameters λ in die Gleichung der Geraden g einsetzen und den Ortsvektor des Schnittpunkts berechnen.

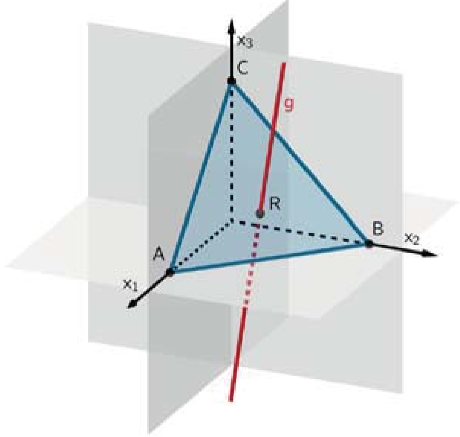
1. Schritt: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 - \lambda \\ 3 - 4\lambda \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad g \cap E: 2 - \lambda + 2 - \lambda + 3 - 4\lambda = 4$

$$7 - 6\lambda = 4$$
$$-6\lambda = -3$$
$$\lambda = \frac{1}{2}$$

2. Schritt: $R \in g: \vec{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(1{,}5 \mid 1{,}5 \mid 1)$

Teil 3: Begründung - Lichtstrahl trifft auf dem dreieckigen Spiegel auf

Die Punkte A, B und C liegen auf den positiven Koordinatenachsen. Also liegt das Dreieck ABC im ersten Oktanten. Der Schnittpunkt R der Gerade g und der Ebene E liegt ebenfalls im ersten Oktanten.
Folglich trifft der Lichtstrahl (Gerade g) auf dem dreieckigen Spiegel (Dreieck ABC) auf.



weitere Lösungsmöglichkeit

c) Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch sind.

Aus der Beschreibung und der Abbildung der Aufgabe geht hervor, dass der Punkt Q der Spiegelpunkt einer Spiegelung des Punktes P an der Ebene E ist. Somit muss der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht auf der Ebene E stehen und beide Punkte P und Q müssen denselben Abstand von der Ebene E haben.

WAS WIR DIR BIETEN

Ferienkurse Mathematik:

PREIS 139€ *

3-tägiger Kompaktkurs
5-tägiger Intensivkurs

Begleitkurs Mathematik:

PREIS 129€ *

2 Stunden/Woche
verschiedene Jahrgangsstufen möglich

PROBEABITUR:

PREIS bei Buchung
mit Ferienkurs 19€
sonst 69€

Simulation des Ernstfalls
inklusive Feedback

Abicamp:

PREIS 999€ *

1 Woche in den Osterferien
Samstag bis Samstag
Intensive Abivorbereitung in deinen Abifächern
inklusive Vollpension, individueller Betreuung,
Probeabitur & Ausgleichprogramm

* Günstiger bei früher Buchung!

Wir sind der Meinung, dass jeder eine Chance bekommen sollte, sein Abitur zu bestehen. Aus diesem Grund bieten wir seit einigen Jahren Vorbereitungskurse für das Abitur im Fach Mathematik und in anderen Fächern an.

Damit du dich bereits während des letzten Schuljahres auf das Abitur vorbereiten kannst, haben wir ein Abiturbuch entwickelt, das mehr bietet als ein einfaches Lösungsbuch. Wir denken, dass in ein gutes Vorbereitungsbuch mehr gehört, als die knappe Darstellung einer Musterlösung ohne jede weitere Erklärung. Unser Autorenteam hat sich intensiv mit der Entwicklung dieses Vorbereitungsbuches beschäftigt, das neben einem klaren Farbkonzept, wichtigen didaktischen Kommentaren und Formeln auch Standardwege bietet, wie du die am häufigsten vorkommenden Aufgabenstellungen lösen kannst. Die Lösungen sind darauf abgestimmt, welche Punkte bei der Korrektur besonders ins Gewicht fallen.

Ansonsten bieten wir auch maßgeschneiderte Kurse für die Abiturvorbereitung in verschiedenen Fächern an. Schau doch mal auf unserer Homepage vorbei, ob wir nicht das passende Angebot für dich haben.

Dein Abitur

ISBN 978-3-947558-00-1

www.deinabitur.de