

# MATHE TUTOR

Thomas Benes  
Bojan Radenković



Matura AHS

Grundkompetenztraining  
mit System

Technologieeinsatz berücksichtigt



Digitales Zusatzangebot:  
Kommentierte Lösungen





## Digitales Zusatzangebot

Die Lösungen und weitere digitale Zusatzangebote kannst du online über die Helbling-Website abrufen. Ruf dazu [www.helbling.com/code](http://www.helbling.com/code) auf und gib den Access Code ein (mit einer Münze oder dem Fingernagel freirubbeln).

### Bildnachweis

Umschlag wavebreakmedia – Shutterstock / 7 Robert Blaudziunas – Shutterstock / 11 SasStock – Shutterstock / 15 Korionov – Shutterstock / 21 Vadim.Petrov – Shutterstock / 27 maziarz – Shutterstock / 31 Jaromir Chalabala – Shutterstock / 37 Withan Tor – Shutterstock / 43 B Brown – Shutterstock / 49 Narongsak Nagsadhana – Shutterstock / 53 NicolasMcComber – iStockphoto / 59 Bella D – Shutterstock / 69 dencg – Shutterstock / 79 elena moiseeva – Shutterstock / 85 Gines Romero – Shutterstock / 91 Raum: nico\_blue – iStockphoto / 91 Tafelschrift: virtualphoto – iStockphoto / 97 PictureLake – iStockphoto / 103 Virgiliu Obada – Shutterstock / 113 Chanclos – Shutterstock / 119 mik38 – iStockphoto / 125 rdgnar – Shutterstock / 135 Pla2na – Shutterstock / 145 JoannaBoiadjieva – iStockphoto / 155 Helen Holton – Shutterstock / 165 poligonchik – iStockphoto / 171 Wendy Nero – Shutterstock / 177 Randomphotog – iStockphoto / 183 nurulanga – iStockphoto / 189 vetkit – iStockphoto / 195 Dmitry Vesto – Shutterstock / 205 Andrey Burmakin – Shutterstock / 211 carloshferrari – iStockphoto / 217 KPG\_Payless – Shutterstock / 221 Alex Tihonovs – Shutterstock

## MATHE TUTOR

### Matura AHS

Autorenteam: Thomas Benes, Bojan Radenković

Redaktion: Richard Meserić

Illustrationen: Georg Flor, Wien

Umschlaggestaltung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Innenlayout: Nathanaël Gourdin & Katy Müller GbR, Leipzig

Satz: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Druck: Athesia Druck, Innsbruck

HI-S8470

ISBN 978-3-99035-857-3

1. Auflage: A<sup>1</sup> 2018

© 2018 Helbling Innsbruck • Esslingen • Bern-Belp

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk einschließlich aller Inhalte ist ganz und in Auszügen urheberrechtlich geschützt. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie oder anderes Verfahren) ohne ausdrückliche schriftliche Genehmigung des Verlags nachgedruckt oder reproduziert werden und/oder unter Verwendung elektronischer Systeme jeglicher Art gespeichert, verarbeitet, vervielfältigt und/oder verbreitet bzw. der Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden. Alle Übersetzungsrechte vorbehalten.



mathewerkstatt

Thomas Benes, Bojan Radenković

# MATHETUTOR

Grundkompetenztraining mit System

Matura AHS

Nur zu Prüfungszwecken  
Eigentum des Helbling Verlags



## So begleitet dich dein MatheTutor

Ein **Tutor** begleitet dich durch den Lernprozess und hilft, wenn es schwierig wird.

Dieses Buch ist **dein Tutor** auf dem Weg zur Mathematik-Matura.

1

Informiere dich

Ein **kurzer Text** stimmt dich auf das Kapitel ein.

Die **Grundlagen** 1 benötigst du im ganzen Kapitel. Lerne oder wiederhole sie, bevor du loslegst.

Praktische **Werkzeuge** 2 stehen dir für einzelne Aufgaben oder Lösungsschritte zur Verfügung. Dein MatheTutor weist dich darauf hin, wenn es sinnvoll ist, sie einzusetzen.

Du erfährst hier auch, welche **Grundkompetenzen** 3 du in diesem Kapitel trainierst.

2

Vollziehe nach

4 Quadratische Gleichungen

Informiere dich Vollziehe nach Probiere selbst Trainiere weiter Teste dich

**Beispiele**

**B1** Gegeben ist die quadratische Gleichung  $k \cdot x^2 - 20x + 25 = 0$ . Bestimme alle Werte für  $k \in \mathbb{R}$  so, dass die Gleichung genau eine Lösung besitzt.

Wie bestimme ich unbekannte Parameter einer quadratischen Gleichung, wenn ich die Anzahl an Lösungen gegeben ist?

**1** Feststellen, ob die kleine oder die große Form vorliegt  
Vor  $x^2$  steht der Buchstabe  $k$ .  $\Rightarrow$  Große Form ( $\rightarrow$  W3)

**2** Die Koeffizienten der jeweiligen Form bestimmen  
 $a = k$ ,  $b = -20$ ,  $c = 25$

**Musterbeispiele** 4 zeigen dir Schritt für Schritt, wie du für das Kapitel typische Aufgaben löst.

**Leitfragen** 5 helfen dir zu erkennen, um welche mathematische Fragestellung es sich handelt.

**Modellschritte** 6 schlüsseln die Lösung anschaulich auf und unterstützen dich dabei, den Lösungsweg vollständig nachzuvollziehen.

## Hinweise zum Ausfüllen

In kleinen Kästchen trägst du Zahlen oder kurze Terme ein. Achte dabei besonders darauf, keine Vorzeichen oder Klammern zu vergessen.

In großen Kästchen trägst du Zahlen mit vielen (Nachkomma-)Stellen oder längere Terme ein.

In Kreisen trägst du Operatoren ein, d. h. die Zeichen:

+ - :  $\cdot$  <  $\geq$  >  $\leq$   $\neq$   $\approx$   $\parallel$   $\perp$

Du kreuzt leere Kästchen an, um die zugehörige Aussage als richtige Lösung zu markieren.

Auf Schreibzeilen hast du Platz für ganze Rechenzeilen oder Text.

## Quadratische Gleichungen

4

Die Sonne geht jeden Tag im Osten auf, erreicht gegen Mittag ihren Zenit und geht im Westen wieder unter. Sie beschreibt auf ihrem Weg annähernd eine ellipsenförmige Kurve. Die Zeitpunkte des Tages, an denen die Sonne den Horizont berührt, haben auch in der Mathematik eine besondere Bedeutung: Sie entsprechen den Nullstellen der Funktion, deren Graph den Verlauf der Sonne beschreibt. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit, wie man die Nullstellen einer mit der Ellipse verwandten Kurve, der Parabel, berechnen kann.



### 1 Grundlagen

G1

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung berechnet man im Allgemeinen mit einer Lösungsformel. Die Diskriminantenformel ermöglicht es, die Anzahl der Lösungen zu erkennen.

Form der Gleichung	Lösungsformel	Diskriminantenformel
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ „große Form“	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$	$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
$x^2 + p \cdot x + q = 0$ „kleine Form“	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

### 2 Werkzeuge

**W1** Das Vorzeichen der Diskriminante  $D$  gibt Auskunft über die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung in  $\mathbb{R}$ :

$D > 0 \Leftrightarrow$  Die quadratische Gleichung hat in  $\mathbb{R}$  zwei verschiedene Lösungen  $x_1$  und  $x_2$ .  
 $D = 0 \Leftrightarrow$  Die quadratische Gleichung hat in  $\mathbb{R}$  genau eine Lösung  $x_1 = x_2$ .  
 $D < 0 \Leftrightarrow$  Die quadratische Gleichung hat in  $\mathbb{R}$  keine Lösung.

Die Diskriminante  $D$  erhält man, wenn man die Diskriminantenformel aus **W1** berechnet.

**W2** Sind die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  einer quadratischen Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$  gegeben, so können die Koeffizienten  $p$  und  $q$  wie folgt berechnet werden:

$p = -(x_1 + x_2)$   
 $q = x_1 \cdot x_2$

**W3** Die große Form wird immer dann verwendet, wenn in der quadratischen Gleichung vor  $x^2$  eine Zahl (ein Binomstapel oder ein Minus steht).

3

Grundkompetenz: K1, K3

21

Probiere selbst

4 Quadratische Gleichungen

Informiere dich Probiere selbst Trainiere weiter Teste dich

**Aufgaben zu den Beispielen**

**B1** Gegeben ist die quadratische Gleichung  $x^2 + 2x + k = 0$ . Bestimme alle Werte für  $k \in \mathbb{R}$  so, dass die Gleichung genau eine Lösung besitzt.

**1** Feststellen, ob die kleine oder die große Form vorliegt  
Achte darauf, ob vor dem  $x^2$ -Term ein Faktor steht.  
Vorliegende Form (groß oder klein):

**2** Die Koeffizienten der jeweiligen Form bestimmen  
 $p = \quad$ ,  $q = \quad$

Die **Aufgaben zu den Beispielen** 7 sind wie die Musterbeispiele aufgebaut und ermöglichen es dir, selbst erste Aufgaben zu lösen.

Eine weitere **Probiere selbst**-Seite findest du online.

4x -3 0,25 (-2)

123000 -0,9987  $\sqrt{a^2 + b^2}$

$\neq$   $\geq$   $+$

☐ ☒

$3x - 17 = -4 \quad | +17$

Die Halbwertszeit beträgt ca. 8 Tage.

## 4 Trainiere weiter

**4** Quadratische Gleichungen

**Aufgaben**

**A1** Bestimme die Form und die Koeffizienten der quadratischen Gleichungen. **8**

**W3**

a)  $-x^2 + x = 0$  Form: groß **9**  $a = -1$   $b = 1$   $c = 0$

b)  $-2x^2 - x - 9 = 0$  Form:  $a =$   $b =$   $c =$

c)  $x^2 + 6 = 0$  Form:  $a =$   $b =$   $c =$

d)  $x^2 - x + 5 = 0$  Form:  $a =$   $b =$   $c =$

**A2** Bestimme für die folgenden quadratischen Gleichungen jeweils das Vorzeichen der Diskriminante und gib an, wie viele Lösungen die jeweilige Gleichung daher hat.

**G1** **W1**

a)  $2x^2 - x - 3 = 0$   $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$   $\Rightarrow$  zwei Lösungen

b)  $-3x^2 - x + 5 = 0$   $\Rightarrow$

c)  $x^2 + 20 = 0$   $\Rightarrow$

d)  $-x^2 - x = 0$   $\Rightarrow$

e)  $x^2 + 2x + 1 = 0$   $\Rightarrow$

**A3** Gegeben sind quadratische Gleichungen mit Parametern. Bestimme die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  der Gleichungen und gib anschließend die Diskriminanten in vereinfachter Form an.

	$a$	$b$	$c$	Diskriminante
a) $2x^2 + m \cdot x - 3 = 0$	2	$m$	-3	$D = m^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = m^2 + 24$

Löse die **Aufgaben** der Reihe nach, sie bauen oft aufeinander auf. Damit trainierst du die Grundkompetenzen des Kapitels.

Die **Tipps 8** deines MatheTutors solltest du im Hinterkopf behalten.

**Musterlösungen 9** sind grün hinterlegt.

Online findest du Lösungen mit Hinweisen und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast. Sie helfen dir oft bei den nächsten Aufgaben.

## 5 Teste dich

**4** Quadratische Gleichungen

**A11** Quadratische Gleichungen können in der Menge der reellen Zahlen keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen haben. **Aufgabenstellung:** Ordnen Sie jeder Aussage diejenige Gleichung zu, auf die die Aussage für alle  $a \in \mathbb{R}$  zutrifft.

Die Gleichung besitzt für kein $a \neq 0$ eine Lösung.	<input type="checkbox"/>	A $(x - a)^2 = 0$
Die Gleichung besitzt für jedes $a \neq 0$ die Lösungsmenge $L = \{0, a\}$ .	<input type="checkbox"/>	B $(x + a)^2 = 0$
Die Gleichung besitzt für jedes $a \neq 0$ eine positive und eine negative Lösung.	<input type="checkbox"/>	C $x \cdot (x + a) = 0$
Die Gleichung besitzt für positives $a$ nur positive Lösungen.	<input type="checkbox"/>	D $x^2 - a^2 = 0$
	<input type="checkbox"/>	E $x^2 + a^2 = 0$
	<input type="checkbox"/>	F $x \cdot (x - a) = 0$

**A12** Gegeben ist die quadratische Gleichung  $x^2 + kx - 3 = 0$  mit  $k \in \mathbb{R}$ . **Aufgabenstellung:** Ergänzen Sie die Lücken im folgenden Satz durch Ankreuzen jeweils richtig oder falsch, so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Die quadratische Gleichung hat in  $\mathbb{R}$ , wenn  $\text{①}$   $k > -3$   $\text{②}$   $k < -3$ .

genau eine Lösung	<input type="checkbox"/>	$k < -3$	<input type="checkbox"/>
genau zwei Lösungen	<input type="checkbox"/>	$k \leq -3$	<input type="checkbox"/>
keine Lösung	<input type="checkbox"/>	$k > -3$	<input type="checkbox"/>

**A13** Gegeben ist die Gleichung  $(x - 2)^2 = b$ . **Aufgabenstellung:** Ermitteln Sie jene Werte  $b \in \mathbb{R}$ , für die die gegebene Gleichung keine reelle Lösung hat!

Die letzte Seite jedes Kapitels bietet dir **typische Aufgaben im Stil von Teil 1 der Matura**.

Für diese Seite solltest du immer ein eigenes Blatt für die Erstellung der Lösungen bereithalten.

Du kannst für diese Aufgaben Technologie verwenden, sie sind aber auch ohne Technologie lösbar.

In den Online-Lösungen findest du auch für diese Seite Hinweise und Erklärungen. Lies sie, auch wenn du die Aufgabe richtig gelöst hast.

## Symbole



Für Zwischenschritte, Nebenrechnungen, Ergebnisse benötigst du hier ein eigenes Blatt.



Diese Aufgabe wird durch Technologieeinsatz leichter.



Diese Aufgabe musst du mit Technologieeinsatz bearbeiten.

**W2** Hier verwendest du eines der Werkzeuge aus *Informiere dich*. Schlag es bei Bedarf nach.

**G2** Diese Aufgabe behandelt eine der Grundlagen aus *Informiere dich*.

**B2** Mit dieser Aufgabe wiederholst und festigst du Modellschritte aus einem Musterbeispiel.

## Online-Angebot

Wie du Zugang zum Online-Angebot erhältst, erfährst du auf der inneren Umschlagseite des MatheTutors.

**Lösungen**

Lösungen zu allen Aufgaben der aktuellen Seite mit Hinweisen und Erklärungen, auch zum Technologieeinsatz.

**Weitere Aufgaben**

Eine weitere *Probiere selbst*-Seite zum jeweiligen Kapitel. Beschäftige dich bei Bedarf noch intensiver mit den Musterbeispielen.

**Modellschritte**

Die Modellschritte aus allen Kapiteln in einem Dokument praktisch zusammengefasst, zum Nachschlagen, Lernen und Üben.

Tipps und Hinweise zu den Aufgaben	6
------------------------------------	---

## AG – Algebra und Geometrie

1	Zahlenmengen	7
2	Ungleichungen	11
3	Terme und Formeln	15
4	Quadratische Gleichungen	21
5	Lineare Gleichungssysteme	27
6	Vektoren	31
7	Geraden in Ebene und Raum	37
8	Trigonometrie	43
9	Einheitskreis	49

## FA – Funktionale Abhängigkeiten

10	Reelle Funktionen	53
11	Lineare Funktionen	59
12	Potenzfunktionen	69
13	Exponentialfunktionen	79
14	Winkelfunktionen	85
15	Funktionen: Überblick und Anwendungen	91
16	Lineare Modelle	97
17	Exponentielle Modelle	103
18	Differenzengleichungen	113



## AN – Analysis

19	Funktionen ableiten	119
20	Änderungsmaße	125
21	Kurvendiskussion von Polynomfunktionen	135
22	Eigenschaften von Polynomfunktionen	145
23	Unbestimmtes Integral und Stammfunktionen	155
24	Bestimmtes Integral und Summation	165
25	Bestimmtes Integral und Flächenberechnungen	171
26	Anwendungen des Integrals	177

## WS – Wahrscheinlichkeit und Statistik

27	Grafische Darstellung von Daten	183
28	Kennzahlen der beschreibenden Statistik	189
29	Wahrscheinlichkeiten und Baumdiagramme	195
30	Erwartungswert diskreter Verteilungen	205
31	Binomialverteilung	211
32	Approximation der Binomialverteilung	217
33	Konfidenzintervalle	221

	Stichwortverzeichnis	227
--	----------------------	-----

# Tipps und Hinweise zu den Aufgaben

## Zwei wichtige Tipps für das Lösen der Aufgaben

Verwende die Lösungen, um etwaige Unklarheiten zu beseitigen. Tu das aber erst, nachdem du die Aufgabe selbstständig probiert hast.

Skizzen und Nebenrechnungen sind ein wichtiger Bestandteil jeder mathematischen Überlegung. Nimm ein Blatt Papier zur Hand, wenn der Platz im Buch nicht ausreichen sollte.

## Aufgabenformate im Teil 1 der Matura

Formate	Hinweise	Beispiele
<b>Offenes Antwortformat</b>	Formuliere eine Antwort in eigenen Worten, z. B. wenn eine Erklärung, Begründung oder Interpretation gefordert ist.	Seite 20 A10
<b>Halboffenes Antwortformat</b>	Ergänze eine teilweise vorgegebene Antwort, z. B. wenn einzelne Werte zu berechnen oder Abbildungen zu ergänzen sind.	Seite 14 A7
<b>Lückentext</b>	Ein Satz mit zwei Lücken ist vorgegeben. Für jede Lücke stehen mögliche Satzteile als Auswahl zur Verfügung. Kreuze jeweils genau einen der drei Satzteile an.	Seite 30 A7
<b>Multiple Choice 2 aus 5</b>	Kreuze die zwei richtigen unter fünf Antwortmöglichkeiten an.	Seite 68 A22
<b>Multiple Choice 1 aus 6</b>	Kreuze die eine richtige unter sechs Antwortmöglichkeiten an.	Seite 90 A11
<b>Multiple Choice x aus 5</b>	Unter fünf Antwortmöglichkeiten befinden sich eine oder mehrere richtige. Kreuze alle richtigen an.	Seite 58 A13
<b>Zuordnungsformat 4 aus 6</b>	Schreibe in die vier Ausfüllfelder die Buchstaben der richtigen Antworten aus den sechs gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 84 A9
<b>Konstruktionsformat</b>	Ergänze die vorgegebene Abbildung durch ein grafisches Element, z. B. Vektoren oder Funktionsgraphen.	Seite 36 A10 Seite 68 A20

## Zusätzliche Aufgabenformate auf den Trainiere weiter-Seiten

Formate	Hinweise	Beispiele
<b>Multiple Choice x aus y</b>	Kreuze die vorgegebene Anzahl an Antwortmöglichkeiten an. z. B. 1 aus 2, 1 aus 4 oder 2 aus 4.	Seite 13 A1 Seite 18 A4
<b>Zuordnungsformat x aus y</b>	Schreibe in alle Ausfüllfelder die Buchstaben der richtigen Antworten aus den gegebenen Antwortmöglichkeiten.	Seite 51 A4
<b>Ausfüllen</b>	Große Teile der Antwort sind vorgegeben. Ergänze die richtigen Zahlen, Terme, Symbole oder kurzen Texte.	Seite 18 A3 Seite 25 A6
<b>Schritt für Schritt</b>	Fülle alle Ausfüllkästchen und Schreibzeilen in den vorgegebenen Schritten aus.	Seite 19 A7



Ordnung und Organisation helfen nicht nur im täglichen Leben, den Überblick zu behalten, sondern auch allen, die Mathematik verwenden. So helfen etwa Mengen, eine Vielzahl von Objekten zu überblicken: Wir verstehen unter einer Menge eine Zusammenfassung von Objekten, z.B. Zahlen. Ist ein Objekt  $a$  in einer Menge  $M$  enthalten, so wird es Element dieser Menge genannt. Das wird symbolisch  $a \in M$  geschrieben.



## Grundlagen

**G1** Besonders wichtig sind in diesem Kapitel Zahlenmengen, d. h. Mengen, deren Elemente Zahlen sind.

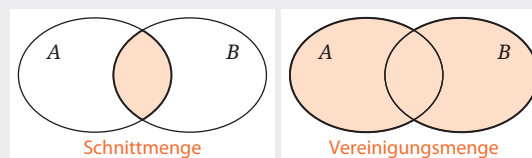
Zahlenmenge	Symbol	Definition	Beispiele
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	723, aber auch $\sqrt{4} = 2$ und $\frac{5}{1} = 5$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	8, aber auch $-\sqrt{9} = -3$ und $-\frac{8}{2} = -4$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$ ist die Menge aller endlichen und periodischen Dezimalzahlen.	Endliche Dezimalzahlen: 5,02; -0,01 Periodische Dezimalzahlen: $0,\bar{3}$ ; $23,\bar{45}$
Irrationale Zahlen	$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$ ist die Menge aller nicht-periodischen unendlichen Dezimalzahlen.	Bestimmte Wurzelausdrücke: $\sqrt{2}$ ; $\sqrt[3]{5}$ Besondere Zahlen: $\pi = 3,141\dots$ ; $e = 2,718\dots$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ ist die Menge aller Dezimalzahlen	0; $\sqrt{7}$ ; 2,3; $0,\bar{2}$ ; $\pi$
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} = \{z = a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	$1 + i$ ; $\sqrt{-2}$

**G2** Eine Menge  $A$  heißt **Teilmenge** einer Menge  $B$  (symbolisch  $A \subseteq B$ ), wenn alle Elemente von  $A$  auch in  $B$  enthalten sind. Eine Teilmenge  $A$  heißt **echte Teilmenge** einer Menge  $B$  (symbolisch  $A \subset B$ ), wenn die Mengen  $A$  und  $B$  nicht gleich sind.

Die Menge  $A \setminus B$  wird **Komplement** von  $B$  bezüglich  $A$  genannt. Sie besteht aus allen Elementen von  $A$ , die nicht in  $B$  enthalten sind.

Die **Schnittmenge**  $A \cap B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  enthält alle Elemente, die sowohl in  $A$  als auch in  $B$  enthalten sind.

Die **Vereinigungsmenge**  $A \cup B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  enthält alle Elemente, die in  $A$  oder in  $B$  oder in beiden Mengen enthalten sind.



Eine spezielle Menge ist die sogenannte **leere Menge**  $\{\}$ , die keine Elemente enthält.

Beispiele für weitere spezielle Zahlenmengen:  $\mathbb{R}^+$  (positive reelle Zahlen),  $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

## Werkzeuge

**W1** Für  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{I}$  gilt: Zwischen je zwei Zahlen einer der Mengen liegen unendlich viele Zahlen aller drei Mengen.

**W2** Es gilt  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Z.B. ist jede natürliche Zahl auch eine ganze, rationale, reelle und komplexe Zahl. Wichtig: Jede natürliche bzw. ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl, da z.B.  $-2 = -2,0$  eine endliche Dezimalzahl ist.

**W3** Jede rationale Zahl kann als Bruch zweier ganzer Zahlen, d.h. in der Form  $\frac{a}{b}$  mit  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , dargestellt werden, z.B.  $3,4 = \frac{34}{10}$  oder  $-0,\bar{3} = -\frac{1}{3}$ .

**W4** Die reellen Zahlen unterteilen sich in rationale und irrationale Zahlen, d.h.  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ , wobei  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{\}$ .

## Beispiel

- B 1** Gegeben ist die Menge  $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\} = [-3; 2)$ .  
Bestimme die Anzahl aller Elemente sowie die kleinste (Minimum) und die größte Zahl (Maximum) in  $M$ .  
Welche Elemente aus  $M$  sind in  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  enthalten?

Wie bestimme ich die wichtigsten Eigenschaften einer gegebenen Zahlenmenge  $M$ ?

**1**  $M$  als Teilmenge einer bestimmten Zahlenmenge erkennen und die Grenzen bestimmen

Die Zahlenmenge, deren Teilmenge  $M$  ist, erkennen wir anhand der Angabe  $x \in \dots$

$M$  ist eine Teilmenge von:  $\mathbb{R}$

Untere Grenze:  $-3$

Obere Grenze:  $2$

**2** Anzahl der Elemente sowie Minimum und Maximum bestimmen

Anzahl der Elemente: unendlich viele (Zwischen  $-3$  und  $2$  liegen laut  $\rightarrow$  W1 unendlich viele reelle Zahlen.)

Minimum von  $M$ :  $-3$  (Die untere Grenze ist wegen  $\leq$  bzw.  $[-$  in  $M$  enthalten.)

Maximum von  $M$ : gibt es nicht (Die obere Grenze ist wegen  $<$  bzw.  $)$  nicht in  $M$  enthalten.)

**3** Die Schnittmengen von  $M$  mit  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  bilden

Wir bestimmen nacheinander alle natürlichen, ganzen, rationalen, irrationalen, reellen und komplexe Zahlen in  $M$  ( $\rightarrow$  G1 und  $\rightarrow$  G2):

$$M \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$$

$$M \cap \mathbb{I} = \{x \in \mathbb{I} \mid -3 \leq x < 2\}$$

$$M \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$M \cap \mathbb{R} = M$$

$$M \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid -3 \leq x < 2\}$$

$$M \cap \mathbb{C} = M$$

## Aufgabe zum Beispiel

- B 1** **A** Gegeben ist die Menge  $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid -2 < x \leq 4\}$ .  
Bestimme die Anzahl aller Elemente sowie die kleinste (Minimum) und die größte Zahl (Maximum) in  $M$ .  
Welche Elemente aus  $M$  sind in  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  enthalten?

**1**  $M$  als Teilmenge einer bestimmten Zahlenmenge erkennen und die Grenzen bestimmen

$M$  ist eine Teilmenge von: \_\_\_\_\_

Untere Grenze: \_\_\_\_\_

Obere Grenze: \_\_\_\_\_

**2** Anzahl der Elemente sowie Minimum und Maximum bestimmen

Anzahl der Elemente von  $M$ : \_\_\_\_\_

Minimum von  $M$ : \_\_\_\_\_

Maximum von  $M$ : \_\_\_\_\_

**3** Die Schnittmengen von  $M$  mit  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  bilden

$$M \cap \mathbb{N} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$M \cap \mathbb{I} = \quad \quad \quad$$

$$M \cap \mathbb{Z} = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$M \cap \mathbb{R} = \quad \quad \quad$$

$$M \cap \mathbb{Q} = \quad \quad \quad$$

$$M \cap \mathbb{C} = \quad \quad \quad$$

## Aufgaben

A 1

Bestimme die unteren und oberen Grenzen der Zahlenmengen.

	a) $(5; 11]$	b) $[3; 5)$	c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -4 \leq x < 13\}$	d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$	e) $[6; \infty)$
Untere Grenze	5	_____	_____	_____	_____
Obere Grenze	11	_____	_____	_____	_____

A 2

Bestimme jeweils die Anzahl der Elemente der Zahlenmenge sowie ihr Minimum und Maximum.

→ W 1

	Anzahl der Elemente	Minimum	Maximum
a) $(-2; 9]$	unendlich viele	gibt es nicht	9
b) $[3; 5)$	_____	_____	_____
c) $\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x \leq 6\}$	_____	_____	_____
d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$	_____	_____	_____
e) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -4 \leq x < 13\}$	_____	_____	_____

A 3

→ G 1-G 2

T

Gegeben ist die Menge

$$M = \{-2,7; 0; \pi; 2 + i; 3 \cdot 10^{-2}; -9,25 \cdot 10^2; \sqrt{27}; \sqrt[3]{27}; \sqrt[5]{16}; -\frac{5}{16}\}$$

Bilde die angegebenen Schnittmengen.

**Tipp** Bestimme zuerst mit dem Taschenrechner die Dezimaldarstellungen der Zahlen aus  $M$ .

$$M \cap \mathbb{N} = \{0, \sqrt[3]{27}\} \quad M \cap \mathbb{I} = \{ \quad \quad \quad \} \quad M \cap \mathbb{Q} = M \setminus \{ \quad \quad \quad \}$$

$$M \cap \mathbb{Z} = \{ \quad \quad \quad \} \quad M \cap \mathbb{C} = \{ \quad \quad \quad \} \quad M \cap \mathbb{R} = M \setminus \{ \quad \quad \quad \}$$

A 4

Berechne die Ausdrücke und kreuze alle Zahlenmengen an, in denen das jeweilige Ergebnis liegt.

→ W 2

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} =$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} =$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) $\sqrt{-4} =$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) $10^5 \cdot 10^{-7} =$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) $3 \cdot \pi =$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

A 5

Kreuze jeweils alle Zahlenmengen an, für die die Aussage zutrifft.

→ W 1-W 4

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
a) Jede Zahl in dieser Menge kann als Bruch ganzer Zahlen dargestellt werden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) Die Menge hat ein Minimum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Die Menge enthält sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Zwischen den Zahlen $-1$ und $1$ liegen unendlich viele Zahlen dieser Menge.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Die Quadratwurzel jedes Elements dieser Menge ist eine irrationale Zahl.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



## Zahlenmengen

A 6

**Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

0 liegt in $\mathbb{R}$ , aber nicht in $\mathbb{N}$ .	<input type="checkbox"/>
$\frac{\pi}{2}$ liegt in $\mathbb{I}$ , aber nicht in $\mathbb{Q}$ .	<input type="checkbox"/>
$\sqrt{\frac{16}{49}}$ liegt in $\mathbb{R}$ , aber nicht in $\mathbb{Q}$ .	<input type="checkbox"/>
$-\sqrt{10}$ liegt in $\mathbb{Z}$ , aber nicht in $\mathbb{N}$ .	<input type="checkbox"/>
$3,\dot{3}$ liegt in $\mathbb{C}$ , aber nicht in $\mathbb{I}$ .	<input type="checkbox"/>

A 7

Gegeben ist eine rationale Zahl  $x = \frac{a}{b}$  mit  $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .**Aufgabenstellung:** Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!Die Zahl  $x^{-1}$  liegt sicher in der Zahlenmenge ①, da der Kehrwert von  $x$  ②.

①	②
$\mathbb{N}$ <input type="checkbox"/>	eine natürliche Zahl sein kann <input type="checkbox"/>
$\mathbb{Z}$ <input type="checkbox"/>	von der Form $\frac{b}{a}$ mit $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist <input type="checkbox"/>
$\mathbb{Q}$ <input type="checkbox"/>	einen negativen Bruch ergibt <input type="checkbox"/>

A 8

**Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Zwischen den Zahlen 0,99 und 1 liegen unendlich viele rationale Zahlen.	<input type="checkbox"/>
Zahlen der Form $\sqrt{z}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ liegen in $\mathbb{C}$ , aber nicht in $\mathbb{R}$ .	<input type="checkbox"/>
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.	<input type="checkbox"/>
Das Quadrat einer reellen Zahl kann eine negative Zahl ergeben.	<input type="checkbox"/>
Es gibt eine irrationale Zahl, die als Bruch ganzer Zahlen dargestellt werden kann.	<input type="checkbox"/>

A 9

Gegeben ist die Teilmenge der positiven rationalen Zahlen  $M = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x < 13\}$ .**Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie die für die Menge  $M$  zutreffende(n) Aussage(n) an!

In $M$ liegen unendlich viele rationale Zahlen, aber nur endlich viele ganze Zahlen.	<input type="checkbox"/>
In $M$ gibt es ein Minimum.	<input type="checkbox"/>
In $M$ gibt es eine größte natürliche Zahl.	<input type="checkbox"/>
Zwischen den Zahlen 12,99 und 13 liegen unendlich viele Zahlen aus $M$ .	<input type="checkbox"/>
In $M$ gibt es mindestens eine Zahl, die nicht in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ darstellbar ist.	<input type="checkbox"/>

A 10

Gegeben sind die Menge  $M = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  und eine negative ganze Zahl  $a \neq -1$ .**Aufgabenstellung:** Geben Sie eine Zahl  $b \in M$  an, sodass  $a \cdot b$  eine natürliche Zahl ergibt. $b =$  \_\_\_\_\_

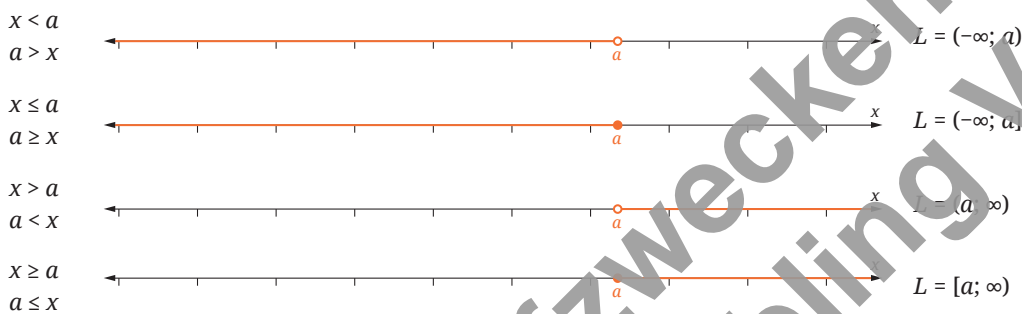
Vieles, das wir miteinander vergleichen, ist in zahlreichen Eigenschaften verschiedenartig: Sommer – Winter, Tag – Nacht, Gemüse – Fleisch, ... Unterschiede werden jedoch messbar, wenn es gemeinsame Maßstäbe gibt. In der Mathematik machen Ungleichungen Unterschiede durch die Verwendung von Zahlen und Termen rechnerisch erfassbar.



## Grundlagen

G1

Eine **lineare Ungleichung** in einer Variablen (hier  $x$ ) kann immer in eine der folgenden **elementaren Ungleichungen** umgeformt werden. Die **Lösungsmenge** ist jeweils auf der Zahlengeraden dargestellt und in Intervallschreibweise angegeben:

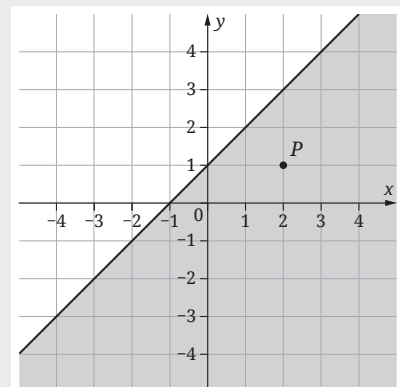


G2

- a) Um eine lineare Ungleichung in eine der elementaren Ungleichungen umzuformen, geht man wie beim Lösen von Gleichungen vor:
- ① Alle Klammern auflösen
  - ② Alle Terme, die die Variable  $x$  enthalten, mithilfe von Strichrechnungen auf eine Seite der Ungleichung bringen
  - ③ Eventuell noch erforderliche Punktrechnungen durchführen
- b) Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, so wechselt dadurch das Ungleichheitszeichen die Richtung, z. B. von  $<$  auf  $>$  oder von  $\geq$  auf  $\leq$ .

G3

- a) Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung in zwei Variablen kann geometrisch als Halbebene im ebenen Koordinatensystem dargestellt werden. Die nebenstehende Grafik zeigt ein Beispiel für die Variablen  $x$  und  $y$ .
- b) Ein Punkt befindet sich genau dann im markierten Lösungsbereich, wenn er, eingesetzt in die Ungleichung, eine wahre Aussage ergibt. Beispiel: Die Ungleichung zum nebenstehend dargestellten Lösungsbereich lautet  $y \leq x + 1$ . Der Punkt  $P = (2 | 1)$  befindet sich im Lösungsbereich, da das Einsetzen seiner Koordinaten in die Ungleichung eine wahre Aussage ergibt:  $1 \leq 2 + 1$ .



## Ungleichungen

## Beispiel

B 1

Gegeben ist die lineare Ungleichung  $7 - 4 \cdot (2 - x) < 5 + 2x$ .Löse die Ungleichung nach  $x \in \mathbb{R}$  auf und stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.

Wie bestimme ich die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung rechnerisch und stelle sie grafisch dar?

## 1 Die Klammern auflösen und auf jeder Seite zusammenfassen

$$7 - 8 + 4x < 5 + 2x$$

$$-1 + 4x < 5 + 2x$$

2 Die Ungleichung nach  $x$  umformen

Wir merken uns, alle Umformungen mit Strichrechnungen zuerst durchzuführen und erst dann jene mit Punktrechnungen. So bringen wir alle Terme mit der Variablen  $x$  auf die eine Seite der Ungleichung und alle Terme ohne  $x$  auf die andere Seite ( $\rightarrow$  G2a).

Variante 1: Zahlen links, Terme mit  $x$  rechtsVariante 2: Terme mit  $x$  links, Zahlen rechts

$$\begin{array}{rcl} -1 + 4x < 5 + 2x & | -4x & \\ -1 < 5 - 2x & | -5 & \\ -6 < -2x & | : (-2) & \\ 3 > x & \rightarrow \text{G2b} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -1 + 4x < 5 + 2x & | -2x & \\ -1 + 2x < 5 & | +1 & \\ 2x < 6 & | : 2 & \\ x < 3 & & \end{array}$$

Lösungsmenge:  $L = (-\infty; 3)$ 

## 3 Die erhaltene Zahl auf der Zahlengeraden markieren und die Lösungsmenge einzeichnen

Das Zeichen  $<$  bedeutet, dass die Zahl 3 nicht mehr in der Lösungsmenge enthalten ist ( $\rightarrow$  G1).

## Aufgabe zum Beispiel

B 1

A

Gegeben ist die lineare Ungleichung  $-3 \cdot (5 - 2x) \leq 13 + 20x$ .Löse die Ungleichung nach  $x \in \mathbb{R}$  auf und stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.

## 1 Die Klammern auflösen und auf jeder Seite zusammenfassen

$$\text{ } \leq 13 + 20x$$

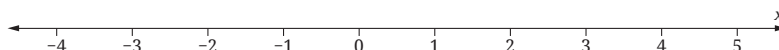
2 Die Ungleichung nach  $x$  umformen

Bringe zuerst mit Strichrechnungen alle Terme mit Variablen auf die eine und die Zahlen auf die andere Seite.

$$\begin{array}{rcl} \text{ } & \leq 13 + 20x & | \text{ } \\ \text{ } & \leq \text{ } & | \text{ } \\ \text{ } & \leq \text{ } & | \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \end{array}$$

Lösungsmenge:  $L = \text{ } \text{ } \text{ }$ 

## 3 Die erhaltene Zahl auf der Zahlengeraden markieren und die Lösungsmenge einzeichnen





## Aufgaben

A 1

Kreuze diejenige Ungleichung an, deren Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dargestellt ist.

→ G1-G2



$-1 \leq -x$	<input type="checkbox"/>
$x - 1 \geq 0$	<input type="checkbox"/>
$-x < -1$	<input type="checkbox"/>
$0 > x - 1$	<input type="checkbox"/>

A 2

Überprüfe jeweils, ob der Punkt im Lösungsbereich der Ungleichung liegt.

→ G3b

	Punkt einsetzen	w. A./f. A.	Antwort
a) $P = (1 2); 2y \leq -\frac{1}{3} \cdot x + 4$	$2 \cdot 2 \leq -\frac{1}{3} \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 4 \leq 3,6\dots$	f. A.	nein
b) $P = (4 1); 4y \geq \frac{1}{2} \cdot x + 3$	$4 \cdot \square \geq \frac{1}{2} \cdot \square + 3 \Leftrightarrow \square \geq \square$		
c) $P = (0 2); y \geq 2x + 2$			
d) $P = (1 0); y \leq -2x + 5$			
e) $P = (3 -2); 3x + 5y > -2$			
f) $P = (5 6); x > 5$			

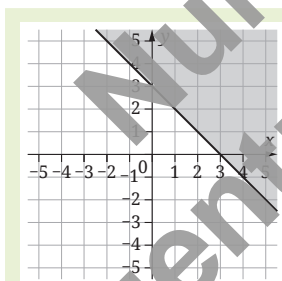
A 3

→ G3

Jede der abgebildeten Halbebenen stellt die Lösungsmenge einer der Ungleichungen A, B, C oder D dar.

Wähle für jede Halbebene einen Gitterpunkt, der nur in dieser einen Halbebene (und in keiner der anderen) liegt. Überprüfe rechnerisch, welche der Ungleichungen dieser Punkt löst. Ordne anschließend die richtige Ungleichung zu.

A:  $y \leq 2x - 5$     B:  $y \geq -x + 3$     C:  $y \leq -4$     D:  $y \leq -1$



z.B.  $P = (0|4)$

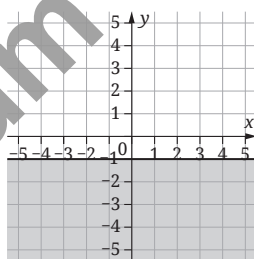
A:  $4 \leq 2 \cdot 0 - 5$  f. A.

B:  $4 \geq -0 + 3$  w. A.

C:  $4 \leq -4 \cdot 0$  f. A.

D:  $4 \leq -1$  f. A.

Antwort: Ungleichung B

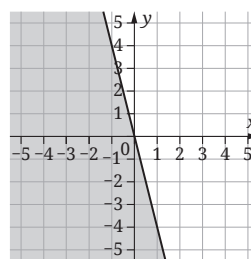


A:  $\square \leq 2 \cdot \square - 5$

B:  $\square \geq -\square + 3$

C:  $\square \leq -4 \cdot \square$

D:  $\square \leq -1$

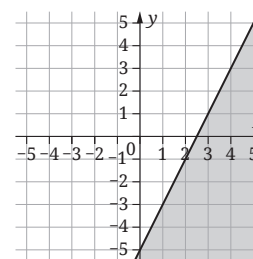


A:

B:

C:

D:



A:

B:

C:

D:

## Ungleichungen

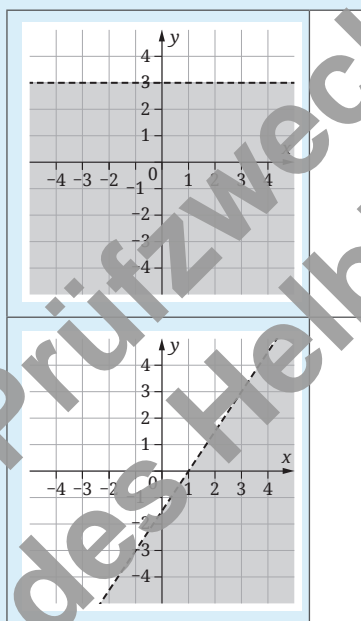
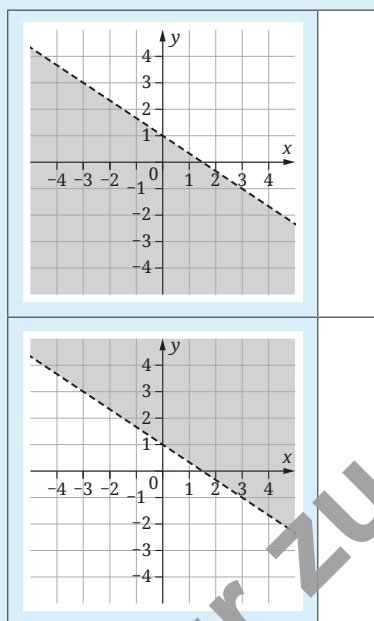
**A 4** Gegeben ist die lineare Ungleichung  $3x - 5y \leq -3$ .

**Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie diejenigen Zahlenpaare an, die Lösungen der Ungleichung sind!

$(-3   -1)$	<input type="checkbox"/>
$(-1   1)$	<input type="checkbox"/>
$(4   3)$	<input type="checkbox"/>
$(0   -5)$	<input type="checkbox"/>
$(-1   -1)$	<input type="checkbox"/>

**A 5** Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung in zwei Variablen kann geometrisch als Halbebene im ebenen Koordinatensystem dargestellt werden.

**Aufgabenstellung:** Ordnen Sie den abgebildeten Halbebenen jeweils diejenige lineare Ungleichung zu, die den markierten Bereich im Koordinatensystem richtig beschreibt!



A	$y < 3$
B	$3x + 2x < 3$
C	$3x - 2y > 3$
D	$3x + 2y > 3$
E	$x < 3$
F	$4x + 6y > 6$

**A 6** Gegeben ist die lineare Ungleichung in zwei Variablen  $3x - 4y \geq 7$ .

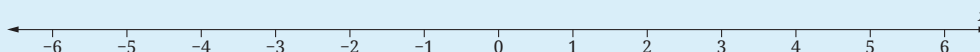
**Aufgabenstellung:** Geben Sie alle Werte für  $a \in \mathbb{R}$  an, sodass der Punkt  $(a | 2)$  eine Lösung der Ungleichung ist!

\_\_\_\_\_

**A 7** Gegeben ist die Ungleichung  $-3 \cdot (x + 1) < x + 9$  in der Variablen  $x$ .

**Aufgabenstellung:** Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung in  $\mathbb{R}$  an und stellen Sie sie auf der nachstehenden Zahlengeraden dar!

$L =$  \_\_\_\_\_



**A 8** Ein Gast eines Restaurants beschließt, den Rechnungsbetrag auf die nächste ganze Zahl zu erhöhen, um Trinkgeld zu geben. Er bezahlt insgesamt 15 Euro.

**Aufgabenstellung:** Geben Sie das größtmögliche Intervall für den Rechnungsbetrag an!

Der Rechnungsbetrag liegt im Bereich \_\_\_\_\_.



Wäre es nicht schön, eine Formel zu haben, mit der man alles berechnen kann? Wir müssten nie wieder darüber nachdenken, was wir anziehen sollen oder wohin die nächste Reise geht. Viele Formeln haben gemeinsam, dass sie die Wirklichkeit in der Sprache der Mathematik beschreiben. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man Formeln aufstellt und gewisse Sachverhalte so für Berechnungen zugänglich macht.



## Grundlagen

**G1** Ein **Term** ist ein sinnvoller mathematischer Ausdruck aus Zahlen, Variablen, Klammern und Rechenzeichen. Man verwendet Terme, um einen in Worten dargestellten Sachverhalt in mathematische Symbole umzuwandeln und so für Berechnungen zugänglich zu machen. Terme sind z. B. in Formeln und Gleichungen enthalten.

Zwei Terme oder Formeln sind **äquivalent**, wenn sie durch korrekte mathematische Umformungen in dieselbe Gestalt gebracht werden können.

Beispiel: Die Terme  $\frac{a}{b}$ ,  $a \cdot \frac{1}{b}$  und  $a \cdot b^{-1}$  sind äquivalent, da  $a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$ .

Eine **Formel** dient der Berechnung einer gesuchten Größe aus anderen Größen.

**G2** Folgende Umwandlungen von Texten in Terme oder Gleichungen kommen häufig vor:

Text	Term	Text	Gleichung
„p Prozent von G“	$\frac{p}{100} \cdot G$	„a ist um x größer als b.“	$a = b + x$
„G (wird) um p Prozent erhöht“	$G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	„a ist um x kleiner als b.“	$a = b - x$
„G (wird) um p Prozent vermindert“	$G \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$	„a ist x-mal so groß wie b.“	$a = b \cdot x$

**G3** Der **Durchschnittswert** einer **Größe 1** pro einer **Größe 2** (der **Bezugsgröße**) wird wie folgt berechnet:

$$\text{Durchschnitt} = \frac{\text{Summe der Werte von Größe 1}}{\text{Summe der Werte von Größe 2}}$$

Beispiel: Durchschnitt der **Reisekosten** pro **Person** =  $\frac{\text{Summe der Reisekosten}}{\text{Summe (Anzahl) der Personen}}$

## Werkzeuge

**W1** Der Gesamtwert einer Größe wird als Produkt aus Durchschnitt und Bezugsgröße des Durchschnitts berechnet:

$$\text{Gesamtwert einer Größe} = \underbrace{\text{Wert der Größe pro Bezugsgröße}}_{\text{Durchschnitt}} \cdot \underbrace{\text{Bezugsgröße}}_{\text{Anzahl bzw. Menge}}$$

Die **Bezugsgröße** ist daran erkennbar, dass sie nach „pro“ steht.

Beispiele:

Gesamtmitarbeiteranzahl = Mitarbeiteranzahl pro Abteilung · Anzahl an Abteilungen

Gesamteinnahmen = Einnahmen pro Person · Anzahl an Personen

Gesamtspritkosten = Spritkosten pro Liter · verbrauchte Liter

**W2** Die Formel **Wert einer Größe = Wert der Größe pro Bezugsgröße · Bezugsgröße** gilt allgemein. Statt mit Größen kann sie auch mit Einheiten geschrieben werden. Mit einem **Einheitencheck** kann geprüft werden, ob sie richtig aufgestellt wurde.

Beispiele:

$$\begin{array}{lcl} \text{Mietpreis} & = & \text{Mietpreis pro m}^2 \cdot \text{Flächeninhalt} \quad \text{Wassermenge} = \text{Wassermenge pro Stunde} \cdot \text{Stunden} \\ \text{€} & = & \text{€/m}^2 \cdot \text{m}^2 \quad \checkmark \quad \text{Liter} = \text{Liter/h} \cdot \text{h} \quad \checkmark \end{array}$$

## Beispiele

- B 1** Aufgrund schwankender Nachfrage benötigt eine Schokoladenfabrik für die Herstellung von Milchschokolade im Laufe eines Jahres unterschiedliche Mengen an Kakao: im Frühling  $x$  Tonnen, im Sommer nur die Hälfte davon, im Herbst um 20 % weniger als im Frühling und im Winter  $y$  Tonnen mehr als im Frühling. Stelle eine Formel für die Gesamtjahresmenge  $G$  an Kakao in Tonnen auf.

Wie erstelle ich eine Formel aus den Teilstücken einer Textangabe?

**1 Eine Übersicht der Textteile aus der Angabe erstellen**

Frühling:	$x$	→
Sommer:	die Hälfte von $x$	→
Herbst:	um 20 % weniger als $x$	→
Winter:	um $y$ mehr als $x$	→

**2 Die Textteile in Terme umwandeln**

Wir verwenden dafür → **G2**.

Frühling:	$x$	→	$x$
Sommer:	die Hälfte von $x$	→	$\frac{x}{2}$ oder $0,5 \cdot x$
Herbst:	um 20 % weniger als $x$	→	$x \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0,8 \cdot x$
Winter:	um $y$ mehr als $x$	→	$x + y$

**3 Die einzelnen Terme zu einer Formel zusammensetzen**

Da die Gesamtmenge für das Jahr gesucht ist und die einzelnen Terme aus Schritt 2 die benötigten Kakao-mengen für jede Jahreszeit angeben, addieren wir alle Terme.

$$G = x + 0,5 \cdot x + 0,8 \cdot x + x + y \Rightarrow G = 3,3 \cdot x + y$$

- B 2** In einem Wohnblock gibt es  $r$  Wohnungen mit einem durchschnittlichen Energieverbrauch pro Wohnung von  $x$  Kilowattstunden (kWh). Stelle eine Formel für die Gesamtenergiekosten  $G$  des Wohnblocks auf, wenn beim städtischen Energielieferanten 1000 kWh  $k$  Euro kosten.

Wie erstelle ich die Formel für eine Gesamtgröße bei gegebenen Durchschnittswerten?

**1 Die gesuchte Größe als „Durchschnitt · Bezugsgröße des Durchschnitts“ schreiben**

Wir halten uns an das in → **W1** dargestellte Muster:

Gesamt**wert** einer Größe = **Wert der Größe** pro **Bezugsgröße** · **Bezugsgröße**.

Die Bezugsgröße finden wir im Text nach dem Wort „pro“.

Gesamt**energiekosten** des Wohnblocks = **Energiekosten** pro **Wohnung** · Anzahl an **Wohnungen**

$$G = \text{Energiekosten pro Wohnung} \cdot r$$

**2 Schritt 1 mit jeder Größe wiederholen, die noch nicht durch einen Term ersetzt wurde**

Wir benötigen noch die Energiekosten pro Wohnung. Sie sind in der Angabe nicht direkt gegeben. Die Energiekosten für 1000 kWh betragen  $k$  Euro, daher kostet eine kWh  $\frac{k}{1000}$  Euro.

**Energiekosten** pro Wohnung = **Energiekosten** pro **kWh** · Anzahl an verbrauchten **kWh**

$$\text{Energiekosten pro Wohnung} = \frac{k}{1000} \cdot x$$

**3 Die einzelnen Terme zu einer Formel zusammensetzen**

$$G = \frac{k}{1000} \cdot x \cdot r$$



## Aufgaben zu den Beispielen

B 1 A

Florians Eltern haben ihrem Sohn in jedem Jahr der Oberstufe bestimmte Beträge an Taschengeld gegeben. In der 5. Klasse erhielt er insgesamt  $x$  Euro. Wegen schlechter Schulnoten gaben ihm seine Eltern in der 6. Klasse insgesamt um 20 % weniger als im Jahr davor. In der 7. und 8. Klasse waren seine Noten besser und er bekam jeweils doppelt so viel wie in der 6. Klasse. Berechne, wie viel Taschengeld Florian über die gesamte Oberstufe durchschnittlich pro Jahr bekommen hat.

## 1 Eine Übersicht der Textteile aus der Angabe erstellen

5. Klasse: \_\_\_\_\_ → \_\_\_\_\_

6. Klasse: \_\_\_\_\_ → \_\_\_\_\_

7. Klasse: \_\_\_\_\_ → \_\_\_\_\_

8. Klasse: \_\_\_\_\_ → \_\_\_\_\_

## 2 Die Textteile in Terme umwandeln

## 3 Die einzelnen Terme zu einer Formel zusammensetzen

Gesucht ist ein Durchschnitt. Schlage die Formel für den Durchschnitt in  $\text{€}$  nach und setze ein.

Größe 1: Summe der Taschengelder = \_\_\_\_\_ = Größe 2: Anzahl an Jahren = 

Durchschnittliches Taschengeld = \_\_\_\_\_

B 2 A

In einer Firma mit  $a$  Abteilungen arbeiten pro Abteilung durchschnittlich  $b$  Personen. Jede Person bezieht im Mittel  $x$  Euro Gehalt pro Jahr. Stelle eine Formel für die monatlichen Gehaltsausgaben  $G$  der Firma auf.

## 1 Die gesuchte Größe als „Durchschnitt · Bezugsgröße des Durchschnitts“ schreiben

Beachte, dass  $x$  für das Gehalt einer Person pro Jahr steht, aber das Gehalt pro Monat gefragt ist.

Monatliche Gehaltsausgaben =

= mittleres monatliches Gehalt einer \_\_\_\_\_ · Anzahl an \_\_\_\_\_

 $G = \frac{x}{12} \cdot \text{Anzahl an } \frac{a \cdot b}{12}$ 

## 2 Schritt 1 mit jeder Größe wiederholen, die noch nicht durch einen Term ersetzt wurde

Anzahl an Personen =

= Durchschnittliche Personenanzahl pro \_\_\_\_\_ · Anzahl an \_\_\_\_\_

Anzahl an Personen =  · 

## 3 Die einzelnen Terme zu einer Formel zusammensetzen

 $G = \frac{x}{12} \cdot \frac{a \cdot b}{12}$

## Aufgaben

A 1

Wandle die folgenden Phrasen in Terme bzw. Gleichungen um.

→ G2

- a) die Hälfte von  $p$  → \_\_\_\_\_ f) 10 % von  $x$  → \_\_\_\_\_
- b) das Dreifache von  $x$  → \_\_\_\_\_ g)  $p$  % von 500 → \_\_\_\_\_
- c) um 5 mehr als  $a$  → \_\_\_\_\_ h) um 40 % mehr als  $y$  → \_\_\_\_\_
- d)  $m$  ist um 7 kleiner als  $b$  → \_\_\_\_\_ i) um 70 % weniger als  $b$  → \_\_\_\_\_
- e) drei Viertel von  $A$  sind das Quadrat von  $a$  → \_\_\_\_\_ j)  $K$  wächst um 5 % → \_\_\_\_\_

A 2

Wandle die folgenden Texte in Terme bzw. Gleichungen um.

→ G2



- a) Ein Händler erhält vom Lieferanten einer Ware mit Preis  $P$  einen Nachlass von 5 %, verkauft sie aber selbst um 20 % teurer weiter. Berechne den neuen Preis  $N$ .  
 Zwischenschritt (optional):  $N = \left[ P \cdot \left( 1 - \frac{5}{100} \right) \right] \cdot \left( 1 + \frac{20}{100} \right)$   
 Ergebnis:  $N = P \cdot 0,95 \cdot 1,20 = 1,14 \cdot P$
- b) Der Preis  $P$  einer Ware wird zuerst um 30 % erhöht und danach um 30 % gesenkt. Berechne den neuen Preis  $N$ .
- c) Auf ein Konto mit Guthaben  $E$  Euro wird ein Betrag in Höhe von 15 % des bestehenden Guthabens eingezahlt und anschließend 8 % des neuen Guthabens abgebucht. Wie lautet der neue Kontostand  $K$ ?
- d) Der Bruttopreis (= um 20 % erhöhter Nettopreis) einer Ware wird um 5 % vermindert. Berechne den neuen Bruttopreis  $P$ , ausgehend vom ursprünglichen Nettopreis  $N$  der Ware.

A 3

Setze jeweils den mathematischen Operator +, -, · oder : ein, der eine korrekte Gleichung ergibt.

- a) Durchschnittliche Anzahl an Pralinen pro Packung = Gesamtzahl an Pralinen ☐ Anzahl an Packungen
- b) Reisegewicht pro Person = Gewicht Handgepäck pro Person ☐ Gewicht Frachtgepäck pro Person
- c) Geflossene Wassermenge = Durchflussmenge pro Minute ☐ Anzahl an Minuten
- d) Anzahl an Personen ohne Brille = Gesamtzahl an Personen ☐ Anzahl an Personen mit Brille
- e) Gesprächsgebühr pro Monat = Kosten pro Minute ☐ telefonierte Minuten pro Monat

A 4

Kreuze jeweils das korrekte Produkt an.

**Tip** Einheitencheck: Stehen im Anschluss an „pro“ zwei mit „und“ verknüpfte Größen, sind beide Bezugsgrößen. Beispiel: „Unfälle pro Tag und Straßenkilometer“ wird zu  $\frac{\text{Unfälle}}{\text{Tag} \cdot \text{km}}$ .

→ W1-W2

- a) Liter pro km · Kosten pro Liter = ☒ Kosten pro km ☐ Strecke in km  
 Einheitencheck:  $\frac{\text{l}}{\text{km}} \cdot \frac{\text{€}}{\text{l}} = \frac{\text{€}}{\text{km}}$
- b) Verbrauch in kWh pro Monat · Preis pro kWh = ☐ Monate pro kWh ☐ Kosten pro Monat
- c) Waren pro Einkauf · Einkäufe pro Person = ☐ Personen pro Einkauf ☐ Waren pro Person
- d) Regenmenge pro Tag und Gebiet · Anzahl an Tagen = ☐ Regenmenge pro Tag ☐ Regenmenge pro Gebiet
- e) Downloads pro App und User · Anzahl an Usern = ☐ Downloads pro App ☐ Downloads pro User





A 5



In einer Siedlung mit  $x$  Grundstücken beträgt in einem Jahr der durchschnittliche Wasserverbrauch pro Grundstück im Haus  $y$  Liter und im Garten  $z$  Liter. Ein Liter Wasser kostet  $a$  Euro. Auf einem Grundstück leben im Schnitt  $b$  Personen.

Drücke die folgenden Größen als Terme aus:

- a) Anzahl an Einwohnerinnen und Einwohnern der Siedlung
- b) Wasserkosten pro Grundstück und Person in einem Jahr
- c) Wasserkosten der gesamten Siedlung in einem Jahr

Interpretiere die folgenden Ausdrücke:

- d)  $y + z$
- e)  $\frac{z \cdot a}{12}$
- f)  $x \cdot (y + z)$

A 6

→ G3



Stelle Formeln für die gesuchten Durchschnitte auf.

- a) Ein Tischler verkauft zwei Stuhlmodelle: *Comfort* und *Relax*. Der Stuhl *Comfort* wird zum Einzelpreis  $P$  im Set zu  $x$  Stück und der Stuhl *Relax* zum Einzelpreis  $Q$  Euro im Set zu  $y$  Stück verkauft. Berechne den Durchschnittspreis pro Stuhl.

Zwischenschritt (optional):

$$\text{Gesamtpreis} = P \cdot x + Q \cdot y$$

$$\text{Anzahl an Stühlen} = x + y$$

Ergebnis:

$$D = \frac{P \cdot x + Q \cdot y}{x + y}$$

- b) In einem Stall befinden sich  $P$  Pferde,  $K$  Kühe und  $S$  Schweine. Der Unterhalt kostet für jedes Pferd  $p_1$  Euro, für jede Kuh  $p_2$  Euro und für jedes Schwein  $p_3$  Euro. Berechne den durchschnittlichen Unterhalt  $U$  pro Tier.
- c) In einem Kraftwerk gibt es zwei Maschinen. Maschine A erzeugt  $a$  kWh elektrischen Strom pro Tag und läuft  $x$  Tage. Maschine B erzeugt  $b$  kWh Strom pro Tag und ist  $y$  Tage in Betrieb. Berechne die durchschnittlich erzeugte Strommenge  $E$  pro Tag.

A 7



**Umformen von Formeln** auf eine gesuchte Größe: Gehe in den vorgegebenen Schritten vor und gib nur die positiven Ergebnisse an. Nicht immer ist jeder Schritt nötig. Du kannst das Ergebnis mithilfe von Technologie überprüfen.

	1. Strichrechnung	2. Punktrechnung	3. Potenzrechnung
a) $E = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v^2}{2}$ , $v = ?$	$E - m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2}$	$\frac{2(E - m \cdot g \cdot h)}{m} = v^2$	$v = \sqrt{\frac{2(E - m \cdot g \cdot h)}{m}}$
b) $s = s_0 + \frac{g \cdot t^2}{2}$ , $t = ?$			
c) $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{2}$ , $r = ?$			
d) $W = W_0 \cdot \frac{k \cdot x^2}{2}$ , $k = ?$			

A 8

→ G1



Kreuze jeweils die zwei der drei Formeln bzw. Gleichungen an, die äquivalent sind.

**Tipp** Statt umzuformen kannst du selbst gewählte Zahlen (verschieden und ungleich null) einsetzen und die Ergebnisse vergleichen.

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) <input type="checkbox"/> $O = r^3 \cdot \pi \cdot s$<br>$2^3 \cdot \pi \cdot 3 = 24\pi$ | <input checked="" type="checkbox"/> $O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$<br>$2\pi \cdot (2 + 3) = 10\pi$ | <input checked="" type="checkbox"/> $O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot s$<br>$2^2 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot 3 = 10\pi$ |
| b) <input type="checkbox"/> $s = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$                      | <input type="checkbox"/> $s = t \cdot \left( v_0 + \frac{g}{2} \cdot t \right)$                     | <input type="checkbox"/> $s = \frac{t}{2} (2 \cdot v_0 + g \cdot t)$   |
| c) <input type="checkbox"/> $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$        | <input type="checkbox"/> $E = m \cdot \left( \frac{v^2}{2} + g \cdot h \right)$                     | <input type="checkbox"/> $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v^2 + g \cdot h)$   |
| d) <input type="checkbox"/> $m = \frac{\rho}{V}$   | <input type="checkbox"/> $\rho = m \cdot V^{-1}$  | <input type="checkbox"/> $\rho \cdot V = m$  |
| e) <input type="checkbox"/> $d = \sqrt{e^2 - f^2}$   | <input type="checkbox"/> $e = \sqrt{f^2 - d^2}$   | <input type="checkbox"/> $f = \sqrt{e^2 - d^2}$  |

## Terme und Formeln

A 9

Herr Maier möchte sein Auto reparieren lassen und holt dafür das Angebot einer Fachwerkstatt ein. Sie verrechnet für eine halbe Stunde Arbeitszeit  $a$  Euro und einen Pauschalbetrag für Ersatzteile in Höhe von  $e$  Euro.

**Aufgabenstellung:** Geben Sie eine Formel an, mit der Herr Maier die Kosten  $K$  der Reparatur seines Autos in dieser Werkstatt bei  $t$  verbrauchten Stunden an Arbeitszeit berechnen kann!

$K =$  \_\_\_\_\_

A 10

Eine Reisegruppe mit  $E$  Erwachsenen und  $K$  Kindern besucht einen Zirkus. Eine Eintrittskarte kostet  $p_1$  Euro für Erwachsene und  $p_2$  Euro für Kinder.

**Aufgabenstellung:** Erklären Sie, was der Term  $\frac{p_1 \cdot E + p_2 \cdot K}{E + K}$  im Zusammenhang mit dem Zirkusbesuch bedeutet!

A 11

Eine Aktie hat zu Jahresbeginn einen Wert von  $W$  Euro. In den folgenden beiden Jahren treten starke Kursschwankungen auf: Die Aktie verliert im ersten Jahr 15 % an Wert und legt im darauffolgenden Jahr 20 % an Wert zu.

**Aufgabenstellung:** Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich der Wert der Aktie insgesamt verändert hat! Geben Sie dabei an, ob der Wert insgesamt gestiegen oder gefallen ist!

Veränderung in Prozent: \_\_\_\_\_

A 12

Die elektrische Leistung  $P$  ist das Produkt aus Spannung  $U$  und Stromstärke  $I$ , d. h.  $P = U \cdot I$ .

Die Spannung ist das Produkt aus Widerstand  $R$  und Stromstärke  $I$ , d. h.  $U = I \cdot R$ .

**Aufgabenstellung:** Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, die sich aus den gegebenen Zusammenhängen ableiten lassen!

$P = U^{-2} \cdot R$	<input type="checkbox"/>
$P = U^2 \cdot R^{-1}$	<input type="checkbox"/>
$P = I^2 \cdot R$	<input type="checkbox"/>
$P = \frac{I^2}{R}$	<input type="checkbox"/>
$P = U \cdot R \cdot I$	<input type="checkbox"/>

A 13

Bei der Benutzung eines Streamingportals für Filme werden pro geladenem Gigabyte  $a$  Cent verlangt. Ein User verwendet diesen Streamingdienst in einem Monat an  $x$  Tagen und lädt im Durchschnitt an jedem dieser Tage  $b$  Gigabyte an Filmmaterial.

**Aufgabenstellung:** Geben Sie die Kosten  $K$  für das Portal, die der User in diesem Monat zu begleichen hat, in Euro an!

$K =$  \_\_\_\_\_

A 14

Ein Schwimmbecken wird aus zwei Leitungen mit Wasser gefüllt. Durch die erste Wasserleitung fließen  $L$  Liter pro Minute. Die zweite Leitung befördert um 30 % weniger Wasser als die erste.

**Aufgabenstellung:** Geben Sie eine Formel für die durchschnittlich geflossene Wassermenge  $V$  pro Minute in Litern an, wenn zunächst nur die erste Leitung  $a$  Minuten lang und danach nur die zweite doppelt so lang geöffnet ist!

$V =$  \_\_\_\_\_



**A**

- Ableiten
  - elementare Regeln 119
  - Kettenregel **119**, 120
  - nach einer allgemeinen Variablen 120
  - Summe von Potenzfunktionen 120
  - von Grundtypen 119
- absolute Änderung 125
- absolute Häufigkeit **183**, 184
- Achsensymmetrie von Funktionsgraphen 91
- Amplitude 85
- Änderungsmaß
  - berechnen 126
  - interpretieren 126
  - grafisch bestimmen 130
- Anfangswert 79
  - eines exponentiellen Modells 103
- Ankathete 43
- äquivalent 15
- Äquivalenzumformung 22
- arithmetisches Mittel 189
- Asymptote **69**, 91

**B**

- Balkendiagramm 183
- Baumdiagramm **195**, 200
- Bernoulli-Bedingung 211
- bestimmtes Integral 165
  - ermitteln 166
  - Fläche zwischen Graph und  $x$ -Achse **171**, 172
  - Fläche zwischen zwei Graphen **171**, 172
  - Wert grafisch bestimmen 173
- Betrag eines Vektors 31
- Binomialkoeffizient 211
- Binomialverteilung 211
  - Approximation durch Normalverteilung 211
  - symmetrisches Intervall um  $\mu$  225
- Boxplot **183**, 184

**C**

- charakteristische Eigenschaft linearer Funktionen 59
  - von Exponentialfunktionen 79
- Cosinus 43
- Cosinusfunktion 85

**D**

- Definitionsmenge 53
- Dichtefunktion 217
- Differenzengleichung **113**, 114
- Differenzenquotient 125
- Differenzialquotient 125
- direkte Proportionalitätsfunktion **59**, **69**
- diskrete Verteilung 205
- diskrete Zufallsvariable 205
- diskretes Modell 113
- Diskriminante 21
- Durchschnittswert 15

**E**

- Einheitskreis 49
- Ereignis 195
- erwarteter Gewinn **205**, 206
- Erwartungswert **205**, 206
  - einer binomialverteilten Zufallsvariablen 211
- explizite Form einer Geradengleichung 60
- Exponentialfunktion 79
- exponentielles Modell **103**, 104
- Extrempunkte berechnen 136

**F**

- Formel 15
  - als Funktion schreiben 92
  - Erstellen einer 16
  - Umformen einer 19
- Frequenz 85
- Funktion
  - durch eine Formel definierte 92
  - lineare 59
  - periodische 85
  - reelle 53

**G**

- Gauß'sche Glockenkurve 217
- Gegenereignis 195
- Gegenkathete 43
- Gerade
  - in der Ebene und im Raum 37
  - Lagebeziehung zweier Geraden 37
  - Parameterdarstellung **37**, 38
- Geradengleichung **37**, 38
  - explizite Form 60
- gewichtetes Mittel 189
- Gleichung
  - einer Geraden **37**, 38
  - höheren Grades 25

- Gleichungen zum Auffinden der Parameter einer Polynomfunktion 146
- Gleichungssystem 27
  - Lösungsmenge 27
- globales Minimum/Maximum 53
- Grad einer Polynomfunktion **135**, 145
- Grundraum **195**, 196

**H**

- Halbebene 11
- Halbwertszeit **103**, 107
- Häufigkeit
  - absolute **183**, 184
  - relative **183**, 184
- Hypotenuse 43

**I**

- indirekte Proportionalitätsfunktion 69
- Integral
  - bestimmtes 165
  - Interpretation von Ausdrücken 178
  - unbestimmtes 155
- Integrationsgrenzen 165
- Integrationskonstante 155
- Integrationsregeln 155

**K**

- Konfidenzintervall **221**, 222
- Kreisdiagramm 183

**L**

- Lagebeziehung zweier Geraden 37
- Länge eines Pfeils = Betrag eines Vektors
- Laplace-Wahrscheinlichkeit 195
- lineare Differenzengleichung 113
- lineare Funktion 59
  - Steigung 59
- lineare Ungleichung 11
- lineares Gleichungssystem 27
- lineares Modell **97**, 98
  - Interpretation der Parameter 97
  - Überprüfung 97
- lokale Extrempunkte 53
- lokale Extremstellen berechnen 136
- lokales Minimum/Maximum 53
- Lösungsformel 21
- Lösungsmenge
  - eines Gleichungssystems 27
  - einer Ungleichung **11**, 12

**M**

Median 183, **189**  
 Mittelpunkt 31  
 mittlere Änderungsrate 125  
 Modus 189  
 momentane Änderungsrate 125  
 monoton fallend/steigend 53  
 Monotonie(verhalten) **53, 54**

**N**

negative Funktion 53  
 NEWS-Regel 135  
 Normalvektor 37  
 Normalvektorform 37  
 Normalverteilung 217  
 Nullstelle 53  
 Nullstellen berechnen 136

**O**

Obersumme **165, 166**

**P**

Parameter einer Funktion 59  
 Periode 85  
 Periodenlänge 85  
 periodische Funktion 85  
 Pfadregeln 195  
 Phasenverschiebung **85, 86**  
 physikalische Größen 177  
 Polynomfunktion **135**  
 – Grad **135, 145**  
 positive Funktion 53  
 Potenzfunktion 69  
 Proportionalitätsfunktion  
 – direkte 59, **69**  
 – indirekte 69  
 Prozentstreifen 183  
 Punktsymmetrie von Funktions-  
 graphen 91

**Q**

quadratische Gleichung 21  
 Quartil 183

**R**

reelle Funktion 53  
 relative Änderung 125  
 relative Häufigkeit **183, 184**  
 Restkapazität 113

**S**

Sattelpunkte berechnen 136  
 Säulendiagramm 183  
 Schätzwert für eine Wahrscheinlich-  
 keit 199  
 Schließende Statistik 221  
 Schnittmenge 7  
 Schnittmenge (= Menge aller  
 Schnittpunkte) 27  
 Schnittpunkte von Funktions-  
 graphen 91  
 Schranke 113  
 Sicherheit (Konfidenzintervall) **221,**  
**222**  
 $\sigma$ -Umgebung = symmetrisches  
 Intervall (um  $\mu$ )  
 Sinus 43  
 Sinusfunktion 85  
 Spannweite **183, 189**  
 Stammfunktion 155  
 – grafisch ermitteln 189  
 – rechnerisch ermitteln 156  
 Standardabweichung 189  
 – einer binomialverteilten  
 Zufallsvariablen 211  
 Stängel-Blatt-Diagramm 186  
 Steigung einer linearen Funktion 59  
 Steigung einer Funktion berechnen  
 135  
 Steigungsformel 59  
 Steigungswinkel 43  
 Stichprobe 221  
 streng monoton fallend/steigend 53  
 Streuungsmaße 189  
 symmetrisches Intervall (um  $\mu$ ) **217,**  
**225**

**T**

Tangens 43  
 Teilmenge 7  
 Teilungspunkt 37  
 Term 15

**U**

unbestimmtes Integral 155  
 Ungleichung  
 – elementare 11  
 – lineare 11  
 – Lösungsmenge einer **11, 12**  
 Untersumme **165, 166**

**V**

Vektor 31  
 – Betrag 31  
 – Länge eines Pfeils 31  
 – Normalvektor 37  
 – Rechnen mit Vektoren **31, 32**  
 Vereinigungsmenge 7

**W**

Wachstums- und Abnahmeprozesse  
 – konstante absolute Änderung  
 97  
 – konstante relative Änderung  
 103  
 Wachstumsfaktor 79  
 – eines exponentiellen Modells  
 103  
 Wahrscheinlichkeit 195  
 – Schätzwert 199  
 Wahrscheinlichkeitsverteilung 205  
 Wendepunkte berechnen 136  
 Winkelformeln (sin, cos, tan) 43  
 Wurzelfunktion 91

**Z**

Zahlengerade 11  
 Zahlenmengen ( $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) 7  
 Zentralmaße **189, 190**  
 Zufallsexperiment 195  
 Zufallsvariable 205  
 – normalverteilte 217  
 Zufallsversuch 195  
 $\sigma$ -Umgebung **217, 218**

Nur zu Prüfzwecken –  
Eigentum des Helbling Verlags



## Mit MatheTutor meisterst du die Mathematik-Matura!

**Dein MatheTutor** bietet dir alles, was du zum Verstehen, Erlernen und Anwenden aller Grundkompetenzen benötigst: Damit hast du die Mathematik-Matura in der Tasche!

Mit über **600 Aufgaben und Beispielen** zum Teil 1 der Matura wiederholst du von Grund auf den wesentlichen Stoff und frischst gezielt dein Wissen auf. Aber dein **MatheTutor** ist viel **mehr als eine Aufgabensammlung**:

1. **Informiere dich** zu Beginn jedes Kapitels über benötigte Grundlagen und praktische Werkzeuge für die anstehenden Aufgaben.
2. **Vollziehe nach**, wie du typische Aufgaben meisterst. Musterbeispiele weisen dir den Weg.
3. **Probiere selbst** eine solche Aufgabe zu lösen. Dabei kannst du dich am entsprechenden Musterbeispiel orientieren.
4. **Trainiere weiter** und lerne weitere Aufgabentypen kennen, natürlich mit Hilfestellungen. So gewinnst du nach und nach die nötige Sicherheit.
5. **Teste dich** selbst anhand von Aufgaben – authentisch und ganz im Stil von Teil 1 der Matura!

Weiters findest du online:

- **Ausführliche Lösungen** mit Hinweisen und Erklärungen – auch zum Technologieeinsatz
- **Zusätzliche Probiere selbst-Aufgaben**
- **Alle Modellschritte** an einer Stelle als praktisches Hilfsmittel beim Lernen und Üben