

Wolfgang Schüler

Grundlegungen der Mathematik in transzendentaler Kritik

Frege und Hilbert

Schriften zur
Transzentalphilosophie 3



Meiner · BoD

WOLFGANG SCHÜLER

Grundlegungen der Mathematik
in transzendentaler Kritik

Frege und Hilbert

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes, inhaltlich mit der ursprünglichen Ausgabe identisches Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abweichungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet sind. Weitere Informationen unter: www.meiner.de/bod.

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://portal.dnb.de> abrufbar.

ISBN: 978-3-7873-0556-8

ISBN eBook: 978-3-7873-2843-7

© Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 1983. Alle Rechte vorbehalten. Dies gilt auch für Vervielfältigungen, Übertragungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen, so weit es nicht §§ 53 und 54 URG ausdrücklich gestatten. Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt aus 100% chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.

www.meiner.de

INHALT

Vorwort	XI
Einleitung	XIII
<i>Kapitel I: Die Objektivierungsproblematik bei Frege und Hilbert</i>	<i>1</i>
§ 1. Die Idee einer Gedankenrechnung bei Leibniz	1
§ 2. Frege und das Leibnizprogramm	3
§ 3. Das Verhältnis von Subjekt und Objekt in Freges zweiter Denkperiode	6
§ 4. Die Dualität von Begriff und Gegenstand bei Frege	9
§ 5. Der Begriffsumfang als Gegenstand	11
§ 6. Das Erfordernis einer Grundlegung der Mathematik aus der Sicht von Frege	13
§ 7. Idee und Programm einer Einbettung der Mathematik in die Logik (Logizismus)	16
§ 8. Die Reduktion des Zahlbegriffes auf den Mengen- und den Zuordnungsbegriff bei Frege	18
§ 9. Philosophische Überlegungen zur Reduktion des Zahlbegriffes auf den Mengen- und den Zuordnungsbegriff	20
§ 10. Freges Erwägungen zur Korrektur seines Systems in Anbetracht der Antinomie von Russell	23
§ 11. Zwei Typen des Zweifels als Grundlage der Korrekturüberlegungen bei Frege	26
§ 12. Einige Elemente der prädikatenlogischen und klassenlogischen Sprache	29
§ 13. Zweifelspositionen als Grundlage der Systemansätze bei einigen Nachfolgern Freges	31
§ 14. Der Logizismus als Wegbereiter des Formalismus	36
§ 15. Einwände von seiten des Intuitionismus	41
§ 16. Konsequenzen der intuitionistischen Position für den Bestand der klassischen Mathematik und das Programm von D. Hilbert	43
§ 17. Hilberts Rekurs auf die empirische Anschauung	47
§ 18. Die Einführung „idealer Elemente“	52
§ 19. Erläuterungen zum Begriff des formalen Standpunktes	58
§ 20. Die Hilbertsche Axiomatik	61
§ 21. Die Hilbertsche Axiomatik als Formalisierung	66
§ 22. Die Idee der Definition eines Begriffes durch seine Beziehungen zu anderen Begriffen des Systems	70

§ 23. Zum Verhältnis von mathematischer Existenz und Widerspruchsfreiheit	73
§ 24. Die Aufspaltung der Mathematik in eine „formale“ Mathematik und eine „inhaltliche“ Metamathematik. Metamathematische Begrenzungssätze und die Aufweichung des finiten Standpunktes	78
§ 25. Der Grundlegungsversuch der Mathematik von Hilbert unter dem Aspekt von Objekt- und Begriffszweifel	82
<i>Kapitel II: Das Verhältnis von Subjekt und Objekt im Bewußtsein</i>	87
Vorbemerkung	87
§ 1. Die Erkenntnis des Gegenstandes aus dem Wissen um die Erkenntnisart	87
§ 2. Das Element des Rückbezuges in der Behauptung	88
§ 3. Das Selbstbewußtsein als die Weise, in der sich Bewußtsein vollzieht	89
§ 4. Der Handlungscharakter des Bewußtseins	90
§ 5. Begriffsbestimmung der Objektivierung und die Ratlosigkeit gegenüber Zweifeln als Konsequenz objektivierenden Denkens	92
§ 6. Durchführung und Aufhebung der Objektivierung als unverzichtbare Elemente des Bewußtseins	93
§ 7. Anschauung und Begriff als Momente der Einheit von Subjekt und Objekt	94
§ 8. Grundzüge des Realismus	98
§ 9. Grundzüge des Idealismus	100
§ 10. Der idealistische Zweifel an der realistischen Position	102
§ 11. Der realistische Zweifel an der idealistischen Position	105
§ 12. Die Transzentalphilosophie als Synthesis von Idealismus und Realismus	106
§ 13. Zur Methode der Transzentalphilosophie	108
§ 14. Zur Weiterentwicklung unseres bisherigen philosophischen Standpunktes	110
§ 15. Ergänzungen zum höheren transzentalen Standpunkt	114
<i>Kapitel III: Realismus und Idealismus bei Frege und Hilbert</i>	117
§ 1. Zur Verbindung der Kapitel I und II und zur verbleibenden Aufgabe	117
§ 2. Die Konzeption des Gedankens bei Frege als Ausdruck eines höheren Realismus	118
§ 3. Realistische und idealistische Elemente bei der „Zerfällung“ des Gedankens	121
§ 4. Der Einwand der Zirkularität gegen Freges Anzahlbegriff und die Dominanz des realistischen Prinzips in seinem Zuordnungsbegriff	124
§ 5. Realistische und idealistische Bestandteile in Freges Auffassung vom Umfang eines Begriffes	130

§ 6. Hilberts Entwurf der elementaren Zahlentheorie als Ausdruck einer realistischen Denkweise	137
§ 7. Ergänzungen zur Kritik am niederen Realismus	139
§ 8. Die idealen Elemente als Anleihe beim höheren Realismus	145
§ 9. Die formalistische Doktrin	147
§ 10. Zum Strukturbegriff	152
§ 11. Die Auseinandersetzung zwischen Frege und Hilbert vor dem Hintergrund ihrer verschiedenen Ansichten von der Aufgabe der Wissenschaft	158
§ 12. Zum Problem des Sollens und der Rechtfertigung	164
 Quellenverzeichnis	171
 Sachregister	185

VORWORT

In der vorliegenden Arbeit werden Grundlegungen der Mathematik vom Standpunkt der Transzentalphilosophie aus untersucht. Wer einen solchen Versuch unternimmt, gerät in ein eigenümliches Spannungsverhältnis: Auf der einen Seite muß er sich auf das Studium der Mathematik, der elementaren Logik und höherer Logiksysteme einlassen. Wenn er sich dabei die für seine Thematik relevanten Ergebnisse und Denkweisen dieser Disziplinen zu eigen macht, wird er wohl an der Sinnhaftigkeit gewisser Fragen zweifeln, die sich die Philosophie der Mathematik seit Jahrhunderten stellte und nicht befriedigend beantworten konnte. So erscheint ihm z.B. im Lichte axiomatischer Mengenlehren die Frage nach dem Wesen der Zahl inadäquat gestellt, tritt doch hier der Zahlbegriff nur in Verbindung mit einer vorgegebenen Theorie auf.

Auf der anderen Seite können diese Theorien aber nicht die Ausgangsbasis seiner Überlegungen bleiben, vielmehr fordert die Transzentalphilosophie, auf deren Bedingungen sowohl in theoretischer als auch in doxischer Hinsicht zu reflektieren. Es gilt, die *geistigen Aufbauelemente* jener Konzeptionen, insbesondere der betreffenden Grundobjekte, Eigenschaften und Relationen aufzuspüren, den ihnen zugrundeliegenden Wissenschaftsbegriff herauszuarbeiten und an sie die Rechtfertigungsfrage zu stellen. Es gilt ferner zu prüfen, ob in solchen Systementwürfen Probleme der traditionellen Philosophie der Mathematik aufgegriffen, ob sie eingeschränkt, verschoben bzw. ausgeklammert werden, und ob hinter ihnen eine Modifikation des philosophischen Anspruches steht. So ist – um bei dem angeführten Beispiel zu bleiben – im Hinblick auf eine Definition der Zahl innerhalb einer axiomatischen Mengenlehre zu klären, was sie für die Gewinnung eines philosophisch befriedigenden Zahlbegriffes leistet, wie es um die philosophische Bestimmung der Menge steht und ob nicht – entgegen dem äußeren Eindruck – ein Wissen um die Zahl bereits Voraussetzung für die Erstellung des Begriffes der Menge ist.

Im folgenden entfalten wir die soeben angedeutete Problematik an den Grundlegungsversuchen der Mathematik von Frege und Hilbert. Sie stehen am Beginn der Ära systematischer Grundlagenforschung der Mathematik. In den Konzeptionen von Frege und Hilbert treffen traditionelle und moderne Ansichten aufeinander, weshalb sie für eine Untersuchung der genannten Art besonders aufschlußreich zu sein versprechen.

Im Jahre 1980 nahm die Philosophische Fakultät der Ludwig-Maximilians-Universität München die vorliegende Arbeit unter dem Titel: „Die Objektivierung als ein Problem für die Grundlegungsversuche der Mathematik von Frege und Hilbert“ als Dissertation an. Mein Dank für ihre Anregung und Betreuung gilt meinem verehrten philosophischen Lehrer, Herrn Prof. Dr. Dr. Reinhard Lauth. In

seinen, in ihrer Tiefe und Klarheit mir unvergeßlichen Lehrveranstaltungen vermittelte er mir die Transzentalphilosophie. Mit großem Interesse verfolgte er dann die Entstehung dieser Arbeit und wirkte in zahlreichen Geprächen klarend und wegweisend. Danken möchte ich auch Herrn Dr. Franz Bader für viele fruchtbare Diskussionen; sie gaben mir u.a. wesentliche Impulse für die Darstellung der realistischen und idealistischen Betrachtungsweise im zweiten Kapitel. Mein Dank gilt nicht zuletzt Herrn Prof. Dr. Ulrich Blau für seinen wertvollen Rat zu Problemen, welche die formale Logik und Analytische Philosophie betreffen, sowie meinem Freund, Herrn Peter Hoehne, für manche Verbesserung beim Lesen des Manuskriptes.

Wiesbaden, im März 1983

Wolfgang Schüler

EINLEITUNG

Die Jahrzehnte um die letzte Jahrhundertwende sind für die Philosophie der Mathematik durch die Bestrebungen gekennzeichnet, die Grundlagen des mathematischen Wissens zu klären. Drei Richtungen bildeten sich heraus, die man nach der inzwischen schon klassisch gewordenen Einteilung als Logizismus, Intuitionismus und Formalismus bezeichnet. Ihre Begründer – Frege, Brouwer und Hilbert – traten mit dem Anspruch auf, die verbindliche Grundlegung der Mathematik zu liefern. Eine systematische Analyse der ihren Konzeptionen zugrunde liegenden philosophischen Prämissen und deren Gültigkeit lag noch nicht vor, als sich die Undurchführbarkeit des logizistischen und später auch des formalistischen Programms herausstellte.

Nach dem Scheitern dieser beiden dominierenden Richtungen in der Grundlagenforschung breiteten sich Zweifel daran aus, ob es überhaupt sinnvoll sei, eine verbindliche und philosophisch homogene Grundlegung der Mathematik zu fordern. Weithin gab man diesen Absolutheitsanspruch auf, versuchte die genannten Positionen zu kombinieren und deckte im Zuge dieser Bestrebungen zahlreiche Querverbindungen zwischen ihnen auf. Man fragte etwa danach, ob gewisse Ergebnisse eines voraussetzungsreicheren Systems sich auch mit schwächeren – z. B. aus intuitionistischer Sicht zulässigen – Voraussetzungen gewinnen ließen.

Die Klärung der in die betreffenden Konzeptionen eingehenden philosophischen Annahmen und deren Haltbarkeit verlor mit der Preisgabe des genannten Ausschließlichkeitsanspruches an Anziehungskraft, wurden sie doch dadurch selbst relativiert. Aber gerade die Lösung dieser Aufgabe erscheint geboten, denn ein aus der Kombination verschiedener Prinzipien hervorgehender Entwurf kann in philosophischer Hinsicht nur dann richtig beurteilt werden, wenn man die ihn bestimmenden Prinzipien kennt und sie daraufhin geprüft hat, ob sie haltbar und miteinander vereinbar sind.

In der vorliegenden Arbeit reflektieren wir die Grundlegungsversuche der Mathematik von Frege und Hilbert vom Standpunkt der Transzentalphilosophie aus. Die Wahl des Untersuchungsgesichtspunktes treffen wir im Hinblick auf die zentrale Einsicht der Transzentalphilosophie, daß bei jeglicher Gegenstandskenntnis das Wissen selbst, als das sie vermittelnde Prinzip, zu berücksichtigen ist. Deshalb fordert sie, nicht einfach nach dem Gegenstand zu fragen, den es zu erkennen gilt, sondern nach dem Zusammenhang zwischen ihm und der Weise seiner Erkenntnis. Diese Fragestellung führt sie auf die apriorischen Bedingungen seiner Konstitution.

Demgegenüber schenken Frege und Hilbert den Konstitutionsbedingungen ihrer Gegenstände wenig Beachtung: Sie richten den Blick auf den Wissensinhalt unter weitgehender Abstraktion von dem ihn vollziehenden Wissensakt. Diese

Verfahrensweise bezeichnen wir als Objektivierung und sind daran interessiert ihre Konsequenzen bei Frege und Hilbert aufzudecken.

Zur Struktur der Arbeit

In Kapitel I studieren wir die genannten Grundlegungsversuche der Mathematik auf Objektivierungen hin und machen bereits einige konstitutive Leistungen des denkenden Subjektes geltend, um die Bedenklichkeit dieses Vorgehens anzudeuten. Dabei versuchen wir zu zeigen, daß zentrale Begriffe und Unterscheidungen in den Entwürfen von Frege und Hilbert Mängel aufweisen, die damit zusammenhängen, daß sie wesentliche subjektive Erkenntnisbedingungen gar nicht, bzw. nicht zureichend berücksichtigen. Als Beispiele, an denen wir die Objektivierungsproblematik erörtern, seien genannt:

- 1) Bei Frege: Der „Gedanke“, seine Unterscheidung zwischen Begriff und Gegenstand, die Konzeptionen von Begriffsumfang, Zahl und Zuordnung, sowie die Korrekturüberlegungen für sein System, die er – im Nachwort zu seinem Werk „Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet“ – anstellt.
- 2) Bei Hilbert: Der logische Ort der Objekte seiner elementaren Zahlentheorie, der Begriff des finiten Standpunktes, der Status seiner idealen Elemente, die axiomatische Methode und die ihr zugrunde liegenden philosophischen Prämissen, die er im Briefwechsel mit Frege angibt.

Darüber hinaus stellen wir – unter dem genannten Gesichtspunkt – Schwierigkeiten dar, in die Frege und Hilbert gerieten, und Zweifel, mit denen sie sich auseinandersetzten. Besonders ist uns an der Klärung der Frage gelegen, ob sich diese Schwierigkeiten und Zweifel im Rahmen ihres Denkens überhaupt beheben lassen; doch können wir darauf eine Antwort vorläufig nur in hypothetischer Form geben.

In Kapitel II behandeln wir das Problem der Objektivierung vom Standpunkt der Transzentalphilosophie aus allgemein und weitgehend unabhängig von den vorangegangenen Ausführungen.

Zunächst erläutern wir, was die Transzentalphilosophie unter der Einbeziehung der Erkenntnisart bei der Gegenstandserkenntnis versteht und warum sie diese fordert. Dadurch schaffen wir die Voraussetzungen für eine präzisere Fassung des Begriffes der Objektivierung und zur Kritik an einer solchen Denkweise. Anschließend unterscheiden wir zwei Arten derselben, ihre realistische und ihre idealistische Version, stellen sie einander gegenüber und erheben von der jeweiligen Gegenposition aus Zweifel gegen die andere, welche diese nicht entkräften kann; so führen sich die beiden Positionen wechselseitig in Aporien. Eine vergleichende Betrachtung erweist die Transzentalphilosophie als ihre Synthese.

Um die Möglichkeit zu eröffnen, gewisse Probleme der praktischen Philosophie anzugehen, die für unsere Untersuchungen der Konzeptionen von Frege und Hilbert von Bedeutung sind, erweitern wir dann unseren bisherigen philosophischen Standpunkt und nehmen zur Frage der Rechtfertigung Stellung.

In Kapitel III kommen wir auf die im ersten nur teilweise beantwortete Frage zurück nach dem Zusammenhang zwischen objektivierendem Denken und den Problemen, mit denen sich Frege und Hilbert konfrontiert sahen. Bei ihrer Behandlung stützen wir uns auf die Ergebnisse des Kapitels II. Dort zeigten wir, daß Realismus und Idealismus die beiden Arten der Objektivierung verwirklichen und zwangsläufig in bestimmte Aporien geraten, die auch nicht dadurch behoben werden können, daß man eine „Pendeltheorie“ zwischen beiden Standpunkten entwickelt.

In dem Maße, wie es nun gelingt, die in Kapitel I herausgearbeiteten Objektivierungen in den Grundlegungsversuchen der Mathematik durch Frege und Hilbert unter die realistische bzw. idealistische Position zu subsumieren, überträgt sich auf sie die allgemeine Kritik, die wir zuvor auf der philosophischen Ebene geübt haben.

Wir ergänzen sie dadurch, daß wir auf weitere spezifische Leistungen des denkenden Subjektes aufmerksam machen, die sie in ihren Entwürfen stillschweigend beanspruchen. Es stellt sich heraus, daß diese teilweise in Annahmen bestehen, die in den Zuständigkeitsbereich der praktischen Philosophie fallen, was uns Anlaß gibt, die genannte Differenzierung des objektivierenden Denkens auch für diesen Bereich vorzunehmen und die Überzeugungen Freges und Hilberts daran zu spiegeln. In den Vordergrund stellen wir dabei die Kennzeichnung ihrer Wissenschaftsbegriffe und versuchen, ihre Konzeptionen von diesen her zu verstehen. Vor dem Hintergrund ihrer verschiedenen Ansichten von der Aufgabe der Wissenschaft kritisieren wir abschließend das Urteil, das H. Scholz – stellvertretend für viele – über die Kontroverse zwischen Frege und Hilbert gefällt hat.