

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Der Verfasser:



Stefan Rosner

Lehrer für Mathematik in der Oberstufe
stefan_rosner@hotmail.com

beratend:

Sophie Sturm

Lehrerin für Mathematik an der Beruflichen Oberschule Waldkirchen

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Coverbild (Joker): © fotomaedchen - Fotolia.com

* * * * *

1. Auflage 2018

© 2018 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

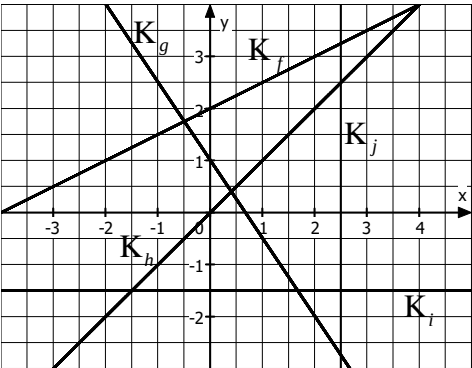
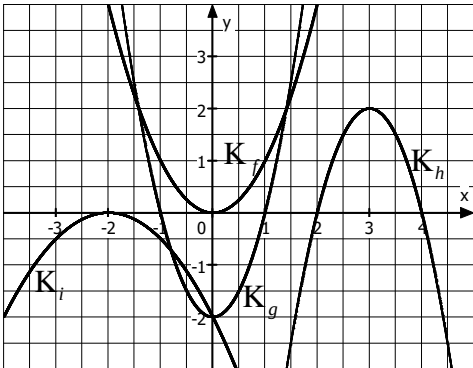
lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

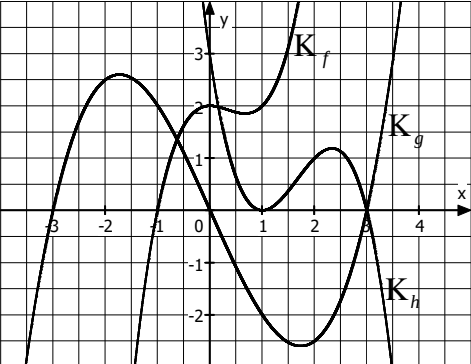
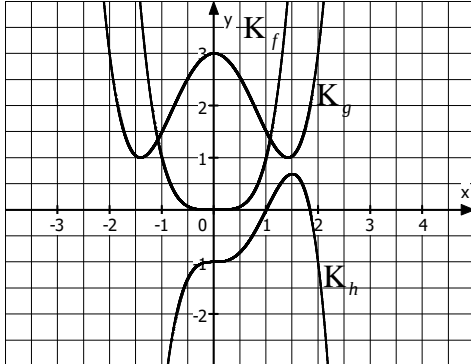
ISBN 978-3-8120-0630-9

2. Funktionen

2.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
Hauptform: $y = mx + b$ Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \text{y-Achsen-abschnitt}$ Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$ Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung) Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$ 1. Winkelhalbierende: $y = x$ ($m = 1$) 2. Winkelhalbierende: $y = -x$ ($m = -1$)  $K_f: y = \frac{1}{2}x + 2$ $K_g: y = -\frac{3}{2}x + 1$ $K_h: y = x$ (1. Winkelhalbierende) $K_i: y = -1,5$ $K_j: x = 2,5$	Allg.: $f(x) = ax^2 + bx + c$ Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s y_s)$ $a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I $a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 c)$ Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)  $K_f: f(x) = x^2$ $K_g: g(x) = 2x^2 - 2$ $K_h: h(x) = -2(x - 3)^2 + 2$ $K_i: i(x) = -0,5x^2 - 2x - 2$



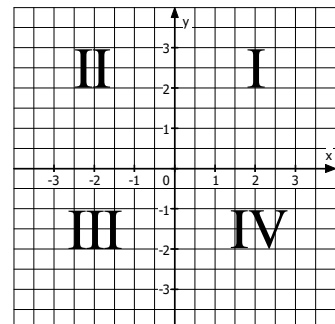
3. Grades	4. Grades
Allg.: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $a > 0$: Verlauf von III nach I $a < 0$: Verlauf von II nach IV Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 d)$ Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)  $K_f: f(x) = x^3 - x^2 + 2$ $K_g: g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$ $K_h: h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$	Allg.: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $a > 0$: Verlauf von II nach I $a < 0$: Verlauf von III nach IV Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 e)$ Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)  $K_f: f(x) = x^4$ $K_g: g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3$ $K_h: h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)

$a > 0$: Verlauf von ... nach I („endet **oben**“)

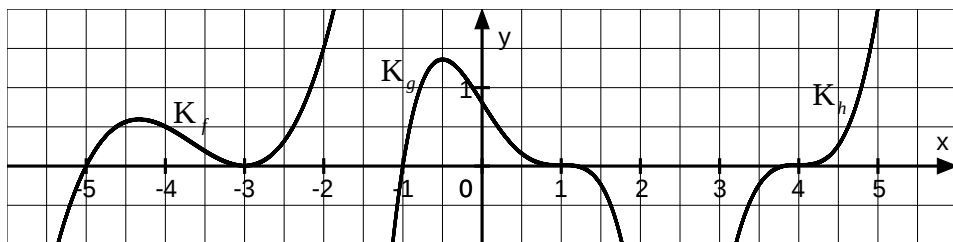
$a < 0$: Verlauf von ... nach IV („endet **unten**“)

Die Quadranten



2.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



$$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2 \quad K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3 \quad K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^3$$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

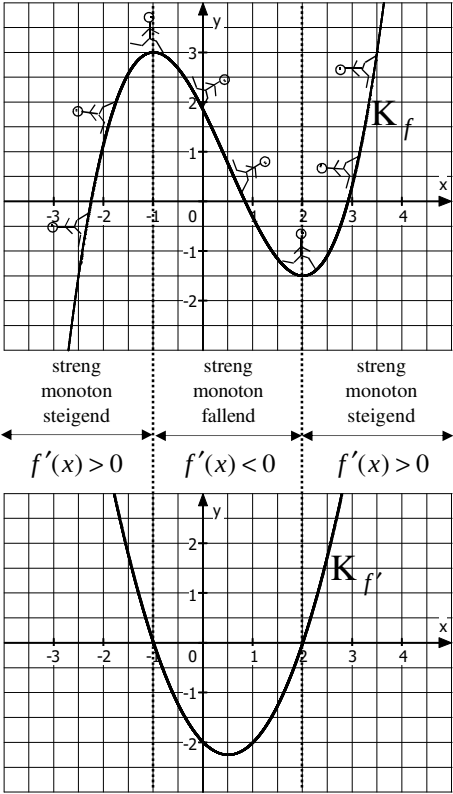
$\swarrow$ Verlauf von III nach IV $\uparrow$ $x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle $\nwarrow$ $x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Linearfaktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$		Schaubild schneidet x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$		Schaubild berührt x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$		Schaubild schneidet und berührt x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \dots$		Schaubild berührt x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

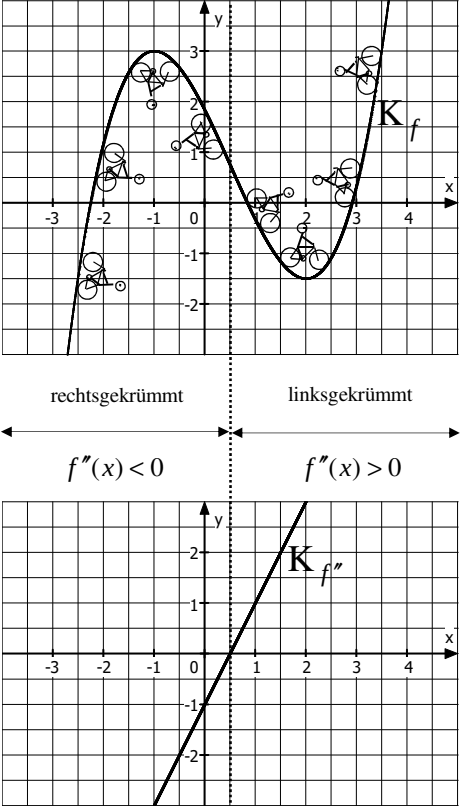


4.3 Monotonie

(Vereinfachte) Definition	Beispiel
Gilt am x-Wert: x_0 $f'(x_0) > 0$ ↓ so nennt man die Funktion hier ↓ streng monoton steigend ↓ Männchen geht bergauf $f'(x_0) < 0$ ↓ so nennt man die Funktion hier ↓ streng monoton fallend ↓ Männchen geht bergab	Einzunehmende Perspektive: Sie sehen von der Seite auf das Männchen, welches ein hügeliges Gelände durchläuft. Das Gelände sehen Sie im Profil.  The figure shows two graphs on a coordinate system. The top graph is the function f, which has a local maximum at $x = -1$ and a local minimum at $x = 2$. The bottom graph is the derivative f', which is a parabola opening upwards with roots at $x = -1$ and $x = 2$. The x-axis is divided into three intervals by vertical dashed lines at $x = -1$ and $x = 2$. Below the x-axis, the intervals are labeled: $f'(x) > 0$ for $x < -1$, $f'(x) < 0$ for $-1 < x < 2$, and $f'(x) > 0$ for $x > 2$. Above the x-axis, the corresponding monotonicity of f is indicated: 'streng monoton steigend' for $x < -1$, 'streng monoton fallend' for $-1 < x < 2$, and 'streng monoton steigend' for $x > 2$. Small circles with arrows on the graph of f illustrate the direction of the slope in each interval.



4.4 Krümmung

(Vereinfachte) Definition	Beispiel
Gilt am x-Wert: x_0 $f''(x_0) > 0$ ↓ links - gekrümmt ↓ Fahrradfahrer lehnt sich nach links $f''(x_0) < 0$ ↓ rechts - gekrümmt ↓ Fahrradfahrer lehnt sich nach rechts so nennt man das Schaubild hier	Einzunehmende Perspektive: Sie sehen von oben (Vogelperspektive) auf den Fahrradfahrer, welcher eine kurvige Straße durchfährt und sich hierbei zunächst nach rechts, dann nach links lehnt.  $f''(x) < 0$ $f''(x) > 0$ rechtsgekrümmt linksgekrümmt

$f''(x)$ negativ $\Rightarrow$ rechtsgekrümmt
 $(f''(x)$ positiv $\Rightarrow$ linksgekrümmt)

4.5 Extrempunkte (Hochpunkte und Tiefpunkte)

Vorgehen zur Ermittlung von Hoch- und Tiefpunkten (am Beispiel)	
1. Schritt : $f'(x) = 0$ Stellen mit waagrechter Tangente (Steigung von 0) ermitteln.	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{11}{6} \quad (\text{Beispiel})$ $f'(x) = x^2 - x - 2$ $f''(x) = 2x - 1$ $f'(x) = 0$ $x^2 - x - 2 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$ $= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$
2. Schritt : Einsetzen in $f''(x)$ Falls $\begin{cases} f''(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases}$ liegt $\begin{cases} \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \end{cases}$ vor.	$f''(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 < 0 \rightarrow \text{H}$ $f''(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0 \rightarrow \text{T}$
3. Schritt : Einsetzen in $f(x)$ y-Koordinaten der Hoch- bzw. Tiefpunkte bestimmen.	$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + \frac{11}{6}$ $= 3 \rightarrow \text{H}(-1 3)$ $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + \frac{11}{6}$ $= -1,5 \rightarrow \text{T}(2 -1,5)$

Alternative zum 2. Schritt : Untersuchung auf Vorzeichenwechsel

Hat $f'(x)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, dann hat das Schaubild von $f(x)$ hier einen Extrempunkt.

Bei einem Vorzeichenwechsel von $\begin{cases} + \text{ nach } - \\ - \text{ nach } + \end{cases}$ liegt ein $\begin{cases} \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \end{cases}$ vor.

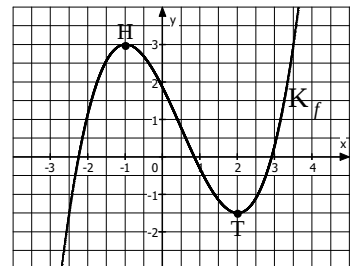
z.B. bei $x_2 = 2$:

$$f'(1) = 1^2 - 1 - 2 = -2 < 0$$

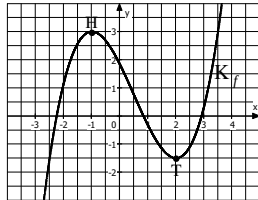
$$f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 4 > 0$$

VZW von $-$ nach $+$

$\Rightarrow$ somit Tiefpunkt



4.6 Maximale Monotonieintervalle bestimmen

Vorgehen (am Beispiel)	
1. Schritt : $f'(x) = 0$ Stellen mit waagrechter Tangente (Steigung von 0) ermitteln. (siehe Vorseite)	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{11}{6} \quad (\text{Beispiel})$ $f'(x) = x^2 - x - 2$ $f''(x) = 2x - 1$ $f'(x) = 0$ $x^2 - x - 2 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$ $= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$
2. Schritt : Einsetzen in $f''(x)$ Falls $\begin{cases} f''(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases}$ liegt $\begin{cases} \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \end{cases}$ vor. (siehe Vorseite)	$f''(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 < 0 \rightarrow \text{H}$ $f''(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0 \rightarrow \text{T}$
3. Schritt : Skizze	
4. Schritt : Antwort von $\begin{cases} \text{steigend nach fallend} \\ \text{fallend nach steigend} \end{cases}$ bei $\begin{cases} \text{Hochpunkt} \\ \text{Tiefpunkt} \end{cases}$	f ist streng monoton fallend im Intervall $[-1; 2]$ f ist streng monoton steigend in $]-\infty; -1]$ und in $[2; \infty[$

Alternative zum 2. und 3. Schritt : Untersuchung mit Vorzeichentabelle von f'

x	-2	-1	0	2	3
$f'(x)$	5	0	-2	0	4
	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Ausnahme : Falls die Gleichung $f'(x) = 0$ (1. Schritt) **keine Lösung** hat, ist die Funktion **überall** entweder monoton steigend oder fallend. Die Berechnung der Steigung an einer beliebigen Stelle (z.B. $f'(0)$) führt zur Entscheidung.



2. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Formel (allg.)

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A: Gesuchtes Ereignis

B: Vorwissen bzw. Bedingung

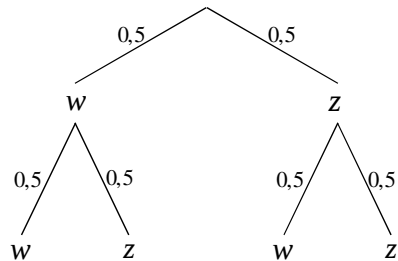
$\cap$: „und“

Formel (in Worten)

$$P_{\text{Vorwissen}}(\text{gesucht}) = \frac{P(\text{entspricht Vorwissen und ist gesucht})}{P(\text{möglich laut Vorwissen})}$$

Beispiel 1: Eine Münze wird 2-mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, wobei bekannt ist, dass im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.



$$\begin{aligned} P_{\text{Wappen im 2. Wurf}}(\text{genau ein Mal Zahl}) &= \frac{P(\text{Wappen im 2. Wurf und genau ein Mal Zahl})}{P(\text{Wappen im 2. Wurf})} \\ &= \frac{P(zw)}{P(zw) + P(ww)} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5 = 50\% \end{aligned}$$

Beispiel 2: An einer Schule werden Schüler nach der Marke ihres Smartphones befragt:

Marke	Samsung	Apple	Sony	HTC	sonst
Anteil	45 %	21 %	8%	6 %	20 %

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Schüler, von welchem bekannt ist, dass er kein Smartphone von Samsung besitzt, ein Smartphone von HTC?

$$\begin{aligned} P_{\text{kein Samsung}}(\text{HTC}) &= \frac{P(\text{kein Samsung und HTC})}{P(\text{kein Samsung})} = \frac{P(\text{HTC})}{P(\text{kein Samsung})} \\ &= \frac{0,06}{1 - 0,45} = \frac{0,06}{0,55} \approx 0,109 = 10,9\% \end{aligned}$$



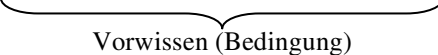
Wichtige Hinweise

Erkennen, dass eine Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit vorliegt

Die Schwierigkeit bei Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit besteht oftmals darin, diese überhaupt als solche zu entlarven und nicht mit „üblichen Baumaufgaben“ zu verwechseln. Hierbei muss das Merkmal solcher Aufgaben, nämlich die Existenz von Vorwissen, erkannt werden.

Es gibt mehrere **grammatikalische Formulierungen**, die den Aufgabenbearbeiter über vorhandenes Vorwissen informieren sollen.

Beispiel (siehe Vorseite)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  genau ein Mal Zahl geworfen wird,
wobei bekannt ist, dass  im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.
grammatikalische Formulierung Vorwissen (Bedingung)

Weitere grammatikalische Formulierungen für die bedingte Wahrscheinlichkeit

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wenn man weiß, dass** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **falls** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird, **wenn** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

Im zweiten Wurf wird Wappen geworfen. (**Vorwissen in eigenem Satz.**)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl geworfen wird.

Achtung: Keine bedingte Wahrscheinlichkeit bei Formulierungen mit „und“

Formulierungen mit „und“ deuten auf eine Aufgabenstellung ohne eine bedingte Wahrscheinlichkeit hin.

Beispiel: Eine Münze wird 2-mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein Mal Zahl **und** im zweiten Wurf Wappen geworfen wird.

$$P(zw) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

5. Binomialverteilung

5.1 Bernoulli-Formel

Zugrunde liegt ein mehrfach ausgeführtes Bernoulli-Experiment, bei dem ...

... nur **zwei mögliche Ergebnisse** („Treffer“ oder „Niete“) eintreten können und

... sich die **Wahrscheinlichkeiten nicht ändern** (z.B. „Ziehen mit Zurücklegen“)

Beispiele: Münzwurf („Kopf“ oder „Zahl“); Mehrfach würfeln („6“ oder „keine 6“); ...

Bernoulli-formel (allg.)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

n : Anzahl der Versuche („Kettenlänge“)

k : Anzahl der „Treffer“

p : Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“

Bernoulli-formel (in Worten)

$$P(X = \text{Anz. Treffer}) = \binom{\text{Anz. Versuche}}{\text{Anz. Treffer}} \cdot \text{Trefferwahrsch.}^{\text{Anz. Treffer}} \cdot \text{Nietenwahrsch.}^{\text{Anz. Nieten}}$$

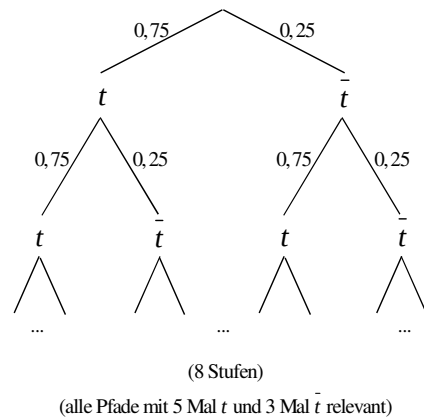
Beispiel 1

Ein Basketballspieler trifft (t) erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er insgesamt 5 Mal (und 3 Mal nicht)?

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{8}{5} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 \\ &= 56 \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 \approx 0,2076 \end{aligned}$$

$$\text{(Tafelwerk: } \binom{8}{5} = 56)$$



Erläuterungen

- Binomialkoeffizient (allg.): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (Werte siehe **Tafelwerk**)
- $n!$ steht für die Fakultät einer Zahl: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$ (Werte siehe **Tafelwerk**)
- $P(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 = 56 \cdot 0,75^5 \cdot 0,25^3 = 56 \cdot 0,00371 \approx 0,2078$.

Es gibt also 56 mögliche Reihenfolgen für 5 Treffer unter 8 Schüssen ($ttttt\bar{t}\bar{t}\bar{t}$, $tttt\bar{t}\bar{t}\bar{t}\bar{t}$, ...), von welchen jede eine Einzelwahrscheinlichkeit von ungefähr 0,00371 aufweist.



Beispiel 2

Eine faire Münze wird 5 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau 3 Mal „Zahl“? (Lösen von Hand)

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

$$\left(\text{Nebenrechnung: } \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}) \cdot (2 \cdot 1)} = 10 \right)$$

Beispiel 3

Ein Bauteil ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in einem Karton mit 30 Bauteilen genau 3 defekte Bauteile?

$$P(X=3) = \binom{30}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^{27} = 4060 \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^{27} \approx 0,12705 = 12,705 \%$$

Beispiel 4

Jonas würfelt 20 Mal.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 7 Mal eine 3?

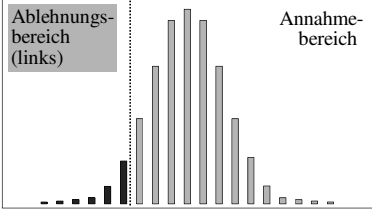
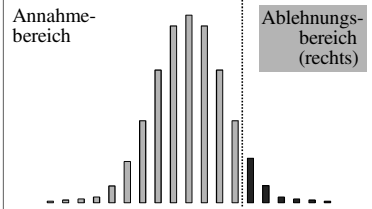
$$P(X=7) = \binom{20}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{13} = 77520 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{13} \approx 0,02588$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 10 Mal eine 2 oder eine 3?

$$\left(\text{Wahrscheinlichkeit für 2 oder 3: } \frac{2}{6} \right)$$

$$P(X=10) = \binom{20}{10} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{10} = 184756 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{10} \approx 0,05426$$

6.2 Einseitiger Hypothesentest: Vorgehen am Beispiel

Linksseitiger Hypothesentest	Rechtsseitiger Hypothesentest
1. Schritt: „Testart“ erkennen und Aufstellen der Nullhypothese.	
- Behauptung: Mindestwahrscheinlichkeit ist gegeben (Nullhypothese $H_0: p_0 \geq \dots$) - Vermutung: Wirkl. Wahrsch. ist geringer als p_0 (Gegenhypothese $H_1: p_0 < \dots$) Geringe Werte von X sprechen gegen die Behauptung (bzw. für die Vermutung). 	- Behauptung: Höchstwahrscheinlichkeit ist gegeben (Nullhypothese $H_0: p_0 \leq \dots$) - Vermutung: Wirkl. Wahrsch. ist höher als p_0 (Gegenhypothese $H_1: p_0 > \dots$) Hohe Werte von X sprechen gegen die Behauptung (bzw. für die Vermutung). 
2. Schritt: Ablesen des Stichprobenumfangs n (Anzahl der Durchführungen) und des Signifikanzniveaus α aus der Aufgabenstellung. (z.B. $n = 30$; $\alpha = 5\%$; $p_0 = 0,4$)	
3. Schritt: Ermittlung des Ablehnungs- und Annahmebereiches.	
Die Wahrscheinlichkeit für höchstens k Treffer darf nicht höher als α sein: $P(X \leq k) \leq \alpha$ Tafelwerk: kum. BV; $\sum_{i=0}^k B(n; p_0; i)$ $P(X \leq 6) = 0,0172$ $P(X \leq 7) = 0,0435$ $P(X \leq 8) = 0,0940$ $P(X \leq 9) = 0,1763$ Ablehnungsb. ($\leq 5\%$) $\bar{A} = \{0; 1; \dots; 7\}$ Annahmebereich	Die Wahrscheinlichkeit für mindestens k Treffer darf nicht höher als α sein: $P(X \geq k) \leq \alpha$ Tafelwerk: kum. BV; $\sum_{i=0}^k B(n; p_0; i)$ $P(X \leq 14) = 0,8246 \Rightarrow P(X \geq 15) = 0,1754$ $P(X \leq 15) = 0,9029 \Rightarrow P(X \geq 16) = 0,0971$ $P(X \leq 16) = 0,9519 \Rightarrow P(X \geq 17) = 0,0481$ $P(X \leq 17) = 0,9788 \Rightarrow P(X \geq 18) = 0,0212$ Annahm. $A = \{0; 1; \dots; 16\}$ Ablehnungsb. ($\leq 5\%$) $\bar{A} = \{17; 18; \dots; 30\}$
4. Schritt: Ermittlung der Entscheidungsregel. Der Vergleich mit dem konkreten Stichprobenergebnis (siehe Aufgabenstellung) führt zur Entscheidung.	
Bei dem Wert 7 oder weniger wird die Hypothese abgelehnt, ansonsten angenommen.	Bei dem Wert 17 oder mehr wird die Hypothese abgelehnt, ansonsten angenommen.



Beispiel 2

Der Hersteller eines Medikaments behauptet, dass dieses bei mindestens 90 % der Patienten wirkt. Ein Konkurrent vermutet, dass diese Wahrscheinlichkeit zu hoch ist und testet das Medikament bei 50 Personen. Es wirkt bei 40 Personen.

Kann die Behauptung des Herstellers bei einem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt werden?

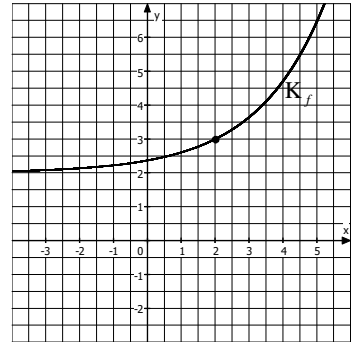
1. Schritt „Testart“ erkennen; Aufstellen der Nullhypothese	Linksseitiger Hypothesentest liegt vor - Mindestwahrscheinlichkeit ist gegeben - Vermutung, dass wirkliche Wahrscheinlichkeit geringer ist (geringe Werte sprechen gegen Behauptung) - Nullhypothese $H_0: p_0 \geq 0,9$ (Gegenhypothese $H_1: p_0 < 0,9$)
2. Schritt Stichprobenumfang n ; Signifikanzniveau α	$n = 50$; $\alpha = 5\%$
3. Schritt Definition Zufallsvariable; Ermittlung von Ablehnungs- und Annahmebereich	X - Anzahl der Patienten, bei denen das Medikament wirkt; $P(X \leq k) \leq 0,05$ Tafelwerk: kum. BV; $\sum_{i=0}^k B(50; 0,9; i)$ $P(X \leq 39) = 0,0094$ $P(X \leq 40) = 0,0245$ $P(X \leq 41) = 0,0579$ $P(X \leq 42) = 0,1221$ Ablehnungsb. ($\leq 5\%$) $\bar{A} = \{0; 1; \dots; 40\}$ $A = \{41; 42; \dots; 50\}$ Annahmebereich
4. Schritt Entscheidungsregel; Entscheidung	Entscheidungsregel: Falls das Medikament bei 40 oder weniger Personen wirkt, wird die Hypothese des Herstellers abgelehnt. Falls es bei 41 oder mehr Personen wirkt, wird die Hypothese angenommen. Entscheidung: Da es bei 40 Personen wirkt, sollte die Hypothese des Herstellers abgelehnt werden.

Aufgabe 20

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0,5x-1} + 2$.

Bei dem x -Wert 2 wird eine Tangente an das Schaubild angelegt.

- Skizzieren Sie diese in das Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die Gleichung der Tangente.

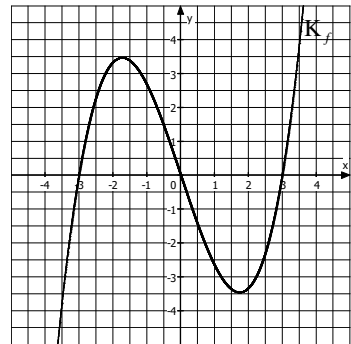


Aufgabe 21

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$.

Eine Tangente an das Schaubild besitzt die Steigung -3 .

- Skizzieren Sie diese in das Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die Gleichung der Tangente.



Aufgabe 22: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,25x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Schaubildes mit der y -Achse.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
- Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente, welche eine positive Steigung besitzt.

Aufgabe 23: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

- Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Schaubildes mit der x -Achse.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Schaubildes mit der y -Achse.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

Aufgabe 24: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2e^{-x} - 4x$.

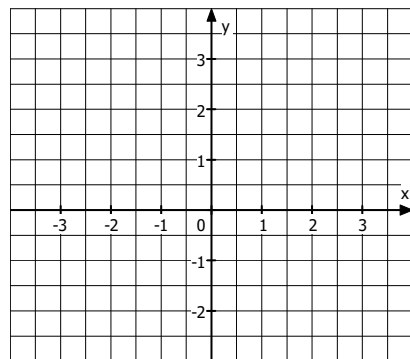
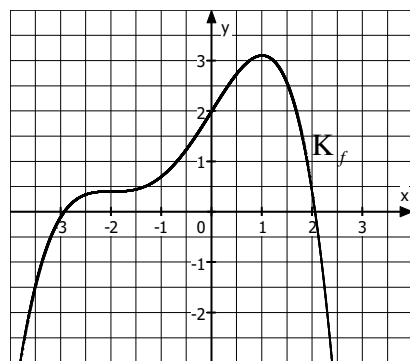
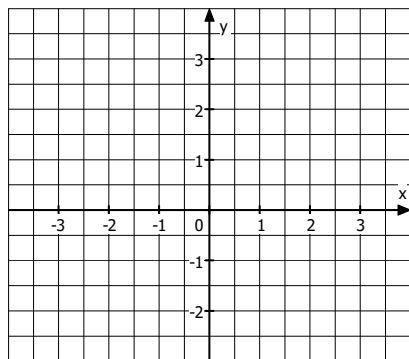
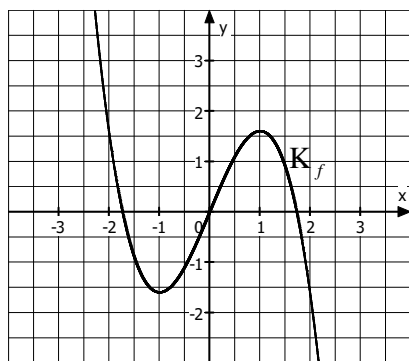
Untersuchen Sie das zugehörige Schaubild auf Extrem- und Wendepunkte.

Aufgabe 25 : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{2x} \cdot (x-1)$.

- Berechnen Sie den Schnittpunkt des Schaubildes mit der y -Achse.
- Berechnen Sie den Schnittpunkt des Schaubildes mit der x -Achse.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes.
- Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle an.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
- Geben Sie die maximalen Krümmungsintervalle an.
- Skizzieren Sie das Schaubild in ein Koordinatensystem.

Lösung auf S. 62.

Aufgabe 26 : Skizzieren Sie jeweils das Schaubild der zugehörigen Ableitungsfunktion.



5. Binomialverteilung

Aufgabe 14: Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

- a) Eine Maschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % fehlerfreie Schrauben. Bei einer Qualitätskontrolle werden 10 Schrauben überprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 8 fehlerfrei?
- b) Eine verbeulte Münze, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % „Wappen“ zeigt, wird 100 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint 60 Mal „Wappen“?
- c) Ein Glücksrad hat 4 gleich große Felder mit den Farben gelb, grün, rot und blau. Das Glücksrad wird 25 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint 8 Mal die Farbe blau?
- d) Ein Basketballspieler verwandelt einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von 20 Freiwürfen zwei nicht?

Aufgabe 15: Andreas möchte eine 10-tätige Gebirgstour machen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag beträgt in dieser Jahreszeit dort 30 %.

Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Bernoulliformel.

- a) Wahrscheinlichkeit für 2 Regentage? _____
- b) Wahrscheinlichkeit für 3 oder 4 Regentage? _____
- c) Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Regentag? _____
- d) Wahrscheinlichkeit für nicht 9 Regentage? _____

Aufgabe 16

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n=20$ und $p=0,5$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten.

- | | |
|---|---------------------------|
| a) $P(X = 7) =$ _____ | b) $P(X < 9) =$ _____ |
| c) $P(X \geq 15) =$ _____ | d) $P(X \leq 8) =$ _____ |
| e) $P(X = 10 \text{ oder } X = 11) =$ _____ | f) $P(X > 6) =$ _____ |
| $=$ _____ | $=$ _____ |
| g) $P(3 \leq X \leq 8) =$ _____ | h) $P(4 < X < 8) =$ _____ |
| $=$ _____ | $=$ _____ |

Aufgabe 17

Ein Glücksrad hat 6 gleich große Felder. 2 der Felder sind grün, 3 sind rot und eines ist blau. Das Glücksrad wird 10 Mal gedreht.

Aufgabe	Lösung
Wahrscheinlichkeit für mehr als 7 Mal grün?	
Wahrscheinlichkeit für höchstens 8 Mal grün oder rot?	
Wahrscheinlichkeit für 5 oder 6 Mal blau?	
Wahrscheinlichkeit für mindestens 7 und höchstens 9 Mal rot?	
Wahrscheinlichkeit für mehr als 8 Mal rot oder blau?	

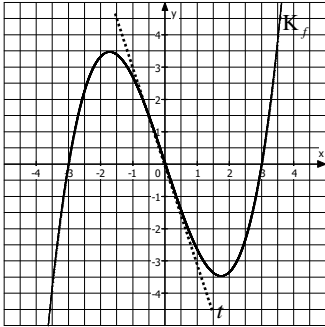
Aufgabe 18

Ein Medikament verursacht bei 25 % aller Patienten Nebenwirkungen. Bei einem Test nehmen 100 Personen das Medikament ein.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei mindestens 16 Personen Nebenwirkungen auf?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei höchstens 20 % aller Personen Nebenwirkungen ein?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei mehr als 30 Personen Nebenwirkungen ein?

Aufgabe 21

a) 2. Aufgabentyp



b)

Berechnung der Tangentengleichung:

1. $f'(x) = m_t$ liefert x -Wert des Berührungspunktes

$$f'(x) = x^2 - 3$$

$$f'(x) = m_t$$

$$x^2 - 3 = -3 \quad | +3$$

$$x^2 = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$x = 0$$

(An dieser Stelle hat das Schaubild die gegebene Steigung.)

2. y -Wert des Berührungspunktes berechnen

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 = 0 \rightarrow B(0|0)$$

3. Tangentengleichung berechnen

$$y = m_t \cdot x + b$$

$$0 = -3 \cdot 0 + b$$

$$0 = b$$

$$\Rightarrow \text{Tangente: } y = -3x$$

Aufgabe 22

$$\text{a) Ansatz: } f(0) = 0,25 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 - 1 = -1$$

$$\rightarrow S_y(0|-1)$$

$$\text{b) } f(x) = 0,25x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$$

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

1. Schritt:

$$f'(x) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0$$

S. v. Nullpr.

$$x_1 = 0 \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x_2 = \frac{6-2}{2} = 2; \quad x_3 = \frac{6+2}{2} = 4$$

2. Schritt:

$$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 8 = 8 > 0 \rightarrow T$$

$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = -4 < 0 \rightarrow H$$

$$f''(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 8 = 8 > 0 \rightarrow T$$

3. Schritt:

$$f(0) = 0,25 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 1 = -1 \rightarrow T(0|-1)$$

$$f(2) = 0,25 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 1 = 3 \rightarrow H(2|3)$$

$$f(4) = 0,25 \cdot 4^4 - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 - 1 = -1 \rightarrow T(4|-1)$$

c) 1. Schritt:

$$f''(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6}$$

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{48}}{6} \approx 0,85; \quad x_2 = \frac{12 + \sqrt{48}}{6} \approx 3,15$$

2. Schritt:

$$f'''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(0,85) \approx 6 \cdot 0,85 - 12 = -6,9 \quad \neq 0 \quad \rightarrow \text{W}$$

$$f'''(3,15) \approx 6 \cdot 3,15 - 12 = 6,9 \quad \neq 0 \quad \rightarrow \text{W}$$

3. Schritt:

$$f(0,85) = 0,25 \cdot 0,85^4 - 2 \cdot 0,85^3 + 4 \cdot 0,85^2 - 1$$

$$\approx 0,79 \rightarrow W_1(0,85|0,78)$$

$$f(3,15) = 0,25 \cdot 3,15^4 - 2 \cdot 3,15^3 + 4 \cdot 3,15^2 - 1$$

$$\approx 0,79 \rightarrow W_2(3,15|0,78)$$

d) Steigungen in den Wendepunkten:

$$f'(3,15) = 3,15^3 - 6 \cdot 3,15^2 + 8 \cdot 3,15 \approx -3,08 < 0$$

$$f'(0,85) = 0,85^3 - 6 \cdot 0,85^2 + 8 \cdot 0,85 \approx 3,08 > 0$$

somit muss Wendetangente in $W_1(0,85|0,79)$ berechnet werden:

1. Berührungspunkt: $W_1(0,85|0,79)$

2. Tangentensteigung berechnen

$$f'(0,85) = 0,85^3 - 6 \cdot 0,85^2 + 8 \cdot 0,85 \approx 3,08 (=m_t)$$

3. Tangentengleichung berechnen

$$y = m_t \cdot x + b$$

$$0,79 = 3,08 \cdot 0,85 + b$$

$$0,79 = 2,62 + b \quad | -2,62$$

$$-1,83 = b$$

$$\Rightarrow \text{Tangente: } y = 3,08x - 1,83$$

Aufgabe 23

a) Ansatz: $\frac{1}{3}x^3 - x^2 = 0$

$$x^2 \cdot \left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 0$$

S. v. Nullpr.

$$x^2 = 0 \quad |\sqrt{\quad} \quad \frac{1}{3}x - 1 = 0 \quad | +1$$

$$x_{1/2} = 0 \quad \frac{1}{3}x = 1 \quad | \cdot 3$$

$$x_3 = 3$$

$$\rightarrow N_{1/2}(0|0); N_3(3|0)$$

b) Ansatz: $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 = 0$

$$\rightarrow S_y(0|0)$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 2x - 2$$

1. Schritt:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

S. v. Nullpr.

$$x_1 = 0 \quad x - 2 = 0 \quad | +2$$

$$x_2 = 2$$

2. Schritt:

$$f''(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \quad \rightarrow \text{H}$$

$$f''(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0 \quad \rightarrow \text{T}$$

3. Schritt:

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 0^2 \rightarrow \text{H}(0|0)$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 1 \cdot 2^2$$

$$= \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{T}\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$$

d) 1. Schritt:

$$f''(x) = 0$$

$$2x - 2 = 0 \quad | +2$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

2. Schritt:

$$f'''(x) = 2$$

$$f'''(1) = 2 \neq 0 \rightarrow \text{W}$$

3. Schritt:

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{W}\left(1 \mid -\frac{2}{3}\right)$$

Aufgabe 15

$$\text{a) } P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^8 \approx 0,23347$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X=3) + P(X=4) \\ = \binom{10}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 + \binom{10}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^6 \approx 0,489 \\ \approx 0,26683 + 0,20012 = 0,46695 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^{10} \\ = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^{10} \approx 1 - 0,02825 = 0,97175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 1 - P(X=9) \\ = 1 - \binom{10}{9} \cdot 0,3^9 \cdot 0,7^1 \\ \approx 1 - 0,000138 = 0,999862 \end{aligned}$$

Aufgabe 16

$$\text{a) } P(X=7) = 0,0739$$

$$\text{b) } P(X < 9) = P(X \leq 8) \approx 0,2517$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) \\ \approx 1 - 0,9793 \approx 0,0207 \end{aligned}$$

$$\text{d) } P(X \leq 8) \approx 0,25172$$

$$\begin{aligned} \text{e) } P(X=10 \text{ oder } X=11) \\ \approx 0,1762 + 0,1602 = 0,3364 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) \\ \approx 1 - 0,0577 \approx 0,9423 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2) \\ \approx 0,2517 - 0,0002 \approx 0,2515 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } P(4 < X < 8) = P(X \leq 7) - P(X \leq 4) \\ \approx 0,1316 - 0,0059 \approx 0,1257 \end{aligned}$$

Aufgabe 17

$$\begin{aligned} p &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \\ P(X > 7) &= 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,9966 = 0,0034 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{5}{6}; \\ P(X \leq 8) &\approx 0,5155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{6}; \\ P(X=5) + P(X=6) &\approx 0,0130 + 0,0022 \approx 0,0152 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \\ P(7 \leq X \leq 9) &= P(X \leq 9) - P(X \leq 6) \\ &\approx 0,9990 - 0,8281 = 0,1709 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \\ P(X > 8) &= 1 - P(X \leq 8) \approx 1 - 0,8960 \approx 0,1040 \end{aligned}$$

Aufgabe 18

$$\text{a) } P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) \approx 1 - 0,0111 \approx 0,9889$$

$$\text{b) } P(X \leq 0,2 \cdot 100) = P(X \leq 20) \approx 0,1488$$

$$\text{c) } P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) \approx 1 - 8962 \approx 0,1038$$