Bohner
Ott
Deusch

Mathematik im Berufskolleg I

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin
Bild Kreis links: © Christian Schwier – fotolia.com
Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski – fotolia.com

* * * * * * * * * *

6. Auflage 2016

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0234-9**

2.1.4 Aufstellen von Geradengleichungen

Aufstellen von Geradengleichungen mithilfe der Hauptform

Beispiel

➲ Eine Gerade g hat die Steigung $m = -\frac{5}{2}$ und verläuft durch den Punkt A (3 | 2). Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

Lösung

Ansatz für die Geradengleichung:	$y = mx + b$
Einsetzen von $m = -\frac{5}{2}$:	$y = -\frac{5}{2}x + b$
Punktprobe mit A (3 | 2)	$2 = -\frac{5}{2} \cdot 3 + b$
Umformen nach b liefert:	$b = \frac{19}{2}$
Geradengleichung:	$y = -\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}$

Beispiel

➲ Eine Gerade g verläuft durch den Punkt A (−1 | 8) und ist parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = 6x + 3$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.

Lösung

Ansatz für die Geradengleichung:	$y = mx + b$
Parallel heißt gleiche Steigung:	$m_g = m_h = 6$
Einsetzen von $m = 6$:	$y = 6x + b$
Punktprobe mit A (−1 | 8)	$8 = 6 \cdot (-1) + b$
Umformen nach b liefert:	$b = 14$
Geradengleichung:	$y = 6x + 14$

Beispiel

➲ Von den Herstellkosten ist bekannt: Die variablen Stückkosten betragen 1,25 GE/ME und bei der Herstellung von 20 ME entstehen Kosten von 65 GE. Bestimmen Sie die lineare Gesamtkostenfunktion.
(Mengeneinheit (ME); Geldeinheit (GE))

Lösung

Ansatz für die Geradengleichung:	$y = mx + b$
Die variablen Stückkosten entsprechen der Steigung $m = 1{,}25$:	$y = 1{,}25x + b$
P (20 | 65) liegt auf der Kostengeraden:	$65 = 1{,}25 \cdot 20 + b \Rightarrow b = 40$
Gesamtkosten:	$y = K(x) = 1{,}25x + 40$

Beispiel

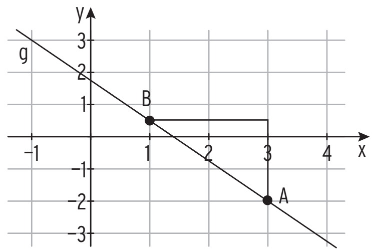
➲ Eine Gerade g verläuft durch die Punkte A (3 | − 2) und B (1 | 0,5).
Bestimmen Sie die Geradengleichung.

Lösung

a) Bestimmung der Steigung aus den Punkten A und B. Man wählt
$A(3|-2) = A(x_1|y_1)$
$B(1|0{,}5) = B(x_2|y_2)$
und berechnet die Steigung m:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}5 - (-2)}{1 - 3} = \frac{2{,}5}{-2} = -\frac{5}{4}$

Steigung der Geraden: $m = -\frac{5}{4}$



Ansatz für die Gleichung von g: $y = mx + b$

Mit $m = -\frac{5}{4}$ erhält man: $y = -\frac{5}{4}x + b$

Punktprobe mit z. B. A (3 | − 2) liefert b: $-2 = -\frac{5}{4} \cdot 3 + b$

$b = \frac{7}{4}$

Hinweis: Die Punktprobe mit dem Punkt B (1 | 0,5) liefert den gleichen Wert für b.

Geradengleichung: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$

Alternative
Lösung mithilfe eines **linearen Gleichungssystems**

Ansatz für die Geradengleichung: $y = mx + b$
Punktprobe mit A (3 | − 2): $-2 = m \cdot 3 + b$
Punktprobe mit B (1 | 0,5): $0{,}5 = m \cdot 1 + b$
Punktprobe ergibt:

$$\begin{aligned} 3m + b &= -2 \quad (1) \\ m + b &= 0{,}5 \quad (2) \end{aligned}$$

Seite 165

Lösung dieses linearen Gleichungssystems (LGS) mit dem **Additionsverfahren**:

Gleichung (1) mit (−1) multiplizieren:

$$\begin{aligned} 3m + b &= -2 \quad | \cdot (-1) \\ m + b &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Addition

$$\begin{aligned} -3m - b &= 2 \\ m + b &= 0{,}5 \quad + \end{aligned}$$

ergibt eine Gleichung mit m: $-2m = 2{,}5$
Auflösung nach m: $m = -1{,}25$
Einsetzen von $m = -1{,}25$ in z. B. $m + b = 0{,}5$: $-1{,}25 + b = 0{,}5$
ergibt: $b = 1{,}75$
Geradengleichung: $y = -1{,}25x + 1{,}75$

Hinweis: Die Geradengleichung kann auch mithilfe des WTR **(lineare Regression)** bestimmt werden.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

a) g hat die Steigung $m = -4{,}5$ und verläuft durch $A(0|-3)$.

b) g hat die Steigung $m = 3$ und verläuft durch $A(1|1{,}5)$.

c) g verläuft durch $A(-6|1)$ und ist parallel zur Geraden h mit der Gleichung $y = -x + 2$.

2 Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.
Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

a) $A(0|-2)$; $B(-1|-5)$

b) $A(-3|-1{,}5)$; $B(1|1)$

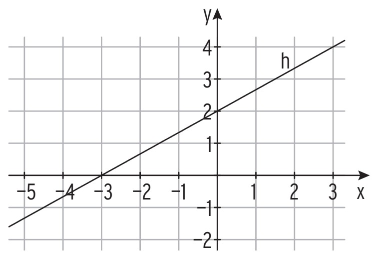
c) $A\left(2\middle|\frac{1}{2}\right)$; $B\left(4\middle|\frac{3}{4}\right)$

d) $A\left(-2\middle|-\frac{5}{2}\right)$; $B\left(-1\middle|\frac{3}{2}\right)$

3 Die Abbildung zeigt die Gerade h.
Geben Sie die Gleichung von g an.

a) g ist eine Ursprungsgerade parallel zu h.

b) Die Gerade g schneidet h auf der x-Achse und geht durch $A(4|-2)$.



4 Bestimmen Sie die Gleichungen von zwei Geraden, die durch den Punkt $A(3|-1)$ verlaufen.

5 Für eine lineare Funktion f gilt $f(2) = -3$ und $f(0) = 5$.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm.
Berechnen Sie $f(0{,}25)$; $f\left(\sqrt{2}\right)$ und $f(a)$.

6 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(4|8)$ und $B(1|2)$. Die Gerade h verläuft parallel zu g durch den Punkte $P(-2\,|\,7)$. Bestimmen Sie die Gleichung von h.

7 Maike erreicht bei ihrem 100-m-Lauf nach 11 Sekunden die 75-m-Marke.
Nach 14,2 Sekunden läuft sie durch das Ziel.
Vergleichen Sie ihre Durchschnittsgeschwindigkeit über 100 Meter mit der über die letzten 25 Meter.

8 Die Gesamtkosten für eine Ausbringungsmenge von 5 ME betragen 255 GE, für eine Ausbringungsmenge von 11 ME betragen sie 543 GE.
Berechnen Sie den Kostenzuwachs pro ME bei einer Produktionssteigerung von 5 ME auf 11 ME.

2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation

A) Lösung von quadratischen Gleichungen

Seite 167

Wurzelziehen		**Nullprodukt**	
Beispiel:	$x^2 = 9$	**Beispiel:**	$(x-3)(x+5) = 0$
Wurzelziehen:	$x_{1\|2} = \pm\sqrt{9}$	Satz vom Nullprodukt:	$x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0$
Lösung:	$x_{1\|2} = \pm 3$	Lösung:	$x_1 = 3;\ x_2 = -5$

Ausklammern		**abc-Formel**	
Beispiel:	$x^2 - 7x = 0$	**Beispiel:**	$x^2 - 2x - 8 = 0$
Ausklammern:	$x(x-7) = 0$	abc-Formel:	$x_{1\|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Satz vom Nullprodukt:	$x = 0 \vee x - 7 = 0$	Mit $a = 1$, $b = -2$ und $c = -8$:	$x_{1\|2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$
Lösung:	$x_1 = 0;\ x_2 = 7$		$x_{1\|2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$
		Lösung:	$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$
			$x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

Satz vom Nullprodukt:

Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist:
$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0$ („$\vee$" bedeutet „oder")

Eine quadratische Gleichung der Form

$ax^2 + c = 0$	$(x+b)(x+c) = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
	wird gelöst durch:		
Umformung		**Ausklammern**	**abc-Formel**
$x^2 = -\frac{c}{a}$		$x(ax + b) = 0$	$x_{1\|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
und		und	
Wurzelziehen	**Satz vom Nullprodukt**	**Satz vom Nullprodukt**	

Seite 170

Hinweis: Zerlegung in Faktoren mithilfe der Binomischen Formeln.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
$(x+3)^2 = 0$
$x_{1|2} = -3$

b) $x^2 - 10x + 25 = 0$
$(x-5)^2 = 0$
$x_{1|2} = 5$

Aufgaben

Seite 167

1 Lösen Sie die quadratische Gleichung nach x auf.

a) $2x^2 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$ c) $x^2 - 5x + 4 = 0$

d) $x^2 - 4x = 0$ e) $x^2 - 2x + 1 = 0$ f) $(x - 1)(5 - x) = 0$

2 Lösen Sie die quadratische Gleichung.

a) $2x^2 + 2x - 24 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 5$ c) $3 - 2x + \frac{1}{3}x^2 = 0$

d) $x^2 + 2x + 6 = -2x + 1$ e) $-x^2 - 1{,}5x = 1{,}25$ f) $(x - 3)^2 - 4 = 0$

g) $-3x^2 - 5x + 8 = 0$ h) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$ i) $(2x + 5)^2 = 2$

j) $2x^2 + x - 5 = 0$ k) $x^2 - 4x + 1 = 4$ l) $\frac{1}{2}(x^2 - 5) = 0$

3 Geben Sie die Diskriminante an.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $2x^2 - x + 1 = -4$ c) $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0$

4 Lösen Sie die quadratische Gleichung nach x auf.

a) $8x^2 + 3x = 0$ b) $x^2 - x = 0$ c) $\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x^2$

d) $-\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$ e) $\frac{4}{5}(x^2 - 4x) = 0$ f) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = 0$

g) $-\frac{1}{8}x^2 + 2x = 0$ h) $\frac{x^2}{5} - 5x = 0$ i) $tx - tx^2 = 0;\ t \neq 0$

5 Lösen Sie ohne Formel.

a) $(x + 4)(x - 5) = 0$ b) $(2x + 7)(4x - 1) = 0$ c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

d) $x^2 = 14x - 49$ e) $(x + t)(x - 2) = 0$ f) $3a(2x - x^2) = 0;\ a \neq 0$

6 Lösen Sie die quadratische Gleichung ohne Formel.

a) $(x - 5)^2 = 49$ b) $(3x + 4)^2 = 1$ c) $9 - (2x + 5)^2 = 0$

d) $\frac{3}{4}(x - 2)^2 = 12$ e) $\frac{1}{12}x^2 = x$ f) $4x(2t + x) = 0$

7 Die Gleichung $x^2 - \square \cdot x + 6 = 0$ hat die Lösung $x = 3$.
Bestimmen Sie den Wert $\square$ und die weitere Lösung.

8 Ordnen Sie folgende Gleichung einem geeigneten Lösungsverfahren (Wurzelziehen, Ausklammern, Formel) zu.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 6 = 0$ b) $x^2 + 6x = 0$ c) $3x^2 + 4x = 8$

d) $3x = 5x^2$ e) $9 = 2x^2$ f) $x^2 + 9 = 6x$

9 Bestimmen Sie x in Abhängigkeit von $a > 0$.

a) $ax^2 - 4 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 - a = 0$ c) $x^2 - ax = 0$

B) Gemeinsame Punkte von Parabel und x-Achse

Beispiel

In einer Unternehmung lässt sich die Gewinnfunktion darstellen durch die Funktion G mit $G(x) = -2x^2 + 16x - 24$; $x \geq 0$, x in ME, G(x) in GE.

a) Geben Sie den Bereich an, in dem Gewinn erzielt wird. Skizzieren Sie die Gewinnkurve.

b) Wie groß ist der maximale Gewinn?

Lösung

a) Gewinn wird erzielt, wenn $G(x) > 0$. Die Ungleichung löst man, indem man $G(x) = 0$ setzt, d. h. man bestimmt die Nullstellen von G.

Nullstellen von G

Bedingung: $G(x) = 0$

$$-2x^2 + 16x - 24 = 0 \quad |:(-2)$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung mit der abc-Formel:

$$\boxed{x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Mit $a = 1$, $b = -8$ und $c = 12$:

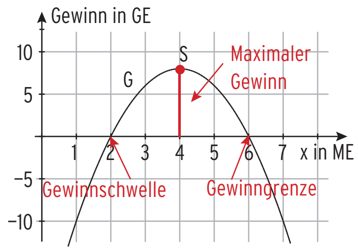
$$x_{1|2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1|2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

Nullstellen von G:

$$x_1 = \frac{8+4}{2} = 6; \quad x_2 = \frac{8-4}{2} = 2$$

Skizze:
Die Gewinnkurve ist eine nach unten geöffnete Parabel, da die Zahl vor x^2 negativ ist $(a < 0)$.
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$N_1(6|0)$; $N_2(2|0)$
$G(x) > 0$:
Lösung durch Ablesen: $2 < x < 6$
Die Gewinnkurve verläuft oberhalb der x-Achse.
Die Unternehmung erzielt Gewinn für $2 < x < 6$.



b) Den maximalen Gewinn erhält man mithilfe des Scheitelpunkts.

Scheitelpunkt der Gewinnkurve

Der x_S-Wert des Scheitelpunkts ist der Mittelwert der Nullstellen von G.

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$$

y_S-Wert des Scheitelpunkts: $y_S = G(x_S) = G(4) = 8$

Scheitelpunkt: $S(4|8)$

Der maximale Gewinn beträgt 8 GE.

2.2.5 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

Beispiel

➲ Viele Brückenbögen haben die Form einer Parabel, d. h., ihr Verlauf lässt sich durch eine quadratische Funktion beschreiben. Der Bogen einer Brücke ist ein Parabelträger mit der Spannweite $l = 30\,\text{m}$ und der größten Höhe $h = 6\,\text{m}$. Berechnen Sie die Länge der 5 in gleichen Abständen vertikal angebrachten Spannstäbe.

Lösung

- **Reale Situation**
  Brückenbogen mit maximaler Höhe und Spannweite
- **Reales Modell (Vereinfachung)**
  Zur Vereinfachung nimmt man an, dass der Brückenbogen durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann.
- **Mathematisches Modell**
  Parabelgleichung bzw. Funktionsterm bestimmen.
  Sinnvolle Wahl eines Koordinatensystems

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind bekannt: $N_1(0\,|\,0)$; $N_2(30\,|\,0)$
Ansatz: $f(x) = a\,x\,(x - 30)$
Die größte Höhe wird in der Mitte (vgl. Symmetrie) erreicht, also für $x = 15$.

Punktprobe ergibt:

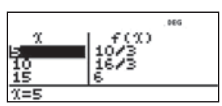
$$f(15) = 6$$
$$a \cdot 15 \cdot (-15) = 6$$
$$a = -\frac{2}{75}$$

Funktionsterm

$$f(x) = -\frac{2}{75}\,x\,(x - 30)$$
$$f(x) = -\frac{2}{75}x^2 + \frac{4}{5}x$$

Hinweis: Der Ansatz $y = a\,x^2 + b\,x + c$ führt nach Punktprobe mit N_1, N_2 und $C(15\,|\,6)$ auch zum Ziel.

Berechnung der Länge der Spannstäbe (y-Werte) mit dem WTR.
Die Spannstäbe sind 3,33 m, 5,33 m, 6 m, 5,33 m und 3,33 m lang.
Beachten Sie hierbei die Symmetrie.

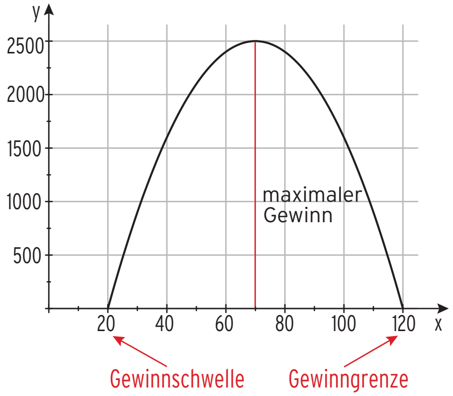


Beispiel

In einer Unternehmung lässt sich der **Gewinn** näherungsweise beschreiben durch die Funktion G mit $G(x) = -x2 + 140x - 2400$. Die Variable x steht für die Stückzahl der produzierten und verkauften Ware.
In welchem Bereich produziert die Unternehmung mit Gewinn?
Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Lösung

Aus der grafischen Darstellung des Gewinnverlaufs lässt sich die **Gewinnzone** (Bereich für die Ausbringungsmenge x mit $G(x) > 0$) erkennen.



Schnittstellen der Gewinnkurve mit der x-Achse

Bedingung: $G(x) = 0$ $\qquad -x^2 + 140x - 2400 = 0$

$x_1 = 20; \; x_2 = 120$

x_1 und x_2 sind die Nullstellen der Gewinnfunktion.

$x_{GS} = 20$ heißt **Gewinnschwelle.**

$x_{GG} = 120$ heißt **Gewinngrenze.**

In $x_{GS} = 20$ und $x_{GG} = 120$ wird **kostendeckend** produziert, d.h. $G(x) = 0$

Gewinnzone: $20 < x < 120$

Hinweis: Wird für eine Ausbringungsmenge **kostendeckend** produziert, so stimmen Kosten und Erlös überein, d.h. der Gewinn ist null.

Der y-Wert des Scheitelpunktes ergibt den maximalen Gewinn.

x_s-Wert des Scheitelpunktes: $\qquad x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = 70$

y_s-Wert des Scheitelpunktes: $\qquad y_s = G(70) = 2500$

Der maxmimale Gewinn beträgt 2500 GE.

Aufgaben

1 Auf einer Teststrecke wird gemessen, wie viel Benzin ein PKW bei gleichbleibender Geschwindigkeit verbraucht. Dabei hängt der Benzinverbrauch f (in Liter pro 100 km) quadratisch von der Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ ab:

$f(v) = a v^2 + b v + 7$

v	30	80
f (v)	6,25	7,0

Mit welchem Verbrauch ist bei durchschnittlich 120 km pro h zu rechnen?

2 Eine Brückendurchfahrt ist 6,60 m hoch und 8 m breit.
Ein Fahrzeug ist 3 m breit und 4,80 m hoch.
Kann dieses Fahrzeug noch unter der Brücke hindurchfahren?

3 Über die Gesamtkosten K eines Betriebs in € ist Folgendes bekannt: Für eine Produktion von 10 Stück entstehen Gesamtkosten von 1050 €, bei 20 Stück sind es 1400 €.

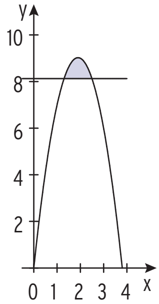
a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion K unter der Annahme, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt und die Fixkosten 900 € betragen.

b) Für welche Produktionsmenge entstehen Gesamtkosten von 1200 €?

c) Bestimmen Sie die Gewinnzone und den größten Gewinn, wenn die produzierte Menge zum Stückpreis von 85 € verkauft wird.

d) Wie groß ist der mittlere Kostenzuwachs im Intervall [10; 30]? Interpretieren Sie.

4 Bei den olympischen Spielen werden beim Diskuswerfen Scheiben verwendet, deren Form sich näherungsweise durch ein Parabelstück beschreiben lässt (siehe Skizze, alle Angaben in cm).
Das Parabelstück wird beschrieben durch den Term $f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x$.



a) Berechnen Sie den Durchmesser und die Dicke des Diskus.

b) Um gute Flugeigenschaften und eine hohe Haltbarkeit zu erzielen, entwickelt ein Sportinstitut einen Diskus, bei dem die Kante aus Stahl (siehe Markierung in der Skizze) und der Rest aus einem anderen Material besteht.
Im Querschnitt lässt sich die Stoffgrenze beschreiben durch eine Gerade mit der Gleichung $y = \frac{65}{8}$. Wie dick ist der Diskus an der Stoffgrenze?

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Entscheiden Sie, welche Kurve zu welchem Funktionsterm passt.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$f_1(x) = x^2 + 2$

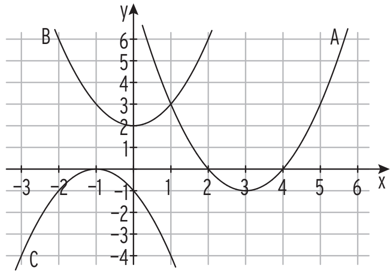
$f_2(x) = 2x^2 + 2$

$f_3(x) = -(x-2)(4-x)$

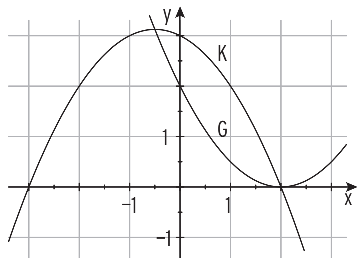
$f_4(x) = (x+2)(x+4)$

$f_5(x) = -(x+1)^2$

$f_6(x) = -(x-1)^2$



2 Bestimmen Sie die Parabelgleichungen aus der Abbildung.



3 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(6-3x);\ x \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Nullstellen von f an und skizzieren Sie K.

b) Berechnen Sie die x-Werte, für die gilt: $f(x) = 3$.
Interpretieren Sie geometrisch.

c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte von K mit dem Graph G von g mit $g(x) = x^2 - 1$.

4 Berechnen Sie die Lösungen.

a) $2x^2 + 2x = 24$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$ **c)** $0 = 2x - \frac{1}{3}x^2$

5 Die Normalparabel wird mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestreckt und danach um 3 nach oben verschoben. Man erhält die Parabel P.
Wie lautet die Parabelgleichung von P?
Die Normalparabel wird zuerst um 3 nach oben verschoben und anschließend mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestreckt. Erhält man die gleiche Parabel P? Begründen Sie Ihre Antwort.

Beispiel

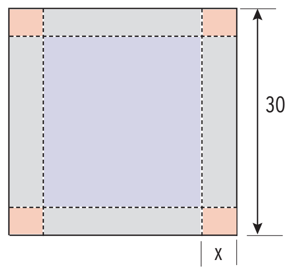
➲ Zur Lagerung von 4 kg Soda soll Karla aus einem quadratischen Karton der Seitenlänge 30 cm durch Falten eine Schachtel ohne Deckel formen.
Modellieren Sie die Situation.

Lösung

Reale Situation:
Zur Lagerung von 4 kg Soda soll eine genügend große Schachtel geformt werden.

Reales Modell:
Soda hat ein spezifisches Gewicht von $2{,}218\,\frac{g}{cm^3}$,
4 kg haben also ein Volumen von $1803\,cm^3$.
Das Volumen der Schachtel mit der Höhe x soll durch eine Funktion beschrieben werden.

Mathematisches Modell:
x: Höhe der Schachtel in cm
V(x): Volumen der Schachtel in cm^3
Für $0 < x < 15$ ergibt sich $V(x) = (30 - 2x)^2 \cdot x$
Dieser Funktionsterm beschreibt das Volumen V in Abhängigkeit von der Höhe x.



Schachtel mit der Höhe x.

Mathematische Lösung:
Bedingung: $V(x) \geq 1803$
Mithilfe einer Wertetabelle:

X	f(X)
2	1352
3	1728
4	1936
5	2000
6	1944
7	1792
8	1568

Für $x \in \{4, 5, 6\}$ gilt: $V(x) > 1803$

Maße in cm der Schachtel mit Volumen $V(x) > 1803$:

Länge	Breite	Höhe
22	22	4
20	20	5
18	18	6

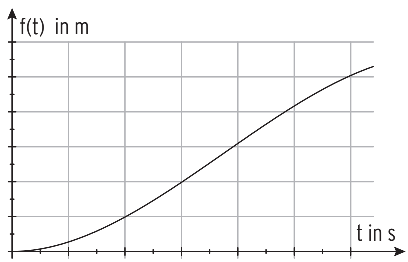
Karla wählt z. B. die Länge 22 cm, die Breite 22 cm und die Höhe 4 cm.

Aufgaben

1 Die Fixkosten für die Produktion einer Ware belaufen sich auf 300 Geldeinheiten (GE). Werden 10 Mengeneinheiten (ME) der Ware hergestellt, erhöhen sich die Gesamtkosten um 300 GE. Bei 20 ME betragen die Gesamtkosten 900 GE.
Prüfen Sie, ob die Gesamtkosten durch die Kostenfunktion K mit
$K(x) = \frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x + 300$ richtig beschrieben werden.
Bestimmen Sie den mittleren Kostenzuwachs in GE pro ME im Intervall [0; 10].
Der Verkaufspreis pro ME wird auf 60 GE festgelegt.
Zeigen Sie, dass im Bereich [11; 29] mit Gewinn produziert wird.

2 Ein 100-m-Sprint lässt sich durch eine Polynomfunktion f 3. Grades beschreiben.

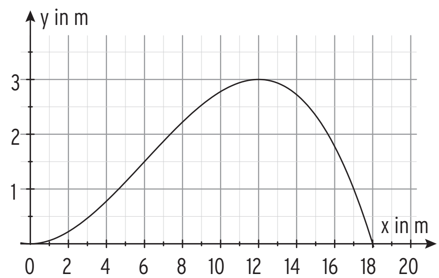
a) Bestätigen Sie, dass die nebenstehende Abbildung das Schaubild von f mit $f(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{3}{2}t^2$ zeigt.
Wählen Sie eine geeignete Achseneinteilung.



b) Bestimmen Sie die Laufzeit für 100 m mit dem WTR auf eine Zehntelsekunde genau.

c) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Läufers.

3 Der Graph in der Abbildung beschreibt näherungsweise die Flugkurve des Balles bei einem Freistoß in einem Fußballspiel.



Beantworten Sie folgende Fragen mithilfe der Abbildung.

- Welche maximale Höhe erreicht der Ball?
- Überfliegt der Ball die Abwehrmauer in 9,15 m Entfernung?
  Wo kommt der Ball wieder auf den Boden?
- Wie weit entfernt vom Tor wurde der direkte Freistoß ausgeführt, wenn der Ball in einer Höhe von 1,75 m die Torlinie überschreitet?

3.6.3 Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Beispiel

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3 - 2e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen. Zeichnen Sie K.

Lösung

Schnittpunkt mit der x-Achse:

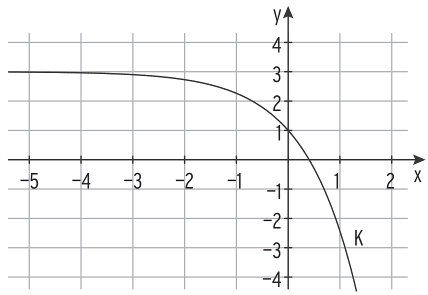
Bedingung: $f(x) = 0$ $\quad 3 - 2e^x = 0$

$2e^x = 3$

$e^x = 1{,}5$

Anwenden der Definition: $x = \ln(1{,}5)$

SP mit der x-Achse: $N(\ln(1{,}5)\,|\,0)$



Schnittpunkt mit der y-Achse:

Bedingung: $x = 0$ $\quad f(0) = 3 - 2e^0 = 1$

SP mit der y-Achse: $S_y(0\,|\,1)$

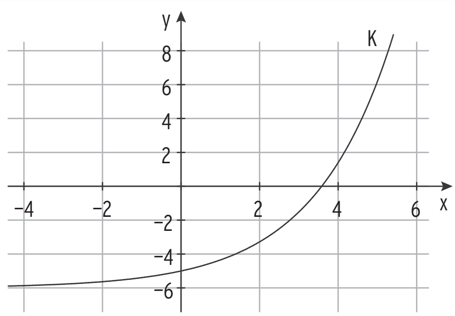
Beispiel

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 6$; $x \in \mathbb{R}$.
Wie verläuft das Schaubild K von f im Koordinatensystem? Skizzieren Sie K.
In welchem Bereich verläuft K unterhalb der x-Achse?

Lösung

Verlauf von K:

- vom 3. in das 1. Feld,
- nähert sich für $x \to -\infty$ der Geraden mit $y = -6$ an **(waagrechte Asymptote),**
- steigend,
- $S_y(0\,|\,-5)$



Schnittpunkt mit der x-Achse:

Bedingung: $f(x) = 0$ $\quad e^{\frac{1}{2}x} - 6 = 0$

$e^{\frac{1}{2}x} = 6$

$\frac{1}{2}x = \ln(6)$

Nullstelle: $x = 2\ln(6)$

Schnittpunkt von K mit der x-Achse: $N(2\ln(6)\,|\,0)$

K **verläuft unterhalb der x-Achse** für $x < 2\ln(6)$.

Hinweis: Das Schaubild von f verläuft unterhalb der x-Achse bedeutet: $f(x) < 0$.

Beispiel

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = 2e^x$ und g mit $g(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Ihre Schaubilder heißen K und G. Berechnen Sie den Schnittpunkt von K und G.

Lösung

Schnittpunkt von K und G:

Bedingung: $f(x) = g(x)$ | $2e^x = e^{2x}$

$2e^x - e^{2x} = 0$

Ausklammern: $e^x(2 - e^x) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $e^x = 0$ oder $2 - e^x = 0$

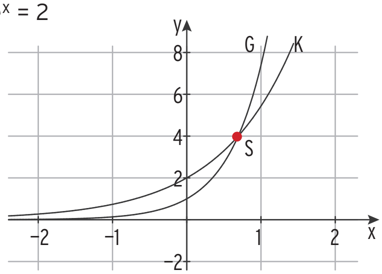
Wegen $e^x \neq 0$: $2 - e^x = 0$

$e^x = 2$

Schnittstelle: $x = \ln(2)$

y-Wert des Schnittpunktes: $y = f(\ln(2)) = 4$

Schnittpunkt von K und G: $S(\ln(2)\,|\,4)$



Beispiel

Die Funktionen f und g sind gegeben durch $f(x) = e^{2x}$ und $g(x) = 2e^x - 1$; $x \in \mathbb{R}$.
Ihre Schaubilder heißen K und G.
Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K und G.

Lösung

Gemeinsamer Punkt von K und G:

Bedingung: $f(x) = g(x)$ | $e^{2x} = 2e^x - 1$

$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

Substitution: $u = e^x$; $u^2 = e^{2x}$ | $u^2 - 2u + 1 = 0$

Doppelte Lösung der quadratischen Gleichung: $u_{1|2} = 1 = e^x$

$x = \ln(1) = 0$

y-Wert des gemeinsamen Punktes: $y = f(0) = 1$

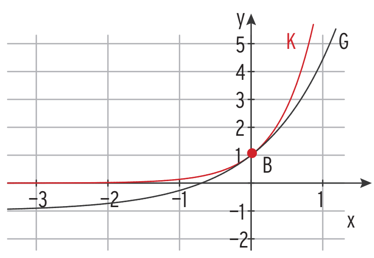
Gemeinsamer Punkt von K und G: $B(0\,|\,1)$

Hinweis: $u_1 = 1 = e^x \Rightarrow x_1 = 0$

$u_2 = 1 = e^x \Rightarrow x_2 = 0$

$x_{1|2} = 0$ ist doppelte Lösung,

also Berührstelle.



Aufgaben

1 Untersuchen Sie das Schaubild K der gegebenen Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$ auf Achsenschnittpunkte und auf Asymptoten. Zeichnen Sie K.

a) $f(x) = 2e^{x} - 2$ **b)** $f(x) = e^{-x} + 3$ **c)** $f(x) = 4 - 2e^{x}$

d) $f(x) = e^{-0,4x} - 3$ **e)** $f(x) = -1 + 2e^{1,25x}$ **f)** $f(x) = \frac{e}{2} - e^{0,5x}$

2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = e^{1,5x} - 5$; $x \in \mathbb{R}$.
Wie verläuft das Schaubild K von f im Koordinatensystem? Skizzieren Sie K.
In welchem Bereich verläuft K oberhalb der x-Achse?

b) c)

3 K ist das Schaubild von f, G ist das Schaubild von g.
Berechnen Sie die Schnittpunkte von K und G.

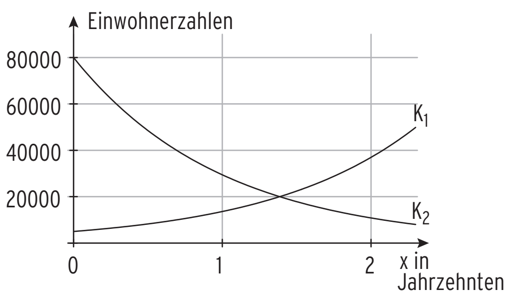
a) $f(x) = -e^{2x}$; $g(x) = -6e^{x}$ **b)** $f(x) = e^{2x} + 6$; $g(x) = 5e^{x}$

c) $f(x) = -e^{3x} + 2x$; $g(x) = 2x - 5$ **d)** $f(x) = 2e^{0,5x} - 3x$; $g(x) = -3x + 1$

4 Die Funktionen f und g sind gegeben durch $f(x) = e^{2x} + 9$ und $g(x) = 6e^{x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Ihre Schaubilder heißen K und G.
Welche Lage haben K und G?
Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K und G.

5 Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = 0,5e^{x} - 2$ und $g(x) = 2 - e^{x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Die Nullstelle von f ist doppelt so groß wie die Nullstelle von g.
Zeichnen Sie K_f und K_g in ein Koordinatensystem ein.
Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunktes S von K_f und K_g.
P und Q sind die Schnittpunkte von K_f und K_g mit der y-Achse.
Berechnen Sie den exakten Inhalt des Dreiecks PSQ.

6 Die Einwohnerzahlen der Städte V und W entwickeln sich sehr unterschiedlich. Die Entwicklung der Einwohnerzahlen wird beschrieben durch die Funktionen f und g:
$f(x) = 5000e^{x}$ und
$g(x) = 80000e^{-x}$; x in Jahrzehnten.
Ordnen Sie jeder Stadt eine Kurve zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.



Nach wie vielen Jahren werden die Städte gleich viele Einwohner haben?

7 Die Gesamtkosten der Wald GmbH lassen sich beschreiben durch
$K(x) = 0,4e^{0,5x} + 2,5$; $x \geq 0$, x in ME, K(x) in GE.

a) Bestimmen Sie die Fixkosten.

b) Die Gewinnschwelle liegt etwa bei 2 ME, wenn der Erlös durch $E(x) = 1,7x$ festgelegt ist.
Bestimmen Sie die Gewinnschwelle auf eine Dezimale gerundet.

Aufgaben zu Exponentialfunktionen

1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 5$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K.

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen. Skizzieren Sie K. In welchem Bereich verläuft K unterhalb der x-Achse?

b) K wird in y-Richtung verschoben, sodass die verschobene Kurve die x-Achse im Ursprung schneidet. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

2 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2e - e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$, mit Schaubild K_f.

a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
Begründen Sie: K_f hat eine waagrechte Asymptote. Zeichnen Sie K_f.
Liegt der Punkt $(1|2e)$ auf, unterhalb oder oberhalb von K_f? Begründen Sie.

b) K_f schneidet die Gerade h mit der Gleichung $y = 0{,}5e$ im Punkt S.
Berechnen Sie die Koordinaten von S.

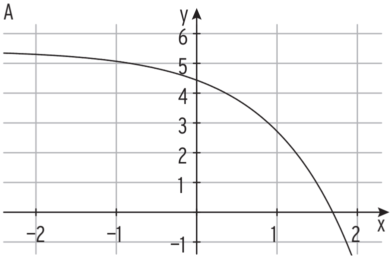
c) K_f wird an der x-Achse gespiegelt und es entsteht K_g von g. Bestimmen Sie $g(x)$.

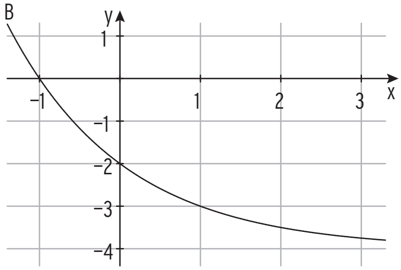
3 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a + e^{bx}$; $x \in \mathbb{R}$, verläuft durch die Punkte $S(0|-e)$ und $B(4|-1)$. Bestimmen Sie a und b.

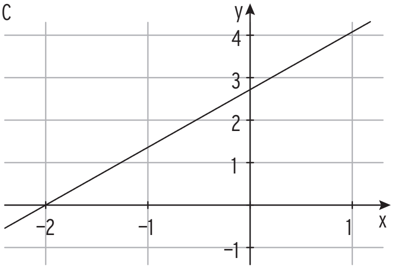
4 Wenn der Behälter vollständig gefüllt ist, wird die Abflussgeschwindigkeit näherungsweise durch die Funktion w beschrieben mit $w(t) = 60e^{-0{,}0625t}$; $t \geq 0$; t in s; w(t) in Liter pro s. Wie lange dauert es, bis nur noch ein halber Liter pro Sekunde herausfließt?

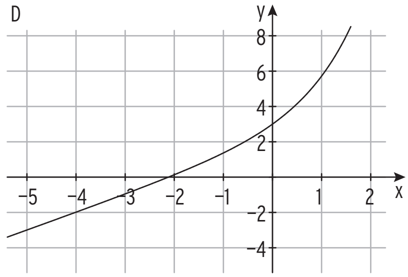
5 Welcher Graph gehört zu welchem Funktionsterm?

$f_1(x) = \frac{1}{2}ex + e$ $\quad f_2(x) = 2e - e^x$ $\quad f_3(x) = 2e^{-\ln(2)\cdot x} - 4$ $\quad f_4(x) = e^x + x + 2$

A


B


C


D


3.7 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben

3.7.1 Exponentielles Wachstum

Beispiel

➲ Auf einem Konto sind 1000,00 € fest angelegt.
Der jährliche Zinssatz beträgt 8 %.

a) Wie kann man das Kapital nach einer beliebigen Zeit berechnen?

b) Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich das Kapital?

Lösung

a) Kapital nach t Jahren (mit Zins und Zinseszins) $y = 1000 \cdot 1{,}08^t$
Dieses **exponentielle Wachstum** wird mit der **Exponentialfunktion** f mit
$f(t) = 1000 \cdot 1{,}08^t$; t in Jahren, beschrieben.
In der Praxis wählt man als **Basis die Zahl e.**
Mit $1{,}08 = e^{\ln 1{,}08}$ erhält man: $f(t) = 1000 \cdot 1{,}08^t = 1000\,(e^{\ln 1{,}08})^t = 1000\,e^{0{,}0770\,t}$
Zum Zeitpunkt t = 0 ergibt sich für das Kapital: $f(0) = 1000$ **(Anfangsbestand).**
Festlegung: $k = \ln(1{,}08) = 0{,}0770 > 0$ ist die **Wachstumskonstante.**
Hinweis: Das Kapital vermehrt sich mit dem **Wachstumsfaktor** 1,08.
$y = 1000\,e^{0{,}0770\,t}$ bezeichnet man als **Wachstumsgleichung.**

Beachten Sie:

Prozesse **exponentiellen Wachstums** können mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden: $f(t) = a\,e^{kt}$; $t \geq 0$
$k > 0$ ist die **Wachstumskonstante**; $a = f(0)$ ist der **Anfangsbestand**.

b) Bed. für die **Verdoppelungszeit:** $f(t) = 2 \cdot f(0)$

$$2000 = 1000\,e^{0{,}0770\,t}$$
$$e^{0{,}0770\,t} = 2$$

Logarithmieren ergibt: $t = \frac{\ln(2)}{0{,}0770} = 9{,}0$

Die **Verdoppelungszeit** wird mit t_V bezeichnet und beträgt 9 Jahre.

Verdoppelungszeit t_V: $t_V = \frac{\ln(2)}{k}$

Beachten Sie:

Die **Verdoppelungszeit t_V** ist die Zeit, in der sich der Bestand **verdoppelt.**
t_V ist unabhängig vom Anfangswert: $t_V = \frac{\ln(2)}{k}$.

Beispiel

Die Bevölkerung eines Landes (2016: 80 Millionen) schrumpft in den letzten Jahren um 2 % jährlich. Modellieren Sie die Bevölkerungsentwicklung für die nächsten 50 Jahre. Welche Folgerungen ergeben sich?

Lösung

Reale Situation:

Bevölkerungsentwicklung eines Landes, das heute 80 Millionen Einwohner hat.

Reales Modell:

Vereinfachung: Die Bevölkerung schrumpft in den nächsten 50 Jahren jährlich um 2 %. Die Bevölkerungszahl für das Jahr t (2016 entspricht $t = 0$) soll durch eine Funktion beschrieben werden.

Mathematisches Modell:

t: Jahr nach 2016; B(t): Bevölkerung des Landes in Millionen

Für $0 \leq t \leq 50$ ergibt sich: $B(t) = 80 \cdot 0{,}98^t$

Dieser Funktionsterm beschreibt die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t.

Der Funktionsterm kann auch mit der Basis e angegeben werden.

Umrechnung der Basis 0,98 auf die Basis e: $0{,}98 = e^{\ln(0{,}98)} = e^{-0{,}0202}$

Wachstumsgesetz: $B(t) = 80 \cdot 0{,}98^t$

$B(t) = 80 \cdot (e^{-0{,}0202})^t$

Potenzgesetz: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\quad B(t) = 80\,e^{-0{,}0202\,t}$

Funktionsterm: $B(t) = 80 \cdot e^{-0{,}0202\,t}$

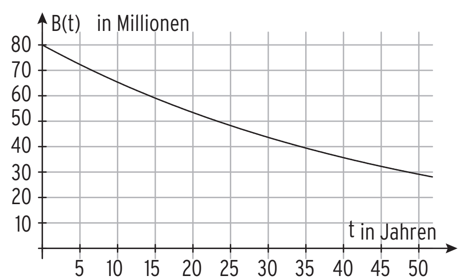
Mathematische Lösung:

$B(50) = 29{,}13...$

Die Bevölkerung nimmt unter der Annahme auf etwa 29,13 Millionen ab.

Bewertung:

Das Modell kann geeignet sein für die nächsten 20 Jahre. Auf lange Sicht ist es nicht geeignet, da sich die Bedingungen durch politische und wirtschaftliche Entscheidungen ändern.



Aufgaben

1 Bei einem Reaktorunfall im Jahre 1986 wurden durch die Spaltung von Uran 235 große Mengen radioaktiver Stoffe freigesetzt, z. B. Cäsium 137. Dieser Stoff hat eine Halbwertszeit von 30,2 Jahren. Wie viel Prozent des freigesetzten Cäsiums sind heute (2016) noch vorhanden? Wie lange dauert es, bis nur noch 10 % des damals freigesetzten Cäsiums 137 vorhanden sind? Modellieren Sie die Situation.

2 Die Wasserrose vermehrt sich auf einem See mit 8 ha Größe. Die bedeckte Fläche nimmt wöchentlich um 30 % zu. Anfangs sind 150 m^2 der Oberfläche bedeckt. Analysieren Sie die Situation.

3 Um wie viel % nimmt ein eingesetztes Kapital in 8 Jahren zu, wenn der jährliche Zinssatz 4,6% beträgt?

4 Eine radioaktive Substanz zerfällt nach dem Gesetz $g(t) = g(0)\,e^{-0{,}0122\,t}$.
Dabei gibt g (t) die Masse des Präparates in Gramm zum Zeitpunkt t (t in Tagen) nach Beginn der Messung an.

a) Welche Masse war zu Beginn der Messung ($t = 0$) vorhanden, wenn nach 20 Tagen noch 24 g übrig sind? Geben Sie das Zerfallsgesetz an.

b) Nach wie viel Tagen ist nur noch 1 % der ursprünglichen Masse vorhanden?

c) Berechnen Sie die tägliche Zerfallsrate in Prozent und die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz.

5 Der Tabelle kann man die Bevölkerungsentwicklung eines Landes für den Zeitraum von 30 Jahren entnehmen (Angabe in Millionen).

Zeit t in Jahren	0	10	20	30
Anzahl N in Millionen	3,9	5,3	7,2	9,78

Begründen Sie die Annahme, dass N ungefähr exponentiell zunimmt.
Bei einer Bevölkerungszahl von über 13 Millionen droht Wasserknappheit.
Modellieren Sie die Bevölkerungsentwicklung. Bewerten Sie Ihr Modell.

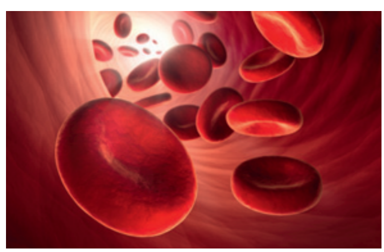
6 Ein Auto verliert pro Jahr 20 % an Wert.

a) In welchem Zeitraum sinkt der Wert auf die Hälfte des Neuwagenpreises?

b) Welchen Prozentsatz seines Neuwertes hat es noch nach 6 Jahren?

c) Berechnen Sie den jährlichen Wertverlust der ersten drei Jahre, jeweils bezogen auf den Neuwert.

7 Zur Untersuchung eines Organs werden dem Patienten 59 mg eines Farbstoffes gespritzt. Der gesunde Körper baut pro Minute 4 % des Momentanbestandes ab.Ist der Patient gesund, wenn nach 20 Minuten noch 30 mg Farbstoff im Blut sind?



Anhang

Grundwissen

1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen

Beispiele

$[0; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$	alle reellen Zahlen von 0 bis 5, einschließlich 0 und 5
$]-2; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$	alle reellen Zahlen zwischen −2 bis 2, ausschließlich −2 und einschließlich 2
$]1; 6[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\}$	alle reellen Zahlen größer als 1 und kleiner als 6
$[1; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$	alle reellen Zahlen größer oder gleich 1

Geschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Offenes Intervall: $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Halboffenes Intervall: $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Aufgaben

1 Schreiben Sie als Intervall.

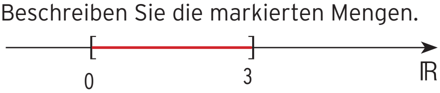
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ **b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2{,}5\}$ **c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ **d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 7\}$

2 Stellen Sie das Intervall in Mengenschreibweise dar.

a) $[-2; 3]$ **b)** $]-5; 1]$ **c)** $]-\infty; 3]$ **d)** $]1; 10[$

3 Beschreiben Sie die markierten Mengen.

a)



b)

c)

d)

2 Algebraische Begriffe und Vorübungen

2.1 Begriffe

Summanden

$\underbrace{a + b}_{\text{Summe}}$

$\underbrace{a - b}_{\text{Differenz von a und b}}$

Variable

$3 \cdot x$

Koeffizient

$\underbrace{x + x + x}_{\text{Summe}} = \underbrace{3 \cdot x}_{\text{Produkt}}$

Faktoren

$\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{Produkt}} = \underbrace{x^3}_{\text{Potenz}}$

Zähler, Nenner: $\left.\frac{a}{b}\right\}$ Quotient (Bruch) $b \neq 0$

$\frac{1}{a}$; $a \neq 0$

Kehrwert von a

2.2 Rechnen mit Summen und Differenzen

Beispiele

$7 + (-5) = 7 - 5 = 2$

$5a + (-6a) = 5a - 6a = -1a = -a$

$5a - 3(-4a) = 5a + 12a = 17a$

$12a + 4b - (-3a - 5b) = 12a + 4b + 3a + 5b = 12a + 3a + 4b + 5b = 15a + 9b$

Minuszeichen vor der Klammer beachten.

Aufgaben

1 Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a) $5a - 5b - (8a + 2b) + (6a - 7b)$

b) $(6x - 4) - (-8x + 12) + 20x$

c) $(12x + 6y) + (-3x - 4y) - (-2x - 4y)$

d) $15x + 7y + (-4x - 12y) - (9x - 7y)$

2 Fassen Sie zusammen.

a) $-3 \cdot (-3) \cdot a + 2a$

b) $2ab - 5ab$

c) $-18x - 7x \cdot (-2)$

d) $-(3x \cdot (-2) - (-x + 5))$

e) $20a - (7a - (2a + 3))$

f) $3ax - (5x - 2ax) + 9x$