

BERNARD BOLZANO - GESAMTAUSGABE
HERAUSGEGEBEN VON EDUARD WINTER †, JAN BERG,
FRIEDRICH KAMBARTEL, JAROMÍR LOUŽIL, BOB VAN ROOTSELAAR

REIHE II
NACHLASS

B. WISSENSCHAFTLICHE TAGEBÜCHER

BAND 5
ERSTER TEIL
MISCELLANEA MATHEMATICA

BERNARD BOLZANO

MISCELLANEA MATHEMATICA 7

HERAUSGEGEBEN

VON

BOB VAN ROOTSELAAR

UND

ANNA VAN DER LUGT

FRIEDRICH FROMMANN VERLAG · GÜNTHER HOLZBOOG

STUTTGART · BAD CANNSTATT 1993

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Bolzano, Bernard:

Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe / hrsg. von Eduard Winter ...
– Stuttgart-Bad Cannstatt : frommann-holzboog.

Reihe 2, Nachlass.

B, Wissenschaftliche Tagebücher.

ISBN 3-7728-0074-2

NE: Winter, Eduard [Hrsg.]; Bolzano, Bernard: [Sammlung]

Bd. 5.

Teil 1. Miscellanea mathematica. –

7. Hrsg. von Bob van Rootselaar u. Anna van der Lugt. – 1993

ISBN 3-7728-0477-2

NE: Rootselaar, Bob van [Hrsg.]

© FRIEDRICH FROMMANN VERLAG · GÜNTHER HOLZBOOG

STUTTGART – BAD CANNSTATT 1993

SATZGESTALTUNG UND DRUCK: OFFIZIN CHR. SCHEUFELE STUTTGART

EINBAND: ERNST RIETHMÜLLER & CO GMBH STUTTGART

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	7
Editionsbericht	9
Einleitung	11
Miscellanea Mathematica, Heft 7: MM 585–MM 680	25
Bibliographie	198
Personenregister	204
Bolzano's Sachregister MM 585–MM 680 nach Repertorium für Mathematik	207
Sachregister	209

VORWORT

Dieser Band enthält eine Transkription des Hefts 7, MM 585–MM 680 der mathematischen Tagebücher Bolzanos, der *Miscellanea Mathematica*. Die Veröffentlichung erfolgt gemäß der pauschalen Genehmigung der Handschriftensammlung der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien vom 2. Januar 1967. In der Bernard Bolzano-Gesamtausgabe (BGA) wird dieser Band mit II B 5/1 bezeichnet.

Die Ausgabe ist mit gewissen Ausnahmen, die im Editionsbericht beschrieben werden, gemäß den Editionsprinzipien in BGA Band E 2/1, S. 8–15, hergestellt.

Wir danken Dr. S. J. Suys-Reitsma für die wesentliche Hilfe bei der Bearbeitung der griechischen und lateinischen Textteile.

Den Bibliotheken der Bundesrepublik Deutschland, der ÖNB Wien und den holländischen Bibliotheken danken wir für ihre freundliche Unterstützung bei der Vorbereitung dieses Bands.

Dem redaktionellen Stab des Verlags danken wir für die Sorgfalt, mit der auch dieser Band betreut worden ist.

Die Herausgeber

B. VAN ROOTSELAAR

A. VAN DER LUGT

EDITIONSBERICHT

Das Manuskript ist nach den Editionsprinzipien in BGA E 2/1 wiedergegeben. Daraus ergibt sich eine bestimmte Korrespondenz zwischen Manuskript und gedrucktem Text, die hier zur klaren Übersicht kurz zusammengefaßt und erläutert wird.

Der durchgängige deutsche Text ist in Bolzanos Manuskript in deutscher Schrift geschrieben. Fremdsprachige Teile, Formeln und vereinzelte Buchstaben (besonders zu den Figuren) im Druck sind im Manuskript in lateinischen Buchstaben geschrieben. Einzelne Buchstaben in deutscher Schrift im Manuskript sind im Druck in Fraktur gesetzt. Die im Manuskript unterstrichenen Wörter und Sätze sind im Druck kursiv gesetzt. Für Kursivdruck innerhalb der Interpolationsklammern sei auf die Editionsprinzipien hingewiesen. Absätze im Druck entsprechen Absätzen des Manuskripts.

Die am Rande des Manuskripts auftretenden Vertikallinien, geschwungenen Klammern, quer geschriebenen Wörter u. dgl. sind in Fußnoten erläutert worden. Die Figuren sind neu gezeichnet. An mehreren Stellen hat Bolzano kritische Bemerkungen zu eigenem oder fremdem Text in Klammern, versehen mit hochgestellten Zeichen, wie z. B. $^{\circ} []^{\circ}$, hinzugefügt. Diese Zeichen sind im allgemeinen im Druck unverändert wiedergegeben, manchmal aber haben wir ein anderes Zeichen wählen müssen.

Exzerpte aus Büchern und Abhandlungen sind als Paraphrasen betrachtet und nicht als Zitate, obgleich sie bisweilen einem Zitat sehr nahe kommen. Die Zusammenfassungen und Paraphrasen sind geprüft worden und wenn nötig in Fußnoten behandelt. Unklarheiten und störende Fehler, welche sich in Bolzanos Zusammenfassungen eingeschlichen haben, sind ebenfalls in Fußnoten vermerkt worden. Im übrigen ist der Text als Bolzanos eigener Text bearbeitet.

Zuletzt noch eine Bemerkung über die Interpolationen in den Zusammenfassungen. Da die von Bolzano behandelten Bücher im sprachlichen Ausdruck erheblich variieren, war es bei der Auflösung von Bolzanos Kurzschrift notwen-

dig, die Ergänzungen nach den Originalschriften durchzuführen, zumal eine Ergänzung in moderner Rechtschreibung oft unmöglich war. Dieses Vorgehen hat überdies den Vorteil, daß man von der Ausdrucksweise des jeweiligen Verfassers einen Eindruck gewinnt und der Text dadurch natürlicher und lebhafter erscheint.

EINLEITUNG

Dieser in der Gesamtausgabe mit BCA 2 B 5/1 bezeichnete Band enthält die Transkription des siebenten Hefts der *Miscellanea Mathematica* (MM 585–680).

Die Aufzeichnungen dieses Hefts sind aus dem Jahre 1814 und können mit Sicherheit nur zwischen 4.3.1814 (MM 345) und 14.9.1814 (MM 835) datiert werden. Vermutlich ist das Heft etwa Juni 1814 abgeschlossen worden.

Immer auf der Suche nach genauen Begriffsbildungen, Grundsätzen und richtigen Formulierungen von Sätzen mit ihren einwandfreien Beweisen, setzt Bolzano die kritische Lektüre mathematischer Werke und Lehrbücher weiter fort.

Die MM 552¹ angefangene Prüfung der *Anfangsgründe der reinen Mathesis* (1790) von J. Schultz wird MM 628 abgeschlossen. Das Werk hat seine Erwartungen nicht erfüllt, weil es sich an vielen Stellen in wissenschaftlicher Hinsicht als sehr schwach erwiesen hat. Nach einigen kurzen Bemerkungen zu Tanzers *Mathematisches Lehrbuch* (1780) und Bartls *Erläuterung* (1801) folgen große Auszüge aus Teilen der *Opera Mathematica* (1695) von J. Wallis. Diese Auszüge MM 630–645 beziehen sich hauptsächlich auf die geometrischen Teile, insbesondere auf die Euklidische Geometrie. Unmittelbar folgen Auszüge und Bemerkungen zu Simsons Ausgabe (1756) der Bücher 1–6 und 11, 12 der *Elemente* (MM 645–659) und Wolffs *Elementa matheseos universae* (1742), von MM 659 bis MM 671. Das Heft wird abgeschlossen mit einer ziemlich eingehenden Untersuchung der *Anfangsgründe* (1802) von Langsdorf. In diesem Buch entwickelt der Verfasser die Geometrie aus dem Begriff des sogenannten Raumpunkts. Der Langsdorfsche Raumpunkt ist das Einfache, das selbst keine Ausdehnung hat, wiederholt unmittelbar nebeneinander gedacht aber den Begriff der Ausdehnung gibt. Bolzano sucht diese Theorie zu widerlegen und gibt durch Ausarbei-

¹ BCA 2B 4/2, S. 149.

tung einer Bemerkung von Sextus Empiricus gegen die Raumpunkte zu diesem Zwecke einige hübsche Beispiele (MM 679, 680).

Die Themen, in die man die Aufzeichnungen dieses Hefts einordnen kann, sind Elementargeometrie, allgemeine Geometrie und allgemeine Mathematik.

Elementargeometrie

Bolzanos Auffassung einer rein wissenschaftlichen Behandlung der Mathematik, auf die er abzielt, tritt deutlich hervor in seinen Bemerkungen zu den Konstruktionsaufgaben, insbesondere in den *Anfangsgründen* von Schultz. Diese Aufgaben werden im Euklidischen Sinne gelöst, indem man zeigt, wie man mittels Zirkel und Lineal ein gewisses geometrisches Gebilde konstruieren kann. Damit ist die Möglichkeit eines solchen Gebildes gezeigt. In der Bolzanoschen Auffassung spielen die Konstruktionen eine sehr untergeordnete Rolle. Die Weise, in der sich ein mathematischer Gegenstand in der Wirklichkeit darstellen läßt, gehört für ihn zur praktischen Mathematik. In der theoretischen Mathematik braucht man nur die Möglichkeit eines gewissen Begriffes zu zeigen. Die Heranziehung gewisser Konstruktionsmittel schädigt die Allgemeinheit und den objektiven Zusammenhang der Sätze. Diese aus den Anmerkungen hervorgehenden Auffassungen stimmen ganz überein mit den Ausführungen in seinen *Beiträgen* II (1810), §§ 35–38.

Betrachten wir zur Erläuterung des Bolzanoschen Standpunktes die Aufgabe 12, § 91 von Schultz (MM 597): Eine gegebene Strecke zu halbieren. Das entspricht Proposition 10 des ersten Buches der *Elemente* und wird auf ähnliche Art wie bei Euklid gelöst durch die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks (mit Zirkel und Lineal).

In der Bolzanoschen Mathematik besteht die Aufgabe allein darin, zu beweisen, daß jede gerade Linie (Strecke) einen Mittelpunkt hat. Weil es sich nur um Punkte und gerade Linien handelt, ist der Begriff des Kreises fremdartig, und man soll die Existenz des Mittelpunkts ohne ihn beweisen. Das tut Bolzano auch. Der Beweis ist eine kurze Fassung des Beweises in § 30 der *Betrachtungen* II (1804). Dort lautet die Behauptung: Zu je zwei gegebenen Punkten gibt es einen und nur einen Mittelpunkt, d. h. einen Punkt, der aus beiden auf gleiche Art bestimmt wird. Der Beweis dieses Satzes ist aber in mathematischer Hinsicht nicht befriedigend.

Ähnliches trifft auf die Aufgabe 7 in § 67 von Schultz zu (MM 594), ein Dreieck mit gegebenen Seiten zu zeichnen. Das entspricht Proposition 22 des ersten Buches der *Elemente*. Diese Aufgabe wird von Bolzano reduziert auf den Exi-

stenzsatz: Zu drei gegebenen Entfernungen ist ein System von drei Punkten mit den gegebenen Entfernungen möglich. Den Beweis dieses Satzes hat Bolzano nicht geliefert.

Ein weiteres Beispiel ist auch die Aufgabe 30 in § 184 von Schultz (MM 609); zu drei Strecken a, b, c die vierte Proportionale d , d. h. die Strecke d derart daß $a : b = c : d$, zu konstruieren. Das entspricht Proposition 12 des sechsten Buches der Elemente. Die Euklidische Lösung verwendet die Konstruktion einer Parallellinie (Elemente I, 31). Bolzano führt die Existenz der vierten Proportionallinie zurück auf die Existenz einer vierten Entfernung zu drei gegebenen Entfernungen a, b, c , derart daß alle Prädikate, welche aus Vergleichung von a und b entspringen, denen der c und d gleich sind, und das würde folgen aus dem Grundsatz, daß wir keine Vorstellung a priori irgend einer bestimmten Entfernung haben (vgl. *Betrachtungen* II, § 39–42 und I, § 19). Der Bolzanosche Beweis ist aber schwerlich als mathematisch zu betrachten. Da wäre es einfacher, die Existenz der vierten Proportionallinie axiomatisch vorauszusetzen. Auch in den MM hat Bolzano den Gebrauch der vierten Proportionallinie zu rechtfertigen gesucht, ohne ihre Konstruktion anzugeben (MM 374)². Diese Rechtfertigung geht zurück auf die angegebene Stelle in den *Betrachtungen*.

Eine Konstruktion, die in fast jedem Lehrbuch der Geometrie vorkommt, ist der goldene Schnitt, die *sectio aurea* der Aufgabe 32 in § 190 von Schultz (MM 609). In dieser Aufgabe, die sich auch in den Elementen II, 11 findet, wird die Teilung einer Strecke a in Teilstrecken x und $a - x$ gefordert, derart daß $x^2 = a(a - x)$. Die Länge der größeren Teilstrecke x ist $1/2 \cdot a(\sqrt{5} - 1)$. In der Bolzanoschen Interpretation, welche etwa lauten würde: Zu jeder Strecke a ist die Strecke $1/2 \cdot a(\sqrt{5} - 1)$ möglich, ist das ein sehr beschränktes Ergebnis und eine leichte Folgerung aus der Möglichkeit einer Strecke $a\sqrt{n}$, wo n eine positive rationale Zahl ist. Diese Möglichkeit stellt wieder einen Spezialfall des allgemeinen Satzes dar, daß zu jeder Strecke c eine andere d möglich sei, die zu c in einem beliebigen Verhältnis stehe, d. h. so daß $d = \alpha c$, wobei α eine beliebige gegebene reelle Zahl ist. Diesen Satz meint Bolzano beweisen zu können. Darin hat er sich aber offensichtlich geirrt. Wie man diesen allgemeinen Satz beweisen kann, hat erst D. Hilbert in seinen *Grundlagen der Geometrie* (1899) gezeigt.

Bolzano hat die Konstruktionslehre wohl sehr einseitig eingeschätzt. Sie war jedoch bestimmt schon in der Antike eine abstrakte Theorie mathematischer Objekte, und die Frage nach der Konstruierbarkeit unter Einschränkung der

² BGA 2B 3/2, S. 126.

Konstruktionsmittel ist eine legitime. Darüber hinaus haben manche Konstruktionen ihren Reiz.

Außer Bolzanos Stellung zu den Konstruktionsaufgaben, die aus seiner Auffassung einer wissenschaftlichen Mathematik folgt, erwähne ich noch etwas zu den wiederholt vorkommenden Bemerkungen zur Kongruenz.

Im allgemeinen heißen z. B. zwei Dreiecke in einer Ebene kongruent, wenn sie gleiche Seiten und Winkel haben, oder auch wenn sie durch eine (räumliche) Bewegung ineinander übergeführt werden können. Eine Bewegung verläuft aber in der Zeit, somit gehört der Begriff der Bewegung für Bolzano nicht zur Geometrie. Anstatt mit der Kongruenz arbeitet Bolzano vorzugsweise mit dem Begriff der Substituibilität. Zwei Figuren heißen substituibel, wenn sie gegenseitig in ihren Raum versetzt werden können. Das hebt die Schwierigkeit aber nicht auf, denn es ist nicht deutlich, wie man »versetzen« verstehen soll. So viel ist aber aus den Bemerkungen Bolzanos klar, daß eine Versetzung im Falle von Figuren in einer Ebene eine Zusammensetzung von Verschiebungen und Drehungen in der Ebene ist. In diesem Sinne aufgefaßt, sind zwei symmetrische Dreiecke nicht substituibel. Die Verschiebungen und Drehungen braucht man nicht als wirkliche, in der Zeit verlaufende Bewegungen zu betrachten. Man kann sie auch als Punktzuordnungen der Ebene erklären, d. h. als Abbildungen der Ebene in sich. Dieser Gedanke war Bolzano nicht fremd, denn geometrische Abbildungen kommen in der ganzen Geschichte der Mathematik vor, und er hat sie auch selbst verwendet, z. B. MM 334³. Er hat aber nicht gesehen, wie sie sich für die Kongruenz und Substituibilität verwenden lassen. Die Kongruenz läßt sich durch die längentreuen linearen Abbildungen der Ebene fassen, und die Substituibilität durch die längen- und orientierungstreuen linearen Abbildungen.

Zum Schluß betrachte ich noch Bolzanos Bemerkung zum Wallisschen Beweis des Parallelenaxioms aus dem Hilfssatz, daß es zu jeder Figur eine ähnliche von beliebiger Größe gibt (MM 644). In diesem Hilfssatz, der eigentlich ein Axiom ist, erkennt Bolzano seinen eigenen Grundsatz der Ähnlichkeit. In der Wallisschen Formulierung erkenne ich den Grundsatz bei Bolzano nicht. Doch läßt die Bemerkung sich einigermaßen verstehen. In *Betrachtungen* II, § 3 verlangt Bolzano, daß, bevor der Begriff der Gleichheit angewandt werde, erst die Möglichkeit gleicher räumlicher Dinge gezeigt werde. Zu diesem Zwecke schlägt er folgenden Grundsatz vor: Wir haben von keinem bestimmten räumlichen Dinge eine Vorstellung a priori. Dieser Grundsatz sollte dann unmittelbar die Möglichkeit mehrerer gleicher räumlicher Dinge ergeben. Laut Bolzano ergibt der Grundsatz

³ BGA 2B 3/2, S. 79.

ebenfalls die Möglichkeit ähnlicher räumlicher Dinge (vgl. dazu MM 71)⁴. Für Bolzano sagt diese Möglichkeit offenbar dasselbe aus wie der Wallissche Existenzsatz. Ebenfalls klar ist, daß er die Möglichkeit erkenntnistheoretisch zu begründen sucht, genauso wie beim Mittelpunkt und bei der vierten Proportionalinie. Für den Mathematiker reicht die Wallissche Formulierung allerdings.

Allgemeine Geometrie

Wenn Schultz in § 53 (MM 587) vom Flächenteil zwischen den Schenkeln eines Winkels und in § 54 von Linien innerhalb und außerhalb eines Winkels redet, so ist Bolzano sofort dabei zu fragen, was hier innerhalb und außerhalb bedeuten. Nun hat er das selbst schon früher erklärt (MM 401)⁵, doch er führt seine Definition hier nicht an. Zwar hat Schultz § 29 (MM 575)⁶ das Innere eines Kreises erklärt, aber diese Erklärung ist hier nicht anwendbar, weil die Winkelfläche unbegrenzt ist.

In § 138 (MM 605) identifiziert Schultz das Innere eines Kreises mit der Menge der Punkte, die dem Mittelpunkt näher liegen als der Halbmesser, und verweist dabei auf § 29, wo das Innere als der von der Kreislinie völlig begrenzte Teil der Ebene erklärt wird. Wir sehen hieraus, daß für Schultz die Begriffe § 29 und § 138 einerlei sind. Bolzano lehnt die Definition § 29 aus methodischen Gründen ab, weil man das Innere als die Menge der inneren Punkte erklären soll und nicht umgekehrt den Punkt einen inneren Punkt nennen, wenn er zum Inneren gehört, wie Schultz es macht. Das heißt, die Erklärung des inneren Punktes soll der des Inneren vorangehen. Die Definition § 138 lehnt er ab, weil der Begriff des inneren Punktes schon bestimmt ist, und zwar von Bolzano. Das konnte Schultz übrigens nicht wissen. Tatsächlich hat Bolzano diesen Begriff MM 239⁷ allgemein für geschlossene Linien erklärt und MM 576⁸ wiederholt. Laut dieser Definition ist ein Punkt ein innerer Punkt einer (einfachen) geschlossenen Linie, wenn es keine von dem Punkte ausgehende Linie gibt, die ins Unendliche geht und die Linie nicht schneidet. Mit den ihm zur Verfügung stehenden Mitteln hätte er beweisen können, daß beide Erklärungen für den Kreis dieselben Punkte als innere Punkte anzeigen. Das hat er aber nicht versucht. Doch hätte § 29, Zusatz 2 ihn dazu veranlassen können, die Gleichwertigkeit

⁴ BGA 2B 2/1, S. 126.

⁵ BGA 2B 4/1, S. 66.

⁶ BGA 2B 4/2, S. 195.

⁷ BGA 2B 3/1, S. 81.

⁸ BGA 2B 4/2, S. 197.

beider Erklärungen zu beweisen. In diesem Zusatz handelt es sich um die Behauptung, daß eine (stetige) Verbindungslinie zwischen einem inneren und einem äußeren Punkte den Kreis schneidet. Dieser Satz sei leicht erweislich, meint Bolzano, allerdings unter Verwendung seiner Begriffe von innerhalb und außerhalb. Wenn er das aber wirklich versucht hätte, so würde er bemerkt haben, daß er die Schultzsche Definition hätte verwenden müssen. In diesem Zusammenhang vergleiche man MM 208, 210⁹, wo Bolzano versucht, die Behauptung des Zusatzes für ein Dreieck zu beweisen. Der Fall des Kreises ist etwas einfacher.

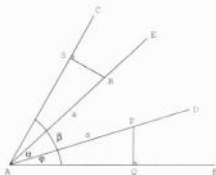
Im allgemeinen hat Bolzano recht, wenn er gegen die *Anfangsgründe* so viel Bedenken hat, denn das Buch ist wenig wissenschaftlich, ungepflegt in den Formulierungen und wenig systematisch, also von sehr durchschnittlichem Gehalt.

Wie nachlässig Schultz sein kann, zeigt die Definition MM 612, welche Bolzano veranlaßt, noch einmal seine Gedanken über Berühren und Grenze zu formulieren. Die Schultzsche Erklärung ist folgende: Eine Linie berühre eine Ebene in einem Punkte C, wenn die Linie durch den Punkt C der Ebene geht und die Teile vor und nach C auf derselben Seite der Ebene liegen. Also würde die gebrochene Linie, gebildet von den Schenkeln eines Winkels auf einer Seite einer Ebene, dessen Scheitel ein Punkt der Ebene ist, die Ebene im Scheitel berühren, und das ist wohl nicht gemeint. Andererseits würde eine Kurve seine Tangente in einem Wendepunkte nicht berühren. Diese Erklärung ist also völlig unbrauchbar. Aber auch die allgemeine Definition Bolzanos ist nicht zweckmäßig. Diese lautet: »Zwei räumliche Dinge berühren sich in einem gewissen Teile, wenn sie diesen Teil gemein haben und sich einander für die kleinsten Entfernungen von diesem Teile aus so nahe kommen, als Dinge, die diese Gestalt haben, zueinander kommen können.« Er hat diese Formulierung gewählt, um die Wechelseitigkeit des Berührens zu sichern. Das mißlingt aber, denn die Tangente im Punkte A eines Kreises K ist zwar die Gerade durch A, die dem Kreis für die kleinsten Entfernungen am nächsten kommt, aber K ist keineswegs der Kreis durch A, der der Tangente am nächsten kommt. Ein Kreis mit größerem Halbmesser kommt näher, und es gibt keinen, der der Tangente am nächsten kommt. Doch sind alle Kreise von gleicher Gestalt, denn sie sind alle ähnlich, weil »gleich der Gestalt nach« soviel bedeutet wie geometrisch ähnlich (MM 103)¹⁰.

Als Folge seiner Erklärung führt Bolzano das Beispiel zweier Winkel an, deren einer im Inneren des anderen liegt. Diese Winkel berühren sich im Scheitelpunkte, wenn die beiden Restwinkel gleich sind (siehe nachstehende Figur).

⁹ BGA 2B 2/2, S. 221, 224.

¹⁰ BGA 2B 2/1, S. 175.



Die Winkel BAC und DAE berühren sich also in A, wenn die Winkel BAD und CAE gleich sind. Das ist für spitze Winkel jedenfalls richtig. Denn erstens sind alle Winkel, die dem Winkel BAC ähnlich sind, auch dem BAC gleich und dasselbe gilt vom Winkel DAE (vgl. *Betrachtungen I*, § 22). Das mehr oder weniger Benachbartsein der Winkel

hängt also nur von der Lage des Winkels DAE innerhalb des BAC ab, also vom Winkel $\varphi = \angle BAD$. Sei nun $\angle BAC = \beta$, $\angle DAE = \alpha$, $AP = AR = a$, so ist für gegebenes a die Entfernung der Winkel der größte Wert von PQ und RS, d. h. $\text{Max}(PQ, RS)$.

Ferner ist $PQ = a \sin \varphi$ und $RS = a \sin((\beta - \alpha) - \varphi)$. Es fragt sich also, für welchen Wert φ der Wert $\text{Max}(a \sin \varphi, a \sin((\beta - \alpha) - \varphi))$ minimal ist, und man bestätigt leicht, z. B. durch Vergleichung der graphischen Darstellung beider Funktionen, daß das Maximum für $\varphi = 1/2 \cdot (\beta - \alpha)$ minimal ist, d. h. wenn $\angle BAD = \angle CAE$.

Was nutzt das aber, wenn die Erklärung den allgemein verwendeten Begriff der Berührung nicht erfaßt?

Betrachtet man die Funktionen etwas genauer, so sieht man, daß die Lösung für stumpfe Winkel nicht richtig ist, denn wenn $\beta - \alpha = 120^\circ$, so gibt es drei Werte von φ , wo das Maximum minimal ist, nämlich $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ und $\varphi = 120^\circ$, d. h. wenn AD mit AB zusammenfällt, bzw. $\angle BAD = \angle CAE$, bzw. AE mit AC zusammenfällt. Für $\beta - \alpha > 120^\circ$ gibt es nur die Lösungen $\varphi = 0$ und $\varphi = \beta - \alpha$, d. h. wenn entweder AD mit AB oder AE mit AC zusammenfällt. Für diesen Fall ist die Behauptung von Bolzano also falsch.

Bei den Erklärungen strebt Bolzano größte Allgemeinheit an. Die Allgemeinheit wird aber oft so weit getrieben, daß ihr Informationsgehalt nahezu auf Null schrumpft. Mit solchen Erklärungen kann man fast keine nennenswerten Resultate erhalten. Sie bringen auch keine Ordnung in die Erscheinungen. Wenn er selbst Mathematik betreibt, so verwendet er meistens die üblichen Begriffe und schließt sich insbesondere betreffs des Berührens dem allgemeinen Gebrauch an, d. h. 'berühren' will soviel sagen wie, eine gemeinsame Tangente oder Tangentialebene haben.

Mit dem Berühren im Bolzanoschen Sinne hängt der Begriff der Grenze aufs engste zusammen, denn wenn man von der einen Seite einer Ebene zu einem Punkte der anderen Seite gelangen will, so muß man die gemeinsame Grenze der beiden Halbräume durchqueren. Das ist der Zusatz 1 von Schultz (MM 613).

Die beiden Halbräume berühren sich in dieser Ebene, denn sie ist ihre gemeinsame Grenze. Bolzano hat schon früher versucht, den Begriff der Grenze zu bestimmen, leider nicht mit großem Erfolg (vgl. MM 187, 208, MM 309, 311, 312)¹¹. In diesen früheren Versuchen war die Rede von einer Grenze eines einzigen geometrischen Gebildes. Jetzt aber (MM 613) schlägt er einen anderen Weg ein. Als eigentlichen Begriff der Grenze stellt er folgende Erklärung auf: ein Raum heißt von einem anderen durch eine Grenze abgeschieden, wenn keine Linie aus einem Punkte des einen zu einem Punkte des anderen möglich ist, ohne durch etwas, was man eben um dieser Eigenschaft willen die Grenze nennt, hindurchzugehen. Bolzano hat diese Erklärung aufgestellt, um zu zeigen, daß oben genannter Zusatz 1 von Schultz ein identischer Satz ist. Wenn Schultz das selber so gemacht hätte, so würde Bolzano sagen, daß er es sich leicht mache. Es kommt hinzu, daß er denselben Fehler macht, für den er so oft Schultz und andere getadelt hat, nämlich ein bestimmtes Wort bald in dieser, bald in jener Bedeutung aufzufassen. Ferner verstößt die Erklärung gegen seine eigene Methodik, die verlangt, daß man erst den Grenzpunkt definiere und dann die Grenze als Menge der Grenzpunkte. Aber wichtiger ist, daß die Erklärung auch in mathematischer Hinsicht nicht gut ist, denn erstens gehört die Grenze nicht zu einem einzigen Raum (Körper), sondern zu zweien, und zweitens ist die so definierte Grenze völlig unbestimmt. Wenn man z.B. zwei auseinander liegende Kugeln hat, so kann man einen Punkt der einen mit einem Punkte der anderen durch eine Linie verbinden, die ganz in einem beliebigen, beide umfassenden Körper liegt. Das Äußere dieses umfassenden Körpers gehört also nicht zur Grenze. Einen beliebigen Punkt im Inneren kann man aber auch immer vermeiden, also auch die Punkte der Kugelflächen. Diese Erklärung bildet also keinen Fortschritt, und wir müssen weitere Versuche abwarten.

Betrachten wir schließlich noch kurz einige Bemerkungen Bolzanos zu Langsdorfs *Anfangsgründen* (MM 672–680). Langsdorf setzt sich in diesem Buche das Ziel, die Mathematik auf ganz neue Prinzipien zu gründen. Das Neue in seiner Geometrie bilden die Raumpunkte. Neben den üblichen (geometrischen) Punkten, Linien und Flächen, die er als bloße Grenzen, nämlich von Linien, Flächen und Körpern betrachtet, kennt er auch noch Raumpunkte, d. h. Punkte, die für sich selbst denkbar sind, ohne Grenzen bestimmter Art von Ausdehnung zu sein. Die Raumpunkte sind einfach. Sie haben selbst keine Ausdehnung, aber mehrfach nebeneinander gedacht, ergeben sie den Begriff der Ausdehnung. Der Gedanke aber, daß zwei Punkte nebeneinander liegen können, ist Bolzano zuwi-

¹¹ BGA 2B 2/2, S. 183, 221 und BGA 2B 3/2, S. 33, 36–38.

der. Sie fallen zusammen, d. h. sind eins, oder sie sind verschieden und haben dann eine Entfernung. Das gilt auch für die Raumpunkte, weil sie einfach sind. Wenn also die Raumpunkte nebeneinander stehen, so müssen sie wenigstens zwei Seiten haben, in denen sie sich berühren, weil kein Punkt dazwischen stehen kann. Wenn sie Seiten haben, so haben sie auch eine Ausdehnung, sei diese noch so klein. Bolzano deutet die Raumpunkte also als Würfel oder Kugeln, und für die Ebene als Quadrate.

Diese Auffassung basiert auf Sextus Empiricus *Adversus Physicos* I, 386–387, wo dieser zeigt, daß eine Linie keine Reihe von Punkten sein kann. Denn, so sagt Sextus, wenn das so wäre, würden die Punkte einander berühren, entweder im Ganzen oder in ihren Teilen. Im Ganzen können sie sich nicht berühren, weil sie dann zusammenfielen, und die ganze Linie aus einem Punkte bestünde. Also haben sie Teile, in denen sie sich berühren, sie sind also nicht einfach. Weil Langsdorf annimmt, daß die Raumpunkte nebeneinander stehen können, fühlt Bolzano sich gezwungen, von ihrer Einfachheit abzusehen, daher die Deutung als Quadrate. Dann setzt er sich daran, in einer Anzahl von Beispielen zu zeigen, welche sonderbare Konsequenzen, die Langsdorf nicht gesehen hat, daraus fließen.

Außer dieser sogenannten Raumgeometrie enthält das Buch noch mehr sonderbare Sachen. So lehnt Langsdorf die unendliche Teilbarkeit ab, die für Bolzano feststeht, und nicht nur für die geometrischen Ausdehnungen, sondern sogar für die Materie im Raum. Ferner ist in Langsdorfs Mathematik kein Platz für Irrationalgrößen, unendliche Reihen, Asymptoten usw. Natürlich ist Bolzano damit nicht einverstanden. In der Auffassung von Langsdorf sind Punkte, Linien und Flächen keine Raunteile, denn sie sind nicht mit dem Ganzen gleichartig. Für Bolzano können Teile aber auch ungleichartig mit dem Ganzen sein. Punkte, Linien und Flächen sind für ihn also auch Raunteile, und es ist erlaubt zu sagen, daß ein Körper aus Flächen, Linien und Punkten besteht.

Allgemeine Mathematik

Allgemein betrachtete man damals die Mathematik als die Lehre von den Größen. Wenn Langsdorf (MM 675) aber hinzusetzt: bloß in Beziehung auf ihre Größe, so kann Bolzano das nicht hinnehmen, denn insbesondere in der Geometrie untersucht man auch Verhältnisse zwischen Figuren, die nicht zu ihrer Größe gehören. Ohne Zweifel aber hatte – oder bestimmte doch – damals für die meisten Mathematiker jedes geometrische Gebilde eine Größe, die endlich oder unendlich sein konnte. Diese Auffassung führt aber zu Schwierigkeiten, derer

mehrere Mathematiker sich bewußt waren und die insbesondere Schultz zu lösen versucht hat. Als Größe eines Winkels z.B. betrachtete man allgemein die Größe der Fläche zwischen den Schenkeln. Zwei Winkel kann man dann vergleichen, indem man das Verhältnis zwischen ihren Flächen bestimmt. Vergleicht man alle Winkel mit einem gegebenen Einheitswinkel, so mißt man sie, z.B. in Graden. Daraus ergibt sich dann, daß zwei Winkel sich wie ihre Flächen verhalten (Schultz § 56, MM 589). In seinem Bestreben, die Sache so gründlich wie möglich vorzutragen, beweist Schultz den Satz § 57, daß zwei Winkelflächen zusammen größer sind als eine von ihnen. Laut Bolzano verwendet er dabei den Satz, daß für endliche Größen das Ganze größer ist als der Teil. Dieser Satz ist nicht anwendbar, weil nicht bewiesen sei, daß die Größe des Winkels eine endliche ist, also ist für Bolzano der Beweis unrichtig. Schultz aber war sich der Schwierigkeiten mit dem Euklidischen Axiom, daß das Ganze größer als der Teil



ist, wohl bewußt, und er hat es auch nicht unter Beschränkung auf endliche Größen angewandt, wie Bolzanos Darstellung erscheinen läßt. Betrachten wir folgende Figur, wo $AC \parallel DE$.

Die Winkel BAC und BDE sind gleich, also sollten auch ihre Winkelflächen gleich sein. Wendet man nun das Euklidische Axiom an, so würde die Fläche BAC kleiner sein als BDE, weil die (unendliche) Fläche CADE ihr Unterschied ist und die Fläche BAC also ein Teil der Fläche BDE, folglich die Winkel ungleich. Die Winkelfläche ist eine unendliche Größe, wie also kann Schultz das Euklidische Axiom anwenden, wenn er doch der Meinung ist, daß es nicht allgemein auf unendliche Größen zutrifft? Das rührt daher, daß er das Axiom durch einen beschränkten Satz ersetzt. An der von Bolzano angegebenen Stelle beweist Schultz nämlich folgenden Satz: Wenn ein Teil b des Ganzen $b + a$ entweder seinem Nebenteile a gleich, oder dieser ein endlichvieler Teil von jenem ist, so ist jeder von den Teilen kleiner als das Ganze. Aus der Anmerkung ersieht man, daß der Satz auch für unendliche Größen gelten soll. Ich gebe den Beweis kurz wieder, weil man daraus ersehen kann, daß man damals mit dem Unendlichen genauso rechnete wie mit dem Endlichen.

Beweis von Schultz:

1. $b = a$. Dann ist $a + a = b + b = b + a$ und $a < a + a = b + a$, $b < b + b = a + b$.
2. $b \neq a$ und a endlichvieler Teil von b , also $a < b$, also $a < b + a$.

Ferner gibt es ein endliches m , derart daß $b = ma$ oder $ma < b < ma + a$.

Wenn $b = ma$ so ist $b + a = ma + a$, $ma < ma + a$ also $b < ma + a$, also $b < b + a$.

Wenn $ma < b < ma + a$ so ist $b = ma + p$ mit $a > p > 0$, also $b + a = ma + p + a$, $b < ma + a$ also $b < b + a$.

Dieser Beweis, auf den Schultz sich ziemlich stolz zeigt, ist nicht sehr schön – was noch angehen mag – aber er ist sogar unrichtig. Der Fehler steckt in der Annahme $a < a + a$, die zwar für endliche Größen richtig ist, aber nicht allgemein. Für unendliche Größen kann sehr wohl die Gleichung $a = a + b$ mit $b \neq 0$ bestehen und ebenfalls $a = a + a$, wo die Nebenteile dem anderen Teile gleich sind. Man beachte übrigens, daß Bolzano MM 335¹² (Anfang 1814) ebenfalls der Meinung ist, daß für Größen a und b die Gleichheit $a = a + b$ nur bestehen kann, wenn $b = 0$.

Im obigen Falle der Winkel BAC und BDE ist der Nebenteil CADE der Fläche BAC kein endlichvieler Teil von BAC, denn die Fläche BAC läßt sich aus unendlich vielen nebeneinander gesetzten Streifen gleich CADE zusammensetzen. Also ist der obige Satz nicht anwendbar, und der Winkel BAC kann sehr wohl dem Winkel BDE gleich sein. Auf diese Weise verschwindet die Ungereimtheit, der Preis ist aber in Falschgeld bezahlt. Man beachte übrigens, daß man nicht folgern kann, daß die Winkel BAC und BDE gleich sind.

In der Bolzanoschen Mathematik spielt der Satz von der Ähnlichkeit eine wichtige Rolle. Diesen Satz findet er bei Wallis und Wolff, und auch früher hat er ihn bei Ide (MM 458)¹³ als stillschweigende Voraussetzung entdeckt. Bei Wolff (MM 664) ist dieser Satz eine unmittelbare Folge der Definition der gleichen Bestimmung, d. h. zwei Dinge heißen auf dieselbe Weise bestimmt, wenn sie nach derselben Regel aus ähnlichen Dingen bestimmt werden. In *Betrachtungen I*, § 17 heißt der Satz »Dinge, deren bestimmende Stücke ähnlich sind, sind selbst ähnlich«, und in seinen Bemerkungen zu Ide formuliert er den Satz so: Dinge, welche auf ähnliche Art bestimmt werden, sind ganz ähnlich. Dabei muß man »auf ähnliche Art« offenbar lesen als »nach demselben Gesetz aus ähnlichen Dingen«.

Wolff trägt den Satz als Satz der Geometrie vor, aber für Bolzano gehört er zur allgemeinen Mathematik, weil er nicht nur für geometrische Objekte gültig ist. Obgleich der Satz schon in der *Philosophia prima* (1730) von Wolff vorkommt, war das Bolzano nicht bekannt, und laut *Betrachtungen I*, § 24 hat er die Lehre von der Ähnlichkeit selbständig entwickelt.

Der allgemeine Satz der Ähnlichkeit, der nicht auf die Geometrie, ja nicht einmal auf die Mathematik beschränkt ist, kommt auch in den MM (1813) vor. In MM 277¹⁴ heißt es: »Die Eigenschaften der Folge werden bestimmt durch die

¹² BGA 2B 3/2, S. 80.

¹³ BGA 2B 4/1, S. 186.

¹⁴ BGA 2B 3/1, S. 146.

Eigenschaften des Grundes«, oder »Alle Folgen, deren Gründe dieselben Eigenschaften haben, haben selbst dieselben Eigenschaften«. Der geometrische Satz ist als ein Spezialfall dieses Satzes zu betrachten, indem man bestimmende Stücke für Gründe und Dinge für Folgen setzt.

Diese Substitution paßt ganz natürlich in den Gedankengang Bolzanos und wird auch von ihm selber MM 279¹⁵ angegeben: »Der ganze Grund vom Dasein eines Dinges sind die bestimmenden Stücke vereinigt mit noch einigen anderen Regeln«, d. h. mit den Regeln, welche die Weise des Bestimmens des Dinges angeben, oder mit dem Gesetz, nach dem das Ding aus seinen bestimmenden Stücken aufgebaut wird.

Zum Schluß hebe ich noch eine Bemerkung hervor, in der Bolzano den Begriff der Reihe präzisiert. In § 5 seiner *Anfangsgründe der Geometrie* erklärt Langsdorf eine Raumlinie als eine Reihe von unmittelbar nebeneinander liegenden Raumpunkten. Weil Bolzano das Wort Reihe in diesem Zusammenhang nicht verstehen kann, erklärt er MM 677 noch einmal, was man unter einer Reihe versteht: »Eine Reihe ist eine Menge von Dingen, deren jedes mit zwei anderen in einem gewissen Verhältnis steht, wie sonst mit keinem anderen«. Als Beispiel einer Reihe gibt er die Reihe 3, 6, 12, 24, Ein beliebiges Glied (mit Ausnahme des ersten) der Reihe ist das Doppelte des vorangehenden und die Hälfte des folgenden.

Die Folge 1, 1, 1, 1, ... bildet also keine Reihe, denn die Bedingung »wie sonst mit keinem anderen« ist hier nicht erfüllt.

Die erste Reihe kann man auch bestimmen durch das Bildungsgesetz $t(n+1) = 2t(n)$.

In der *Wissenschaftslehre* (1837) § 85, wo er wesentlich dieselbe Erklärung verwendet, rettet Bolzano die Folge 1, 1, 1, ... als eine Reihe, indem er behauptet, daß wir in diesem Falle nicht die Gegenstände selbst, sondern unsere bloßen Vorstellungen derselben betrachten. Wir sind dann gezwungen, die 1 der Reihe nach durch $1^0, 1^1, 1^2, 1^3, \dots$ vorzustellen, mit dem Bildungsgesetz $t(n) = 1^{n-1}$. Das ist aber eine ärmliche Ausrede, die dem nicht zur Verfügung steht, der sich die 1 nur als 1 vorstellt.

Bei den sogenannten rekurrenten Reihen, wie z. B. der Reihe von Fibonacci: $t_1 = t_2 = 1$ und $t(n+2) = t(n+1) + t(n)$ muß eine neue Ausrede ersonnen werden, denn das Glied $t(n+2)$ läßt sich nicht aus einem einzigen Glied bestimmen. Diese Schwierigkeit wird überwunden, indem er in solchen Fällen sagt, daß das Glied $t(n+2)$ mittelbar aus $t(n+1)$ bestimmt wird. Ferner kann man noch

¹⁵ BGA 2B 3/1, S. 149.

bemerken, daß nach der Bolzanoschen Erklärung *Wissenschaftslehre* § 85 das zweite Glied der Fibonacci-Reihe 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Anfangsglied ist, denn es kann weder unmittelbar noch mittelbar aus dem ersten bestimmt werden. Das erste Glied wäre weder Anfangsglied noch letztes Glied noch inneres Glied. Doch braucht man es, um die Reihe herzustellen. H. Hahn hat 1921 schon zu § 7 der *Paradoxien des Unendlichen* bemerkt, daß die reellen Zahlen nach Bolzanos Definition eine Reihe bilden und demnach auch die Punkte einer Linie. Diese Ausdrucksweise, die z. B. Detmold (MM 496)¹⁶ und Langsdorf (MM 677) verwenden, wird aber von Bolzano mit Entschiedenheit abgelehnt. Dieser unglückliche Sachverhalt wird dadurch verursacht, daß er den ihm vorschwebenden Begriff der Reihe einfach zu allgemein zu formulieren versucht hat. Dieser Versuch ist nicht gelungen.

B. van Rootselaar

¹⁶ BGA 2B 4/2, S. 44.

MISCELLANEA MATHEMATICA

Forts.[etzung] d[e]r Kr[i]t[i]k ü**b**[e]r J. Schultz's* *Geom[e]trie*.¹ |

§.46. *L[e]hrs.[atz]* 10. D[ie] S[umm]e 2[e]r N[e]b[en]W[inkel] ist 2 r.[echten]

15 W[inkel]n gl[e]i[ch]. || #

#Zus[atz]^b.2. Alle W[inkel] ACD, DCE, ECF, d[ie] in d[e]rs.[elben] Eb[en]e im Sch[ei]t[e]l C auf e[ine]r S.[eite] v[on] AB | mögl[ic]h s[in]d, s[in]d z[u]-
s[a]m[men] so gr[o]ß, als 2 R[ech]te. Denn sie b[e]st[e]h[en] a.[us] 2 N[e]b[en]-

15 w[inkel]n || ACD + DCB (§.42.). – °(D[e]r S[atz] ist [nu]r dann w[a]hr, w[enn]
d[e]r Fl[ä]ch[en]r[aum] j[e]d[e]s d[ie]s[e]r | W[ink]el an d[en] 2[e]r and[e]-
r[e]n gr[e]nzt, ab[e]r gl[an]z auß[e]rh[a]lß j[e]d[e]s and[e]r[e]n liegt. – Auf d[ie]-
s[en] | Umst[an]d [mü]ßte also auch im B[e]w[ei]se R[ü]cks[icht] gl[e]no[m]men
4 w[e]rd[en].)° ||

Zus.[atz] 3. Also s[in]d alle W[inkel], d[ie] in d[e]rs.[elben] Eb[en]e im Sch[ei]-
5 t[e]l C ringsum mögl[ic]h || si[n]d, z[u]s[a]m[men] so gr[o]ß, als vier r[ec]hte.

°(W[e]lche W[ink]el si[n]d das? – Wann | kann m[an] sag[en], d[a]ß eb[en]-
w[e]lche W[ink]el ring[s]h[e]r[um] um e[inen] P[un]ct lieg[en]? Sollte das
[ni]cht | erst erkl[är]t word[en] seyn? Die Erkl[ärung] hätte beyl.[äuf]ig so
ausfall[en] [mü]ßs[en]: Ein P[un]ct ist r[in]gsum v[on] W[inkel]n umg[e]-
b[en], w[enn] jede v[on] d[en] Lin[ien] d[ie] a[us] d[ie]s[e]m P[unk]t in d[e]rs.
s.[elben] Eb[en]e ausg[e]h[e]n, | zu *zwey* W[ink]el[n] g[e]h[ört], u[nd] d[ie]
10 Eb[en]e k[e]ine[s] d[ie]s[e]r W[ink]el[n] in d[e]r Eb[en]e des and.[eren] liegt. ||
Da d[e]r V[er]f[asser] auf d[ie]se Erkl[ärung] g[al]r k[e]ine R[ü]cks[icht]
n[imm]t sond.[ern] [nu]r d[ie] W[ink]el d[ie] ü**b**[e]r e[ine]r g[e]w[is]s[en] |
L[inie] d[urc]h C, u.[nd] d[ie] W[ink]el, d[ie] [un]t[e]r d[e]rs.[elben] lieg[en],
z[u]s[a]m[men] add.[iert], jede d[ie]s[e]r | Sum[men] gl[e]i[ch] 2R sch[ä]tzt

18 u.s.w.: so ist s.[ein] B[e]w[ei]s off[en]b[a]r f[e]hl[e]rha[ft].)° ||

§.47. *L[e]hrs.[atz]* 11. W[enn] d[ie] S[umm]e 2[e]r W[inkel] DCB, DCA, d[ie]
in d[e]rs.[elben] Eb[en]e d[en] Sch[en]k[e]l CD g[e]m[ein] | hab[en] °(u[nd] –
[mu]ß noch beyg[e]s.[etzt] w[e]rd[en], d[e]r[e]n Eb[ene]n auß[e]rh[a]lß e[inan]-
20 d[e]r lieg[en])° 2 r[ec]ht[en] || W[inkel]n gl[e]i[ch] ist, so s[in]d sie
N[e]b[en]w[ink]el. °(Da im B[e]w[ei]se k[e]ine R[ü]cks[icht] a[u]f d[ie]se
f[e]hl[en]de | B[e]ding[un]g gl[e]no[m]men ist, so -----)° |

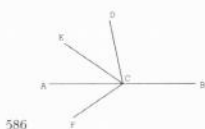
§.48. *Erkl[ärung]* 20. Ein W[ink]el, d[e]r < 2R heißt ein *hohl*[e]r, d[e]r > 2R,
ein *erhab*[e]n[e]r |

* „J. Schultz“ ist doppelt unterstrichen.

^b Die Zeilen 13–17 sind vorne durch einen Strich markiert.

¹ Fortsetzung von MM 561–584.

°(Wie v[e]rtrag[en] sich doch d[ie]se B[e]g[r]iffe [mi]t d[e]r §. 41. aufg[e]st[ell]t[en] *Erkl.[ärung] e[ine]s W[inkels] üb[e]rh[aupt], u.[nd] d[e]r | Z[usatz] 1. d[a]zu g[e]fügt[en] B[e]m[er]k[un]g v.[on] d.[er] Fl[ä]che des W[inkels]. Zufl[ö]ge d[ie]s[e]s Z[usatzes] u.[nd] §. 42. Z[usatz] 2 ist j[e]d[e]m || W[inkel] e[ine] g[e]wisse Fl[ä]che (freyl[ich] [ni]cht m[it]t ausd[rück]l[ich]en) W[ort]t[en] beyg[e]l[eg]t word[en], n[ach] h[il]f d[ie]r Th[ei]l d[e]r | Eb[en]e, in d[e]r er liegt, d[e]r zu[is]chen d[en] Sch[en]k[e]ln liegt. Es ist eb[en]so stillschw.[eigend] vor[auss]g[e]s[etzt] word[en], | d[a]ß d[ie] Sch[en]k[e]l d[ie]se Fl[ä]che b[e]stimm[en], u.[nd] eb[en] d[a]r[au]f d[ie] B[e]h[auptu]ng §. 44. g[e]gr[ün]d[e]t word[en], | d[a]ß j[e]d[e]s Paar N[e]b[en]w[inkel] d[e]m and[eren] gl[ei]ch sey; ingl[ei]ch[en] Z[usatz] 2. d[a]ß d[ie] N[e]b[en]w[inkel] gl[ei]ch[e]r W[inkel] | gl[ei]ch sey[e]n, u. s. w. – Jetzt erfahr[en] wir Z[usatz] 1. auf e[in]ma[hl], d[a]ß [un]s[er]e stillschw.[eigend] ge-||m[ach]te Vor[aus]s[etzung] f[alsch] sey, u.[nd] d[a]ß je 2 g[e]r[ade] L[inien], d[ie] [mi]t e[ine]m d[e]r indir[e]ct z[u]s[am]m[en]stoss[en] 2 W[inkel]e, | n[ach] h[il]f d[ie] e[inen] hohl[en] u.[nd] e[inen] erhob[enen] bild[en], d[ie] e[ine]m d[e]r in R[ück]s[icht] ihr[e]r Fl[ä]ch[en] [ni]chts w[e]nig[er] als | im[m]e[r gl[ei]ch s[ind]. Denn Zus[atz] 1. heißt es ausd[rück]l[ich]: »Also macht e[ine] g[erade] L[inie] | CE die d[e]r g[e]r[ade]n CB indir[e]ct entg.[egengesetzt] ist, [mi]t d[ie]s[e]r nach d[e]r e[ine]n Seite v.[on] ihr e[inen] | hohl[en] W[inkel] ECB, d[e]r = ECD + DCB, u.[nd] nach d.[er] entg.[egengesetzt] S[eite] e[inen] erhob[enen] ECB, || d[e]r = ECA + ACF + FCB ist.*



586

°(Wie kö[n]nen wir* also d[ie] vorh[e]rg[e]h[enden] S[ät]ze | j[e]tzt noch gelt[en]?)° |

°(Wie h[ei]ßt d[e]nn ab[e]r d[e]r Fl[ä]ch[en]r[aum] EDBFA d[en] d[e]r erhob[ene] W[inkel] ECA | b[e]gr[e]nzt, zu[is]chen s[eine]n Sch[en]k[e]ln eing[e]schloss[en]?)° ||

Zus[atz] 3. V.[on] 2 N[e]b[en]w[inkel]n DCB, DCA ist j[e]d[e]r ein hohl[e]r. Denn da ihre S[umm]e = 2R ist (§. 46.) so ist j[e]d[e]r v[on] ihn[en] < 2R. (A[llgemeine] M[athesis] §. 19. Z[usatz] 1.) |

°(Allein, w[enn] wir schon §. 46. g[e]w[uß]t, wor[ü]b[e]r [un]s erst j[e]tzt d[ie] Aug[en] aufg[e]than w[ur]d[en], | d[a]ß es auch W[inkel] d[ie] > 2R si[n]d g[e]b[en] kö[n]n[e]; so hätt[en] wir §. 46. [ni]cht z[u]g[e]g[e]b[en] ||

Denn a[us] d[er] Erkl.[ärung] d[e]r N[e]b[en]w[inkel] §. 42. (ut com[mune] f[ol]gt k[eine]swegs, d[a]ß sie [ni]cht j[e]d[e]r erhob[en] s[ein] kö[n]n[t]e[n], wof[er] es üb[e]rh[aupt] erhob[ene] W[inkel] gibt. |

* Ursprünglich lautete der Satz »... wir die ... Sätze gelten lassen?«, »wir« ist versehentlich nicht gestrichen.

Zus.[atz] 4. V.[on] 2 schief[en] °(d.h. nach §.42. ungl[ei]ch[en]) N[e]b[en]w:[in]
keln) ist d[e]r kl[eine]re *spitz*, d[e]r grö-ß[e]re *st[um]pf*. °(Gilt [nu]r in d.[em]
F[a]lle, w[enn] beyde hohl | si[n]d. Denn ist e[ine]r, d[e]r gr[öß]ß[e]re, erhob[en],
11 so kann d[e]r kl[eine]re i[mme]rhin *st[um]pf o[der] r[echt] s[ein]*.)° ||

Zus.[atz] 5. D[e]r N[e]b[en]w.[inkel] e[ine]s *st[um]pf[en]* W.[inkels] ist *spitz*,
e[ine]s *sp[i]tz[en]* *st[um]pf*. °(F[a]lsch; w[enn] d[ie] W:[inkel] er-|hab[en]
si[n]d, beyde, o[der] e[ine]r.)° |

§.49. *Erkl[ärung]* 21. W[enn] in e[ine]r Eb.[ene] e[ine] L.[inie] GCF [mi]t
e[ine]r g[e]r[a]d[en] AB in C d[e]rg[e]st[a]lt z[u]s[a]m[men]stößt, d[a]ß | in^d
d.[er] erst[en] 2 Th[ei]le HC, CI auf d[e]rs.[elben] Seite v.[on] AB lieg[en], so
15 b[e]rühr[en] sich d[ie] L.[inien] GCF || u[nd] AB. °(W[a]hr, ab[e]r ein L.[e]hr-
s.[atz] u.[nd] k.[eine] *Erkl[ärung]*, w[ei]l es [nu]r f[ür] d[en] F[a]ll gilt, wo sich
d[ie] | kr[umme] L.[inie] in 1 Eb.[ene] b[e]f[ind]e[t]; b[e]k[ann]t[i]ch gibt es
ab[e]r auch *kr[umme] L.[inien]* u.[on] *dopp[e]l[ter] Kr[ümmung]*, d[ie] | [ni]cht
in E[ine]r | Eb.[ene] lieg[en], auf w[e]lche also d[ie]ß M[e]rkma[hl] des B[e]-
rühr[ens] | [ni]cht anw[ende]b[a]r ist.)° Im entg.[egengesetzten] | F[alle] *schnei-*
d[en] sie sich ----- °(Das B[e]rühr[en] ist also e[ine] Art des *Stos-*
sens?)° |

Zus.[atz] 1. W[enn] 2 *ind[i]r[ect]* entg[e]g[enge]s[et]zte g[erade] L.[inien] CG,
20 CB d[urc]h C v[e]rläng[er]t w[er]d[en]; so *schneid[en]* sie || sich in C. Denn es

sey CA d[ie] V[e]rläng[er]u[n]g v.[on] CB; so liegt
d[ie] V[e]rläng[er]u[n]g | v.[on] GC entw.[eder]
gl[ei]chf[a]lls in CA, o[der] üb[e]r AB in CE,
o[der] [un]t[e]r AB in CF. | (§.27. u[nd] §.41.
Z.[usatz] 5). N[un] ab[e]r kann sie w[e]d[e]r in
CA, noch in CE lieg[en], | d[enn] sonst wäre entw.
[eder] GCA o[der] GCE ein g[e]r[a]d[e]r W.[inkel]

(§.42), f[ol]gl[ich] = GCA + GCB | (§.43. Z.[usatz]), w[e]lch[e]s ung[e]-
r[er]mt ist (A.[llgemeine] M.[athesis] §.16. Z.[usatz]) u. s. w. °(Diese Ung[e]-
r[er]mth[ei]t f[ol]gt [nu]r erst d[ann], || w[enn] m[an] a[n]n[im]mt, d[a]ß d[e]r
25 W.[inkel] GCA o[der] GCE ein Th[ei]l v.[on] d.[er] Eb.[ene] s[e]i d[ie] auf
Ei[ner] S[eit]e d[e]r g.[eraden] L.[inie] AB liegt. | W[e]lch[e]s all[e]s, so wie d[ie]
S[ät]ze, auf d[ie] d[e]r V[er]f[asser] sich hier b[e]ruft §.43. Z.[usatz] u. s. w.
noch | [ni]cht erwies[en] ist. – U[nd] wie hätt[e]n sich a[u]ch d[ie]se W[a]hr-
h[ei]t[en] soll[en] erw[eis]en lass[en], da gar | k.[ein] deutl[ich]e[r] B[e]griff
v.[on] d[en] G[e]g[en]st[än]d[en], v.[on] w[e]lch[en] sie hand[e]ln, bish[er] g[e]-

^d Die Zeilen 14–16 sind vorne durch einen Strich markiert.

g[e]b[en] word[en] ist. Was heißt | denn, um {nu}r E[ine]s z[u] erw[ā]hn[en],
 »CF b[e]f[fin]d[e]t sich auf d[e]r {un}t[e]r[e]n, d.h. d[e]rj[enigen] S[ei]te d[e]r
 Eb[en]e, u[e]lch[e] || d[e]r, wor[au]f sich CG b[e]f[fin]d[e]t, entg[e]g[enge]s[et]zt 30
 ist«? Woran erk[enn]t m[an], d[a]ß sich d[i]e L[inie], o[der] auch {nu}r 2 |
 P[un]cte auf entg[e]g[enge]s[et]zten Seit[en] b[e]f[fin]d[en]? So lange d[i]e[s]e
 [ni]cht b[e]st[imm]t word[en] ist; w[e]rd[en] wir nie | im St.[and]e s.[ein], v.[on]
 e[ine]r g[e]wiss[en] L[inie], o[der] ei[nem] g[e]wiss[en] P[unkte] das ([ni]cht
 g[e]g[e]b[ene] Urth[ei]l ausz[u]spr[e]ch[en], er b[e]f[fin]de sich a[u]f d[e]r ent-
 g[e]g[engesetzten] | S[ei]te.« denn wir hab[en] ja k.[ein] K[enn]z[e]ich[en].»° |
 Zus.[atz] 4. W[enn] in e[ine]r Eb[en]e ein P[un]ct G auf d[e]r e[inen], u[nd] ein
 and[er]e F auf d[e]r entg[egengesetzten] S[ei]te d[e]r un-||b[e]gr[e]nzt[en] 35
 g[eraden] L[inie] AB liegt; so {mu}ß j[e]de L[inie] GF °(es sollte beyg[e]s[et]zt
 s[ein], d[i]e im[m]e[r] in d[er]s[elben] Eb[en]e v[e]r-||b[e]f[fin]d[et]° d[i]e g[e]r[ade]
 AB in irg[en]d ei[nem] P[un]cte C schneid[en]. Denn ginge sie [ni]cht d[urc]h
 d[i]e g[e]m[ein]s[chaftliche] | Gr[en]ze AB d[e]r beyd[en] entg[e]g[enge]s[et]zt-
 ten Th[ei]le d[e]r Eb[en]e; so wäre sie [ni]cht stet[i]g, also k[ein]e | L[inie].
 (§.7.) |
 °(G[e]g[en] d[i]e[n] B[e]w[ei]s g[e]lt[en] f[a]st dies[e]lben] Er[innerun]g[en],
 d[i]e wir b[e]i d[e]m ähnl[ichen] S[atz] §.29. Z.[usatz] 2. vorg[e]br[acht] ha-
 b[en]. || Wir hab[en] schon b[e]i §.27. er[inner]t, d[a]ß das[e]lbst [ni]cht 40
 erkl[ā]ret w[e]rde, w[a]s d[i]e R[e]d[en]sart heiße: e[ine] *unbe-gr[en]zte*
Eb[en]e u[ir]d d[urc]h e[ine] unb[e]gr[en]zte g[erade] L[inie] in ihr getheilt,
 u[nd] zw[ar] wie m[an] stillschw[eigend] vor[au]ss[et]zt, in | *zwey*, [ni]cht etwa
 3 o[der] 4 Th[ei]le. Nicht e[inma]hl, sage ich, erkl[ā]rt w[ir]d d[i]eß dort, um
 wie v[iel] w[e]n[i]g[e]r | *erwie*[en]. – Nach § 9 heißt e[ine] Gr[ö]ße *th[ei]l[en]*,
 d[i]e g[e]m[ein]s[chaftliche] Gr[en]ze d[e]r beyd[en] Th[ei]le b[e]st[immen].
 Also | {mu}ßte m[an] dath.[un], d[a]ß in d[e]r {un}b[e]grenzten Eb[en]e
 d[urc]h d[i]e g[er]ade L[inie] 2 b[e]gr[en]zte D[im]ge entst[e]h[en], u.[nd] d[a]ß
 587 d[er]s[elben] g[e]m[ein]s[chaftliche] || Gr[en]ze AB ist. N[un] ist ab[e]r d[e]r
 B[e]g[riff] d[e]r Gr[en]ze {nu}r m[e]ch[an]isch erkl[ā]rt, *Aufh[ö]r[en] o[der] An-
 f[an]g[en] | d[e]r Th[ei]le!* Da[m]it kö[nnen] wir [ni]cht z[u]fried[en] seyn. |
 F[er]n[e]r d[e]r Th[ei]l M ist [ni]cht *nach all[en] Seit[en] b[e]gr[en]zt* d[urc]h
 d[i]e g[erade] L[inie] AB, sond[ern] {nu}r nach | e[ine]r
 A ————— M ————— B
 N
 ne[r] g[e]wiss[en] Seite, o[der] in ei[nem] g[e]wiss[en]
 V[er]st[and]e. || 5
 War[um] gilt {nun} d[e]r S[atz] {nu}r v.[on] e[ine]r g[e]r[ade]n ins ∞ g[e]zog[en]-
 nen L[inie], [ni]cht v.[on] irg[en]d e[ine]r *endli]ch[en]*. Sollte | d[e]r Gr[un]d
 hier [ni]cht g[e]zeigt w[e]rd[en] kö[nnen]? |

§. 51. *L[e]hrs[atze]* 12. *V[er]t[i]c[a]l[w[in]k[e]l s[in]d e[finan]d[e]r g[e]ch.* °(Auf *g[e]w[ö]h[n]l[iche]* Art *d[urc]h* das *Add[er]en*).° |

§. 53. *Erkl[ärung]* 24. *D[e]r* ∞ *gr[o]ße Th[ei]l d[e]r Eb[ene], d[e]r zw[ischen]* *d[en]* ∞ *Sch[en]k[e]ln AC, AB des W[inkels] CAB als s[ei]nen bey-|d[en]* *Gr[en]z[en]* liegt, *h[ei]ßt d[ie] Fl[ä]che des W[in]k[e]ls CAB, u[nd] übe[r-|*

10 *h[aupt] e[ine] W[in]k[e]lfl[ä]che.* ||
°(Wäre *[nu]r erkl[är]t, w[a]s zwisch[en]* hier *b[e]deute?* Woran ich erk[ennen] soll, *w[e]lch[e]r P[un]ct z[u]r | W[in]k[e]lfl[ä]che e[ine]s W[inkels] g[e]-|*

Zus[atze]. 1. Also ist *sow[o]hl d[e]r* ∞ *Th[ei]l d[e]r g[an]z[en] Eb[ene], d[e]r* *üb[e]r e[ine]r nach beyd[en] S[ei]ten* ohne Ende *flo[rt]g[e]h[enden] | g[era]-|*

15 *den L[inie] AB, als d[e]r j[en]ige, d[e]r [un]t[er] ihr liegt, d[ie] Fl[ä]che e[ine]s* *W[inkels] v[on] 180° (§. 52. Z[usatz] 1) D[enn] j[e]d[e]r ist d[ie] | Fl[ä]che*

e[ine]s g[e]r[ade]n W[inkels] o[der] e[ine]s Paar[s] N[e]b[en]w[in]k[e]l. °(*G[e]r[ade]* das *[un]t[er]l[ie]gt groß[en] Zw[ei]t[e]l.* || *S[iehe] ob[en].*)° |
§. 54. *L[e]hrs[atze]* 13. Im *Sch[ei]t[e]l D* ist auf *d[em] Sch[en]k[e]l DE d[urc]h*

d[ie] Größe des W[inkels] EDG d[e]r | W[in]k[e]l EDG s[e]lbst, [mit]hin auch *d[ie] Lage des Sch[en]kels DG u[nd] d[ie] Fl[ä]che des W[inkels] g[e]g[e]b[en].* °(*Z[um] | w[e]n[i]g[sten] [mu]ß hier noch beyg[e]setzt w[er]d[en]* *»w[enn] auch d[ie] Eb[ene] u[nd] d[ie] Seite d[e]r Eb[ene] | in d[e]r er sich*

20 *b[e]f[ind]en soll, g[e]g[e]b[en] ist.«* – *Uib[er]i[g]en[s] seh[en] wir hier d[en]* *V[er]f[asser] zw[ischen] d[e]r || Größe des W[in]k[e]ls, u[nd] zw[ischen] d[e]r* *Fl[ä]che des W[inkels] e[inen] Unt[ers]sch[ie]d mach[en]. Wir ab[e]r b[e]gr[ei]-|*

f[en] | [ni]cht wie m[an] d[e]m W[inkel] e[ine] Größe, u[nd] zw[ar] e[ine] ext[ensive], so wie d[e]r V[er]f[asser] u[nd] alle Geo[met]r[er] th[un], | w[enn] sie

W[inkel] add[er]en, subtr[ahieren] etc. beyl[e]g[en] kö[n]n[e], w[enn] m[an] unt-|

e[r] | d[em] W[in]k[e]l n[ic]ht eig[en]t[lich] d[ie] Fl[ä]che zw[ischen] s[ei]nen *Sch[en]k[e]ln v[er]st[e]ht. D[e]r V[er]f[asser] s[agt] §. 52. Erkl[ärung] 23.*

»D[e]r 90 ste | Th[ei]l e[ine]s r[ec]ht[en] W[inkels] h[ei]ßt ein Grad; u. s. w.«

25 *Diese B[e]st[immun]g e[ine]s W[inkels] in Grad[en], || Min[uten] u. s. w. ist es* *[nun] v[e]r[mu]t[et], d[ie] er [un]t[er] d[er] Gr[ö]ße des W[inkels] v[e]r-|*

st[e]ht. Ab[e]r dieses ist e[ben] | [ni]chts als d[ie] Ang[abe] d[e]r Größe s[eine]r *Fl[ä]che. Im g[e]g[e]nw[ärtigen] L[e]hrs[atze] s[agt] also d[e]r V[er]f[asser] |*

eig[en]t[lich]: w[enn] Sch[ei]t[e]l, Sch[en]k[e]l, Eb[ene], Seit[e] d[er] Eb[ene] *wo d[e]r W[inkel] lieg[en] soll, u[nd] Größe s[einer] Fl[ä]che | g[e]g[e]b[en]*

s[in]d; so ist d[e]r and[ere] Sch[en]k[e]l, flo[ll]g[lich] d[e]r W[inkel] s[e]lbst *u[nd] d[ie] Fl[ä]che dess[elben] g[e]g[e]b[en].*)° |

»B[e]w[eis]. Denn m[an] s[e]tze, es wäre auß[e]r EDG noch ein zweyt[e]r



W.[inkel] mögl[ic]h, so [mü]ßte || s[ein] 2^{te}[er] 30
 Sch.[enkel] entw.[eder] [inne]rh[a]lb d[e]m °(des)°
 W.[inkel] EDG in DF, o[der] auß[e]rh[a]lb in DH |
 lieg[en]. Allein beyd[e]s ist wid[e]r d[ie] A[nnah]me,
 w[eil] EDF < EDG, u[nd] | EDH > EDG (A.[llge-
 meine] M.[athesis] §. 16. Z.[usatz] u. s. w. °(Das ist eb[en] z[u] b[e]w[eis]e[n]. –
 Es w[ir]d ab[e]r | [ni]cht b[e]wies[en] w[e]rd[en] kö[n]nen, w[enn] [un]s d[e]r
 V[er]f.[asser] [ni]cht erst s[agt]; w[a]s *inn[e]r* – *auß[e]rh[a]lb* e[ine]s |
 W.[inkels] heiße. V[er]gl.[eiche] §. 29. wo d[e]r V[er]f.[asser] d[ie]se W.[orte]
 bloß in B[e]zieh[un]g auf d[ie] $\odot$ [linie] erkl[är]t. || Hier kö[n]nen sie [ni]cht 35
 dens.[elben] Si[nn] hab[en]. W[e]lch[en] also? –)° |
 Zus.[atz] 1. Da [nun] in 2 gl[ei]ch[en] W.[inkeln] BAC, EDG [ni]cht [nu]r d[ie]
 Sch[e]nk[e]l AB, DE congr[uen]t s[ind] (§. 41. Z.[usatz] 2), | sond.[ern] auch
 ihre GröÙe, als das zweyte b[e]dingte °(b[e]ding[en]de, sollte es v[ie]ll[ei]cht
 laut[en])° St[ück], | g[an]z e[ine]rl[ei], d. i. congr[uent] ist (A.[llgemeine] M.[a-
 thesis] §. 4. Z.[usatz] 2); so s[ind] gl[ei]che W.[inkel] all[e]m[a]hl congr[uen]t, | 40
 u. [nd] ihre Fl[ä]ch[en] gl[ei]ch[a]lls congr[uen]t. (§. 11.) ||
 °(Sachte! A.[us] m[e]hr[e]r[e]n B[e]sp[ie]l[en] sieht m[an], d[a]ß d[e]r V[er]-
 f.[asser] [m]it d.[em] S[atz] §. 11, den er d[e]r Erste in d.[er] Geom[etrie]
 ausd[rück]l[ic]h aufg[e]st[ell]t hat, [ni]cht w[ohl] umz[u]g[e]h[en] w[e]iÙ.
 W[enn] das | w[a]s ein D[in]g b[e]st[imm]t, a.[us] m[e]hr[e]r[e]n Th[e]il[en]
 b[e]st[eh]t; so g[lau]bt er z.[um] B[e]w[eis]e d[e]r Gl[ei]chh[ei]t e[ine]s sol-
 ch[en] D[in]g[e]s [mi]t ei.[nem] | and.[eren] g[enu]g g[e]than z[u] hab[en],
 w[enn] er n[ur] zeigt, d[a]ß d[ie]se St[ück]e e[in]z[e]ln b[e]tr[acht]et in d.[em]
 588 e[inen] D[in]ge, wie || in d[e]m and[e]r[e]n sind. D[ie]ses ist ab[e]r k[eine]s-
 w[e]gs hinr[e]ich[en]d, sond.[ern] es kom[m]t auch noch d[a]r[au]f an, ob |
 d[ie]se St[ück]e auf gl[ei]che Art v[er]b[un]d[en] s[ind]. Denn Beyd[e]s [mu]ß
 s.[ein], w[enn] m[an] soll | sag[en] kö[n]nen: d[a]ß das B[e]st[immen]de (d[ie]
 Urs[ache]l) d[e]r beyd[en] D[in]ge gl[ei]ch sey. W[enn] es also auch w[ir]k-
 l[ic]h | w[a]hr wäre, d[a]ß Ein Sch[e]nk[e]l, u. [nd] d[ie] GröÙe e[ine]s W.[in-
 kels] dens.[elben] schon g[anz] b[e]stimm[en]; so kö[n]nte || doch [ni]cht so fort 5
 g[e]schloss[en] w[e]rd[en]: w[enn] in 2 W.[inkeln] d[ie]se 2 D[in]ge e[in]z[e]ln
 g[e]nom[m]en, congr[uent] s[ind], so s[ind] d[ie] | D[in]ge congr[uen]t; son-
 d.[ern] es w[ür]de hiezu noch erford[er]t z[u] zeig[en], d[a]ß d[e]r Sch[e]nk[e]l
 u. [nd] d[ie] GröÙe | [ni]cht auf v[er]sch[iedene] Art [mi]t e[inan]d[e]r v[er]-
 b[un]d[en] w[e]rd[en] kö[n]nen. Ab[e]r noch m[e]hr: Sch[e]nk[e]l u. [nd]
 GröÙe | s[ind] ja z[u]r B[e]st[imm]ung e[ine]s W.[inkels] noch gar [ni]cht hin-
 r[e]ich[en]d, sond.[ern] nach des V[er]f.[assers] eig[ene]r | Auss[age] im L[e]hr-

- s.[atz] (§.54.) ist auch noch d[ie] Ang[a]be des Sch[e]i[t]e[ls] nöth[i]g; eb[en] so
 10 nothw.[endig] ab[er] || auch d[ie] Eb[en]e, u.[nd] d[ie] Seite d[e]r Eb[en]e. Da
 entst[e]ht dann billig d[ie] Frage: ob d[ie]se 5 St[ü]cke in | d[en] m[e]hrart[i]-
 g[en] V[e]rb[ü]nd[un]g[en], w[e]lche sie z[u]l[as]s[en], nie e[in]e Comb.[ination]
 g[e]b[en], d[e]r[en] M[e]rk[ma]hle d[e]r and[eren] unähn[i]ch | ist*, u.[nd]
 w[enn] auch d[ie]ß [ni]cht ist, doch k[e]i[n]e Substituibilität z[u]läßt. |
 W[enn] m[an] z. B. st[att] e[ine]r Eb[en]e zw.[ischen] d[en] Sch[en]k[e]ln e[ine]s
 W.[inkels] anz[u]n[e]hm[en], e[inen] Streif[en] e[ine]r conisch[en] | Ob[e]rf[lä]-
 che, d[e]r[en] Sch[e]i[t]e[ll] [mi]t d[e]m des W[ink]e[ls] e[ine]r[e]i ist, annähme;
 15 so w[ür]de §. 54. L[e]hrs.[atz] noch im[m]e[r] || w[a]hr seyn. W[enn] d[ie] kon-
 n.[ische] Fl[ä]che, in d[e]r sich d[e]r W.[inkel] b[e]f[ind]e[n] soll, u.[nd] 1^{er}
 s.[eine]r Sch[en]k[e]l, u.[nd] s.[eine] Größe, n[ach]h[er]h[er] | d[as] St[ü]ck des
 Fl[ä]ch[en]r[äume], das zw.[ischen] s.[einen] Sch[en]k[e]ln liegt g[e]g[e]b[en]
 ist, so ist d[e]r g[an]ze W.[inkel] d[a]d[urc]h b[e]stimm[t] | Allein w[eil] [ni]cht
 alle kon:[ischen] Fl[ä]ch[en] e[inan]d[e]r ähnl[i]ch s[ind]: so w[ür]de k[eine]s-
 w[e]gs Zus.[atz] 1. w[a]hr | s.[ein], d. h. d[a]ß alle g[e]g[e]b[en]e W[ink]e[le], d. i. alle
 die e[inen] g[e]g[e]b[en] kon.[ischen] Fl[ä]ch[en]r[äume] zw.[ischen] ihr[en]
 Sch[en]k[e]ln e[insch]l[ie]ß[en], auch congr[uen]t sey[e]n. | Hier[au]s sieht
 20 Umst.[and] abh[äng]t, d[a]ß alle Ebe[nen] e[inan]d[e]r ähnl[i]ch s[ind]. || D[ie]-
 s[e]r Umst[and] d[em]üßte also, n[e]bst m[e]h[er]en and[eren] im B[e]w[e]i[s]
 b[e]r[ück]sicht[igt] word[en] s.[ein], w[enn] | er richt[i]g seyn sollte.)^o |
 Zus.[atz] 2. Also th[ei]lt j[e]de nach beyd[en] Seit[en] ohne Ende f[ol]gt[e]-
 h[en]de g[erade] L.[inie] d[ie] g[an]ze ∞ Eb.[ene], in | d[e]r sie liegt, in 2
 congr[ue]nte Th[ei]le. Denn d[e]r Th[ei]l üb[e]r AB ist d[ie] Fl[ä]che e[ine]s
 W.[inkels] v[on] 180°, | u.[nd] d[e]r Th[ei]l [un]t[er] AB g[e]g[e]b[en] (§. 53.
 25 Z.[usatz] 1.) ||
 °(Die W[a]hrh[e]it, d[ie] d[e]r V[er]f[asser] hier erst aufst[ellt], hätte e[ig]en[t]-
 l[i]ch schon vor d[em] Aufst[ellen] des S[atz]es | §.27. erwies[en] w[er]d[en]
 soll[en]; denn eb[en] d[a]r[au]f b[e]ruht es, d[a]ß m[an] d[ie] Lag[e]n e[ine]s
 P[un]ct[es] in s.[einen] beyd[en] | Th[ei]l[en], u.[nd] d[ie]se Th[ei]le s[e]lbst
 entg[e]g[e]n[e]s[e]tzt n[em]mt. Ab[er] sey es, d[a]ß d[e]r V[er]f[asser] d[ie]s[en]
 Ausd[ruc]k | [ni]cht in s.[einer] v[er]sag[en]d[en] B[e]d[eu]t[un]g nähme; so ist
 d[ie]se W[a]hrh[e]it doch nothw.[endig] schon im vorh[er]g[e]h[enden] Z.[u]-
 30 satz | vor[au]sg[e]s[e]tzt word[en], wie wir so eb[en] g[e]z[e]i[gt]. W[enn] er sie also
 j[e]tzt a.[us] d[ie]s[e]m h[er]leitet, || b[e]g[e]ht er e[ine]n circulum in probando.)^o |

* Die Zeilen 12–19 und 38–49 sind vorne durch einen Strich markiert.

Zus.[atz] 3. Unendl:[iche] g:[erade] L:[inien], d[ie] e[inan]d[e]r s[e]nkr[echt] schn[e]i[d]en, th[e]il[en] d[ie] Eb[ene] in 4 congr.[uente] Th[e]ile. Denn | sie b[e]st[e]ht a.[us] d[en] Fl[ä]ch[en] d[e]r 4 W:[inkel], d[ie] d[ie]se 2 L:[inien] bild[en]. Da [nun] d[ie]se W:[inkel] alle gl[e]ich s[in]d, so s[in]d ihre | Fl[ä]ch[en] congr[uen]t. (Z.[usatz] 1.) |

§. 55. L[e]hrs.[atz] 14. W[enn] in e[ine]r Eb[ene] 2 W:[inkel] e[ine]r[e]l Scheit[e]l hab[en] ^o(wozu d[ie]se B[e]ding[un]g? Da d[ie] W[a]hrh[e]it s[e]lbst, || 35 d[ie] d[e]r V[er]f.[asser] hier b[e]w[e]ist, v.[on] d[ie]s[e]m Umst.[and] gar [ni]cht abh[äng]t, so ist schon d[a]r[au]s, d[a]ß d[e]r V[er]f.[asser] b.[ei] sei.[nem] B[e]w[e]ise sich | g[e]n[ö]th[i]gt sieht, d[ie]s[e]n Umst.[and] anz[u]n[e]hm[en], z[u] schl[ie]ß[en], d[a]ß s.[ein] B[e]w[e]is d[en] obj.[ektiven] Gr[un]d [ni]cht ang[e]be^o so v[er]rh[äl]t[en] sie | sich wie ihre Fläch[en]. ^o(Sie s[in]d [ni]chts and[er]s als d[ie]se Fläch[en]. Denn Kr[e]isbö[gen], w[e]lche sich auch addir[en] | lieb[en], s[in]d [ni]cht b[e]st[imm]t, d[urc]h d[ie] Sch[en]k[e]l, Eb[enen] ab[e]r s[in]d b[e]st[imm]t. | W[enn] m[an] n[ach]h[er] 2 W:[inkel], die in 1 Eb.[ene] lieg[en], u.[nd] so, d[a]ß d[e]r g[e]m[e]ins.[chaftliche] Sch[en]k[e]l beyd[e]r 40 v.[on] e[ine]r || V[er]h[äl]tn[is]sl[inie] ab 2[e]r P[un]cte d[e]r v[er]rsch[iedenen] Sch[en]k[e]l d[urc]hsch[n]itt[en] wird, addirt, u.[nd] als S[umm]e d[en] W[ink]el, | d[en] d[ie] v[er]rsch[iedenen] Sch[en]k[e]l bild[en], angibt: so ist es ^{1/2} off[en]b[a]r, d[a]ß m[an] sich [un]t[er] ei.[nem] W[ink]el | [ni]cht ein Syst[em] 2[e]r Richt[un]g[en], u.[nd] ihr V[er]h[äl]t[en]iß zu e[inan]d[e]r d[e]nkt, denn dies[e] l[ie]ße sich [ni]cht so add.[ieren] | d[a]ß d[ie] S[umm]e e[inen] e[in]z[i]g[en] W.[inkel], d.h. ein e[in]z[i]g[e]s Syst[em], o[der] ein e[in]z[i]g[e]s V[er]h[äl]tn[is] 2[e]r R[ichtungen] gäbe. Was ist d[enn] | also das[e]nige w[a]s m[an] sich da – m[an] mag es ausdr[ücken] g[e]st[e]h[en] o[der] [ni]cht, m[an] mag es s[e]lbst deutl[ich] erk[ennen] o[der] [ni]cht, w[e]n[ig]st[ens] d[un]k[e]l || 45 vorst[ellt]? Es [muß] etw[a]s solch[e]s s.[ein], was d[urc]h d[ie] L:[inien] ca, cd allein o[der] v[er]l[e]hr d[urc]h d[ie] Richt[un]g[en] | ca, cd v[er]l[e]hrt b[e]st[imm]t w[ir]d, u.[nd] e[ine] GröÙe hat, u.[nd] zw[a]r e[ine] solche, d[a]ß d[ie] GröÙe, die es im W.[inkel] acd, dc b hat. N[un] gibt es [nu]r f[ol]g[en]de D[re]iecke, d[ie] d[urc]h 2 Richt[un]g[en] | allein, ohne e[ine] zu ihn[en] h[inz]u[g]efügte Entf[e]r[nun]g b[e]st[imm]t w[er]d[e]n, 1., d[ie] Eb[ene], in w[e]lch[e]r d[ie]se beyd[en] | Richt[un]g[en] lieg[en]; 2., die eb[ene] Fläche; 3., der Th[e]il d[e]r eb[enen] Fläche, in w[e]lch[e]m d[ie] L:[inie] ab liegt; || 4., d[e]r and[ere] Th[e]il,

^f Die Zeilen 1–9 sind vorne, die Zeilen 1–18 hinten durch einen Strich markiert.

in w[e]lch[e]m sie [ni]cht liegt. (N Alle d[ie]se 4 D[in]ge s[in]d doch [nu]r dann b[e]st[imm]t, w[enn] | d[ie] R[i]cht[un]g[en] ca, cb [ni]cht *entg[e]g[enge]s[etzt]* s[in]d.) 5., das V[e]rh[äl]t[ni]ß, w[e]lch[e]s d[ie] Größe d[e]r eb[enen] Fl[ä]che | 3 z[u]r Gr[ö]ße d[e]r eben[en] Fl[ä]che + hat. | 6. Das V[e]rh[äl]t[ni]ß d[e]r Länge des Kr[ei]s-||bog[en]s, d[e]r [mi]t irg[en]d ei[nem] H[a]lb[me]ss[e]r aus c in d[er] Eb[ene] acb b[e]schr[ie]b[en] w[ir]d, u.[nd] d[e]ss[en] H[a]lbm[e]ss[e]r s[e]r d[ie] | Chorde ab schneid[et], zur Länge des Bog[en]s b.[ei] d[e]m d[ie]ß [ni]cht g[e]schieht. 7. Das V[e]rh[äl]t[ni]ß d[e]r Länge | d[e]r L[inie] ab zu e[ine]r v.[on] d[en] L[inien] ac, bc, w[enn] ihr V[e]rh[äl]t[ni]ß g[e]g[e]b[en] ist. U. s. w. U. s. w. – G[e]ht m[an] | [nun] d[ie]se D[in]ge d[e]r Reihe nach d[u]rch; so sieht m[an], d[a]ß n° 1 k.[eine] Größe ist, also [ni]cht g[e]m[e]int | s.[ein]



kö[n]ne, n° 2. hat w[o]hl e[in]e Größe, ab[e]r b.[ei] all[en] W[inkeln] dies[e]lbe; ist also [ni]cht g[e]meint. || n° 4. hat e[in]e Größe, d[ie] b.[ei] v[er]sch[ieden]en W[inkeln] v[er]schied[en] ist; ab[e]r es erfüllt [ni]cht d[ie] v[er]l[äng]te B[e]ding[un]g, | denn es ist d[ie] Gr[ö]ße d[e]r Fl[ä]che b.[ei] W[inkel] acd [ni]cht = d[e]r Größe d[e]r Fl[ä]che b.[ei] W[inkel] acd + d[e]r Gr[ö]ße d[e]r Fl[ä]che b.[ei] W[inkel] | dcb. sond[ern] j[en]e ist v[ie]lm[e]hr kl[e]iner als j[ede] v.[on] d[ie]s[en] f[ür] sich. n° 5 kann auch [ni]cht | g[e]m[e]int s.[ein], w[eil] das V[e]rh[äl]t[ni]ß d[e]r Fl[ä]che n° 3 z[u]r Fl[ä]che n° 4 b.[ei] W[inkel] acb + d[e]m V[e]rh[äl]t[ni]ß | d[e]r Fl[ä]che n° 3 z[u]r Fl[ä]che n° 4 b.[ei] W[inkel] dcb k[e]in[sw]egs = d[e]m



- 15 V[e]rh[äl]t[ni]ß d[e]r Fl[ä]che n° 3 z[u]r Fl[ä]che n° 4 b.[ei] W[inkel] acb. Eb[en] so w[e]n[i]g n° 6; n° 7; u. s. w. Es bl[ei]bt also [nu]r übrig n° 3. Denn hier | ist wirklich etc. etc. – Das ist es also, w[a]s m[an] b.[ei] ei[nem] W[inkel] *meint*, u.[nd] mein[en] | m[u]ß, w[enn] | m[an] so v.[on] ihm spricht, wie es alle [un]s[e]re bish[erigen] Geo[metrie]r th[un]. |

Wie v[er]trägt sich ab[e]r [mi]t d[ie]s[e]r Vorst[ellun]g d[e]r B[e]griff d[e]r *convex[en] Wink[e]l*? →° |

»Beweis. Denn w[enn] d[e]r W[inkel] BAD = 2 BAC, so ist BAC + CAD = 2

- 20 BAC, f[o]lg[lich] CAD = BAC || (A.[llgemeine] M.[athesis] §. 24. Z.[usatz] 12.), [mi]thin Fl[ä]che ACD = Fl[ä]che ABC °(sic)° (§. 54. Z.[usatz] 1.) also Fl[ä]che ABD = Fl[ä]che ABC | + Fl[ä]che ACD = 2 Fl[ä]chen ABC.)« U. s. w. °(Die B[e]h[auptun]g, w[enn] BAD = 2 BAC; so ist BAD | = BAC + CAD; s[etzt] vor[au]s, d[a]ß j[e]d[e]r W[inkel] e[in]e ext[erne]s[ive] Gr[ö]ße sey.)° | Zus.[atz]. Da [nun] d[ie] Fl[ä]che e[ine]s W[inkels]

