

GOTTLOB FREGE

Nachgelassene Schriften
und
Wissenschaftlicher Briefwechsel

Herausgegeben von

HANS HERMES
FRIEDRICH KAMBARTEL
FRIEDRICH KAULBACH

ERSTER BAND

Nachgelassene Schriften



FELIX MEINER VERLAG HAMBURG

GOTTLOB FREGE

Nachgelassene Schriften

Unter Mitwirkung von
GOTTFRIED GABRIEL und WALBURGA RÖDDING
bearbeitet, eingeleitet und mit
Anmerkungen versehen von

HANS HERMES
FRIEDRICH KAMBARTEL
FRIEDRICH KAULBACH

*Zweite, revidierte Auflage,
erweitert um einen Anhang*

Nachschrift einer Vorlesung
und
Protokolle mathematischer Vorträge Freges
eingeleitet von **LOTHAR KREISER**
unter Mitwirkung von **GÜNTER GROSCHÉ**



FELIX MEINER VERLAG HAMBURG

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes, inhaltlich mit der ursprünglichen Ausgabe identisches Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abweichungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet sind. Weitere Informationen unter: www.meiner.de/bod

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

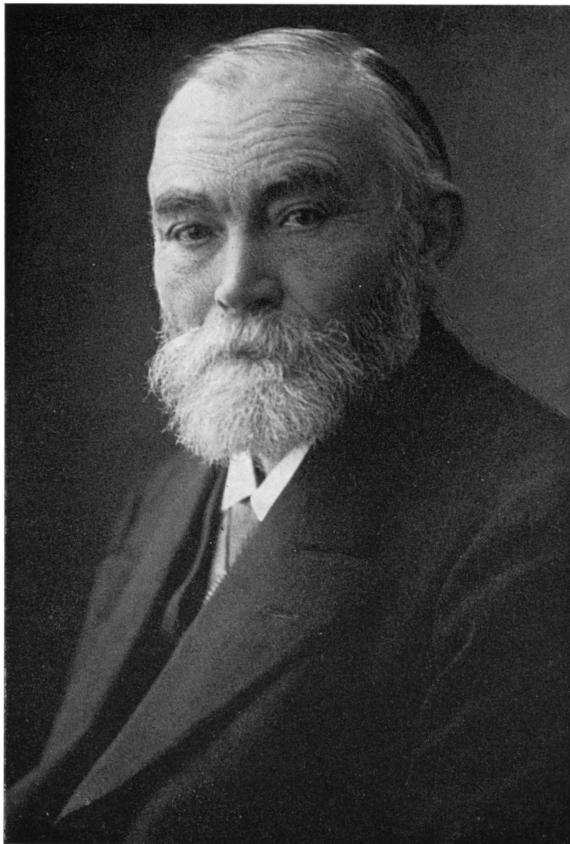
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://portal.dnb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7873-0490-5

ISBN eBook: 978-3-7873-3159-8

Zweite, erweiterte Auflage 1983

© Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 1983. Alle Rechte vorbehalten.
Dies gilt auch für Vervielfältigungen, Übertragungen, Mikroverfilmungen
und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen, so-
weit es nicht §§ 53 und 54 UrhG ausdrücklich gestatten. Gesamtherstellung:
BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier,
hergestellt aus 100 % chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany.
www.meiner.de



Gottlob Frege

1848–1925

INHALTSVERZEICHNIS

Verwendete Abkürzungen	VI
Vorwort zur zweiten Auflage	VII
Einleitung	IX
I. Zur Begriffsschrift und zur Begründung der Arithmetik (H. Hermes)	IX
II. Zur Formalismuskritik und zum Logikbegriff Freges (F. Kambartel)	XVII
III. Der neue Ansatz und die geometrische Erkenntnisquelle (F. Kaulbach)	XXV
Geschichte des Frege-Nachlasses und Grundsätze für seine Edition	XXXIV

Gottlob Frege, Nachgelassene Schriften*)

Logik	1
Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift	9
Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift	53
[Dialog mit Pünjer über Existenz]	60
[Entwurf zu einer Besprechung von Cantors Gesammelten Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten]	76
Über den Begriff der Zahl	81
[1. Eine kritische Auseinandersetzung mit Biermann]	81
[2. Eine kritische Auseinandersetzung mit Kerry]	96
[Ausführungen über Sinn und Bedeutung]	128
Logik	137
Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens	164
Logische Mängel in der Mathematik	171
Über Euklidische Geometrie	182
[Notizen Freges zu Hilberts „Grundlagen der Geometrie“]	185
[17 Kernsätze zur Logik]	189
Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre	191
Was kann ich als Ergebnis meiner Arbeit ansehen?	200
Einleitung in die Logik	201
Kurze Übersicht meiner logischen Lehren	213
Logik in der Mathematik	219
Meine grundlegenden logischen Einsichten	271

* Überschriften in eckigen Klammern sind von den Herausgebern gebildet.

[Aufzeichnungen für Ludwig Darmstaedter]	273
Logische Allgemeinheit	278
[Tagebucheintragungen über den Begriff der Zahl]	282
Zahl	284
Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften	286
Zahlen und Arithmetik	295
Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik	298
Bibliographie der Werke Freges	303
Sach- und Personenregister	315
Anhang: Nachschrift einer Vorlesung und Protokolle mathematischer Vorträge Freges	325

VERWENDETE ABKÜRZUNGEN

Seitenangaben ohne weiteren Hinweis beziehen sich auf diesen Band, Ziffern in Winkelklammern < > auf Nummern der Bibliographie.

<i>Briefwechsel</i>	= Wissenschaftlicher Briefwechsel <104>
<i>BS</i>	= Begriffsschrift <4>
<i>BuG</i>	= Ueber Begriff und Gegenstand <17>
<i>FB</i>	= Function und Begriff <14>
<i>GGA I/II</i>	= Grundgesetze der Arithmetik I <19>/II <26>
<i>GLA</i>	= Die Grundlagen der Arithmetik <9>
<i>SB</i>	= Über Sinn und Bedeutung <16>

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Text und Herausgeberapparat wurden für die zweite Auflage auf Druckfehler und notwendige Änderungen durchgesehen. Die Bibliographie der Werke Freges wurde auf den neuesten Stand gebracht. Eine Reihe von Berichtigungen und Ergänzungen gehen auf aufmerksame Leser und Rezessenten zurück. Ihnen, die nicht im einzelnen genannt werden können, sind die Herausgeber sehr zu Dank verpflichtet. Der besondere Dank der Herausgeber gilt ferner Wolfgang Mayer und Andrea Birk für die Vervollständigung der Bibliographie und Prof. Dr. Gottfried Gabriel für die Durchsicht und Korrektur des Textes.

Neu aufgenommen sind eine Nachschrift einer Vorlesung Freges über analytische Geometrie und Protokolle mathematischer Vorträge Freges. Diese Materialien wurden von L. Kreiser in der Universitätsbibliothek Jena aufgefunden (vgl. dazu die Übersicht von I. Kratzsch, *Material zu Leben und Wirken Freges aus dem Besitz der Universitätsbibliothek Jena*; in: „*Begriffsschrift*“. *Jenaer Frege-Konferenz, 7.–11. Mai 1979*. Friedrich-Schiller-Universität Jena 1979, pp. 534–546). Die Herausgeber danken Prof. Dr. Lothar Kreiser für die Einwilligung, seine Bearbeitung der Texte dem vorliegenden Band als Anhang einzugliedern, sowie Prof. Dr. Christian Thiel für vorbereitende Bemühungen. Der Anhang wird vom Register, das der ersten Auflage entnommen ist, nicht erfaßt.

Juni 1982

Hans Hermes
Friedrich Kambartel
Friedrich Kaulbach

EINLEITUNG

Im Folgenden geben die Herausgeber in drei Abschnitten eine kurze Charakteristik der Gedankenwelt Freges. Dabei wird der Nachlaß besonders berücksichtigt. Der erste Abschnitt enthält eine gedrängte Darstellung der von Frege eingeführten Formelsprache auf der Basis der Fregeschen Ontologie. Ferner wird auf den Fregeschen Versuch eingegangen, die Arithmetik als Zweig der Logik zu begründen. – Der zweite Abschnitt beschäftigt sich vor allem mit den sprach- und definitionstheoretischen Überlegungen Freges. Besonderes Augenmerk wird hier weiter der Auseinandersetzung Freges mit Hilbert, sowie Freges Logikbegriff gewidmet. – Der dritte Abschnitt erörtert im wesentlichen die philosophischen Motive, die den späten Frege dazu führen, angesichts der bekannten Antinomie die Arithmetik nicht mehr aus der Logik, sondern aus der „geometrischen Erkenntnisquelle“ entspringen zu lassen.

I. Zur Begriffsschrift und zur Begründung der Arithmetik

Die Wissenschaft verdankt Frege die erste formalisierte Sprache (Schrift), die sich – wie die meisten heute aufgebauten formalen Sprachen – verhältnismäßig eng an die in der Mathematik gebräuchliche „Umgangssprache“ anschließt. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die Fregesche Sprache von der Booleschen Algebra der Logik. In beiden Fällen handelt es sich um den Versuch, das Leibnizische Projekt einer *characteristica universalis* zu realisieren.¹⁾

Diese Sprache sieht Frege auf dem Hintergrund einer Ontologie, welche er in einem präzisen System mit scharfen Unterscheidungen entwickelt. Im Zusammenhang mit Problemen der Symbolisierung, d. h. der Übertragung umgangssprachlicher Aussagen in die formale Sprache, hat er sich auch um die Aufklärung von logisch relevanten Sprachphänomenen verdient gemacht. Die Haupttriebfeder zur Entwicklung einer formalen Sprache war für Frege die Absicht, die Arithmetik in einwandfreier Weise aufzubauen. Diese Bemühungen gipfeln in seinem zweibändigen Hauptwerk *Grundgesetze der Arithmetik*. Leider hat es sich gleichzeitig mit dem Erscheinen des zweiten Bandes herausgestellt, daß die Grundlagen seiner Logik nicht widerspruchsfrei waren. Es ist Frege in den letzten zwanzig Jahren seines Lebens nicht gelungen, diesen Widerspruch in zufriedenstellender Weise zu beseitigen.

In den folgenden Zeilen soll zum leichteren Verständnis des Nachlasses das von Frege eingeführte formale System auf der Grundlage seiner Ontologie in

¹⁾ Zum Unterschied zwischen der Begriffsschrift und der Algebra der Logik vgl. die Ausführungen pp. 13 ff.

den wesentlichen Zügen kurz dargestellt und auf die Fregesche Theorie der Arithmetik¹ eingegangen werden. Dabei findet sich wiederholt Gelegenheit, auf relevante Stellen des Nachlasses zu verweisen.

1. Der Aufbau der Fregeschen Sprache. Frege hat in einem 1879 erschienenen Büchlein mit dem Titel *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* eine formale Sprache entworfen und diese Sprache in vervollkommneter Form in Band 1 der *Grundgesetze der Arithmetik* 1893 dargelegt. Die Notwendigkeit zum Aufbau einer solchen formalen Sprache sieht Frege in der fehlenden Genauigkeit der Umgangssprache. In der Umgangssprache kann man vieles ausdrücken, was für das logische Schließen ohne Belang ist. Nur das, was hierfür relevant ist, der „begriffliche Inhalt“, soll in der Formelsprache nachgebildet werden. So erklärt sich die Bezeichnung „Begriffsschrift“. Nach Frege darf man sich bei dem Aufbau einer derartigen Schrift nicht zu sehr (wie es die traditionelle Logik tut) von der Umgangssprache und einer hierzu geschaffenen Grammatik beeinflussen lassen.

Die Begriffsschrift muß zu der Ontologie passen. Frege hat eine spezielle Ontologie ersonnen, die im folgenden skizziert werden soll. Alles, was es gibt, ist *Funktion* oder *Gegenstand*. Die Gegenstände sind gesättigt, die Funktionen ungesättigt, ergänzungsbedürftig. Eine Funktion hat eine Argumentstelle oder mehrere Argumentstellen. Eine einstellige Funktion wird durch ein Argument, eine mehrstellige Funktion durch entsprechend viele Argumente (welche den einzelnen Argumentstellen zugeordnet sind) ergänzt, gesättigt, und zwar zu ihrem Wert, der immer ein Gegenstand ist. Frege unterscheidet verschiedene Sorten von Funktionen im Hinblick auf die Zahl ihrer Argumente und mit Rücksicht darauf, welche Art von Gegenständen bzw. Funktionen für die einzelnen Argumente zugelassen ist. Im einfachsten Fall hat man *Funktionen erster Stufe mit einer Argumentstelle erster Art*, welche durch Gegenstände (und nur durch Gegenstände) ergänzt werden können. (Frege verlangt, daß *jeder* Gegenstand zur Ergänzung einer solchen Funktion dienen kann.) Dann hat man *Funktionen zweiter Stufe mit einer Argumentstelle zweiter Art*, welche durch Funktionen der soeben betrachteten Art ergänzt werden können. Eine kompliziertere Klasse bilden dann etwa zweistellige Funktionen, deren erste Argumentstelle durch Gegenstände und deren zweite Argumentstelle durch die vorhin betrachteten einfachsten Funktionen ergänzt werden können.

Spezielle Gegenstände sind die *Wahrheitswerte*. Es gibt deren zwei: *das Wahre* und *das Falsche*. Eine einstellige Funktion heißt ein *Begriff*, wenn sie nur Wahrheitswerte als Werte hat. Eine mehrstellige Funktion mit dieser Eigenschaft heißt eine *Beziehung*.

Jeder Funktion wird ein Gegenstand zugeordnet, welcher ihr *Wertverlauf* heißt. Der Wertverlauf eines Begriffs heißt *der Umfang des Begriffs*; der Wertverlauf einer Beziehung der Umfang dieser Beziehung. Zwei Funktionen haben genau dann denselben Wertverlauf, wenn sie für dieselben Argumente dieselben Werte haben.

Besonders wichtig sind insbesondere die folgenden Funktionen:

- (a) die zweistellige *Identitätsbeziehung*, deren Wert genau dann das Wahre ist, wenn beide Argumente gleich sind.
- (b) Der *Inhaltsbegriff*, dessen Wert genau dann das Wahre ist, wenn das Argument das Wahre ist.
- (c) Der *Verneinungsbegriff*, dessen Wert genau dann das Wahre ist, wenn das Argument nicht das Wahre ist.
- (d) Der zweistellige *Bedingungsbegriff*, dessen Wert immer das Wahre ist, abgesehen von dem Fall, daß das erste Argument das Falsche und das zweite Argument das Wahre ist.
- (e) Die *Allgemeinheitsbegriffe*. Im einfachsten Fall handelt es sich um einen Begriff, dessen Argumente Funktionen erster Stufe mit einer Argumentstelle erster Art sind. Der Wert dieses Begriffs ist genau dann das Wahre, wenn das Argument ein Begriff ist, der für jedes Argument das Wahre als Wert hat.
- (f) Die einstellige *Wertverlaufsfunktion*. Es handelt sich um eine Funktion zweiter Stufe mit einer Argumentstelle zweiter Art. Der Wert für ein beliebiges Argument, also für eine Funktion erster Stufe mit einer Argumentstelle erster Art, ist deren Wertverlauf.
- (g) Die einstellige *Kennzeichnungsfunktion*. Dies ist eine Funktion erster Stufe mit einer Argumentstelle erster Art, deren Wert für ein vorgegebenes Argument wie folgt festgelegt ist: (1) Wenn es einen Gegenstand gibt, derart, daß das Argument der Kennzeichnungsfunktion der Wertverlauf der einstelligen Funktion ist, welche man aus der Identitätsbeziehung dadurch erhält, daß man das erste Argument durch diesen Gegenstand ergänzt, so ist der Wert der Kennzeichnungsfunktion für das betrachtete Argument dieser Gegenstand. (2) In jedem anderen Falle ist der Wert der Kennzeichnungsfunktion gleich ihrem Argument.

Frege verwendet folgende Zeichen:

- = für die Identitätsbeziehung,
- für den Inhaltsbegriff,
- | für den Verneinungsbegriff,
- | für den Bedingungsbegriff,
- o für die Allgemeinheitsbegriffe,
- ' für die Wertverlaufsfunktion,
- \ für die Kennzeichnungsfunktion.¹⁾

Bei dem Symbol für den Bedingungsbegriff wird das erste Argument rechts oben, das zweite Argument rechts unten angegeben.

Frege wählt seine Sprache passend zu seiner Ontologie. Wir sind es heute gewohnt, die Ausdrucksbestimmungen für eine Sprache rein formal zu geben. Bei Frege ist dagegen der Sprachaufbau fortlaufend mit ontologischen Betrachtungen durchsetzt, so daß es nicht immer leicht ist, beides voneinander zu

¹⁾ Nicht alle diese Bezeichnungen kommen wörtlich bei Frege vor.

trennen. Im folgenden soll, um das Wesentliche des Fregeschen Sprachaufbaus hervorzuheben und dem Leser das Verständnis der im Nachlaß vorkommenden Formeln zu erleichtern, ein Teilstück der Fregeschen Sprache (eigentlich *Schrift*) aufgebaut werden. Dabei sollen zunächst, wie es heute allgemein üblich ist, (unter Verwendung der Fregeschen Symbole gebildete) nur lineare Zeichenreihen betrachtet werden. Der Übergang zur zweidimensionalen Fregeschen Schreibweise wird später vollzogen. Auf die Angabe der Fregeschen Klammer-Ersparungsregeln wird verzichtet. Um die Darlegungen technisch so einfach wie möglich zu machen, werden die Verknüpfungssymbole autonym bezeichnet; ferner soll kein Unterschied gemacht werden zwischen Variablen und Variablen für Variablen. Beim Aufbau der hier sog. Quasiformeln können die sog. gebundenen Variablen noch frei auftreten. Bei den eigentlichen Formeln ist dies nicht mehr der Fall. Nicht eingegangen wird auf folgende Eigentümlichkeiten: Frege läßt nicht zu, daß eine gebundene Variable im Wirkungsbereich des sie bindenden Operators nicht auftritt; er verbietet ferner, daß im Wirkungsbereich eines mit einer gebundenen Variablen auftretenden Operators dieser Operator mit derselben gebundenen Variablen wieder vorkommt.

Frege verwendet die soeben angegebenen Funktionszeichen, Klammern, sowie verschiedene Sorten von Variablen, wobei er im einzelnen noch zwischen freien und gebundenen Variablen unterscheidet. Insbesondere verwendet er als

freie Gegenstandsvariablen: a, b, \dots ,

gebundene Gegenstandsvariablen im Zusammenhang mit der Darstellung des Allgemeinheitsbegriffes: α, β, \dots ,

gebundene Gegenstandsvariablen im Zusammenhang mit der Darstellung der Wertverlaufsfunktion: $\alpha, \varepsilon, \dots$,

freie Variablen für Funktionen erster Stufe mit einem Argument erster Art:

f, g, \dots ,

gebundene Variablen für derartige Funktionen: $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \dots$.

Die *Quasiformeln* werden induktiv durch folgende Festsetzungen erklärt:

- (1) a ist eine Quasiformel. α ist eine Quasiformel. α ist eine Quasiformel.
- (2) Ist Φ eine Quasiformel, so auch $f(\Phi)$ und $\mathfrak{f}(\Phi)$.
- (3) Ist Φ eine Quasiformel, so auch $\neg\Phi$, $\perp\Phi$, $\vee\Phi$.
- (4) Sind Φ_1 und Φ_2 Quasiformeln, so ist auch $(\Phi_1 = \Phi_2)$ und $(\Phi_1 \mid \Phi_2)$ eine Quasiformel.¹⁾
- (5) Ist Φ eine Quasiformel, so auch $\cup\alpha\Phi$, $\cup\mathfrak{f}\Phi$ und $\alpha\Phi$.²⁾

Als Variable für Quasiformeln verwenden wir „ Φ “. Das freie Vorkommen einer beliebigen Variablen v in einer Quasiformel Φ wird induktiv so definiert:

¹ Der Übergang zu der Fregeschen Schreibweise der Implikation wird gleich unten vollzogen.

² Der Übergang zur Fregeschen Schreibweise wird unmittelbar anschließend vollzogen.

- (1') In v kommt v frei vor.
- (2'), (3') Falls v in Φ frei vorkommt, so auch in $f(\Phi)$, $\mathfrak{f}(\Phi)$, $\neg\Phi$, $\perp\Phi$, $\setminus\Phi$; ferner kommt f in $f(\Phi)$ und \mathfrak{f} in $\mathfrak{f}(\Phi)$ frei vor.
- (4') Falls v in Φ_1 oder in Φ_2 frei vorkommt, so auch in $(\Phi_1 = \Phi_2)$ und $(\Phi_1 \mid \Phi_2)$.
- (5') Falls v in Φ frei vorkommt, und verschieden ist von a , bzw. \mathfrak{f} bzw. α , so kommt v auch in $\cup a\Phi$, bzw. in $\cup \mathfrak{f}\Phi$ bzw. in $'\alpha\Phi$ frei vor.

Quasiformeln, in denen keine Variable a , keine Variable α und keine Variable \mathfrak{f} frei vorkommt, heißen *Formeln* oder *Ausdrücke*.

Übergang zur Fregeschen Bezeichnungsweise: Man schreibe

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \Phi &\text{ an Stelle von } \cup a\Phi \\ \textcircled{f} \Phi &\text{ an Stelle von } \cup \mathfrak{f}\Phi \\ \textcircled{\alpha} \Phi &\text{ an Stelle von } '\alpha \Phi \\ | \frac{\Phi_1}{\Phi_2} &\text{ an Stelle von } (\Phi_1 \mid \Phi_2) \end{aligned}$$

Die zuletzt eingeführte unhandliche zweidimensionale Schreibweise ist besonders charakteristisch für Frege und vermutlich dafür verantwortlich zu machen, daß sich seine Schrift nicht hat durchsetzen können.

Wir kommen vollends zu der eigentlichen Fregeschen Schreibweise, wenn wir eine graphische Verbindung verschiedener Funktionskonstanten einführen (vgl. hierzu *Grundgesetze der Arithmetik I*, §§6, 8, 12). Diese graphische Verbindung wird gerechtfertigt durch die Feststellung, daß die in der folgenden Tabelle jeweils links und rechts dargestellten Funktionen umfangsgleich sind:

$$\begin{array}{ll} \text{---} & \text{und} \quad \text{---}, \\ \text{--} & \text{und} \quad \perp, \\ \text{---} & \text{und} \quad \mid, \\ \text{---} & \text{und} \quad \setminus, \\ -\cup- & \text{und} \quad \cup. \end{array}$$

Frege schreibt daher insbesondere:

$$\begin{array}{ll} \text{---} & \text{für} \quad \perp, \\ \text{---} & \text{für} \quad \mid, \\ \text{---} & \text{für} \quad \setminus. \end{array}$$

Als primitive aussagenlogische Verbindungen hat Frege also nur die Negation und die Implikation:

$$\begin{array}{ll} \neg\Phi & \text{besagt dasselbe, wie} \quad \text{nicht } \Phi. \\ \text{---} & \text{für} \quad \mid, \\ \text{---} & \text{für} \quad \perp, \\ \text{---} & \text{für} \quad \setminus. \end{array}$$

Die Alternative und die Konjunktion werden bei Frege umschrieben:

$$\begin{array}{ll} \text{---} & \text{besagt dasselbe, wie} \quad \Phi_1 \text{ oder } \Phi_2 \text{ (nicht ausschließend).} \\ \text{---} & \text{besagt dasselbe, wie} \quad \Phi_1 \text{ und } \Phi_2. \end{array}$$

Als einzigen Quantor hat Frege die Generalisierung:

$\forall_a \Phi$ bzw. $\exists_f \Phi$ besagt dasselbe, wie *für alle a bzw. f: Φ* .

Die Partikularisierung wird umschrieben:

$\exists^a \Phi$ bzw. $\exists^f \Phi$ besagt dasselbe, wie *es gibt ein a bzw. f, derart daß Φ* .

Eine in einer Formel Φ vorkommende Gegenstandsvariable a ist bei der Deutung generalisiert zu denken. Um auszudrücken, daß eine Formel behauptet wird (wie z.B. die Sätze seiner Begriffsschrift), verwendet Frege einen kleinen senkrechten Strich, der in der Mitte mit dem folgenden waagerechten Strich verbunden wird. Dies ist der *Behauptungsstrich*. Ein *Beispiel*:

$\exists_a^a \Phi$ besagt dasselbe, wie „ a , wenn a “ wird behauptet.

In verschiedenen Stücken des Nachlasses beschäftigt sich Frege mit seiner Begriffsschrift. In vielen Beispielen zeigt er, wie man umgangssprachliche und vor allem mathematische Aussagen begriffsschriftlich darstellen kann. Hier sind zu nennen insbesondere die Abhandlung *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* (pp. 9 ff.), ferner *Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift* (pp. 53 ff.), *Dialog mit Pünjer über Existenz* (Auffassung und Symbolisierung von Existenzaussagen pp. 60 ff.), *Kurze Übersicht meiner logischen Lehren* (pp. 213 ff.) und *Logische Allgemeinheit* (Symbolisierung von Allaussagen pp. 278 ff.). In den beiden ersten zitierten Abhandlungen setzt sich Frege ausführlich mit den Vorzügen seiner Begriffsschrift vor der Formelsprache Boole auseinander. Er erkennt an, daß sich „die boolesche Logik durch systematische Durchbildung vor den abgerissenen Andeutungen Leibnizens“ auszeichne (p. 11), findet jedoch, daß bei der Begriffsschrift die Forderung, „daß das Verhältnis der Zeichen mit dem der Sachen in möglichstem Einklange stehe“, besser realisiert sei als in der Booleschen Formelsprache (p. 13). Nicht alles, was Frege ausdrücken kann, läßt sich in die Booleschen Zeichen übersetzen, während die umgekehrte Aussage zutrifft (p. 15). Auf pp. 16 f. kritisiert Frege die von Boole zur Begründung seiner Formalisierung eingeführten Zeitmomente. Er zeigt ausführlich (pp. 45 ff.), wie man eine bereits von Boole gestellte Aufgabe auch auf der Basis der Begriffsschrift systematisch lösen kann.

In *Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens* (pp. 164 ff.) befaßt sich Frege mit der Formelsprache von Peano und geht dabei vor allem ein auf den Unterschied zwischen einem generalisierten und einem nicht generalisierten Bedingungssatz. Dieser Unterschied kommt nach Ansicht Freges bei Peano nicht deutlich zum Ausdruck.

An mehreren Stellen beschäftigt sich Frege mit dem Begriff der Variablen. In diesem Zusammenhang unterscheidet er scharf zwischen Zeichen und Bezeichnetem und diskutiert seinen Funktionsbegriff (*Logische Mängel in der Mathematik* (pp. 171 ff.), *Einleitung in die Logik* (pp. 201 ff.)).

In den späten Nachlaßstücken finden sich Spuren der Auseinandersetzung Frege's mit der in seinem System herleitbaren Antinomie, die seine Bemühungen, die Arithmetik auf die Logik zu gründen, zunichte gemacht hat. Er sieht, daß die Ursache für die Antinomie in der von ihm entworfenen Ontologie zu

suchen ist, und beklagt, daß es schwer sei, sich nicht von der Sprache irreführen zu lassen (*Tagebucheintragungen über den Begriff der Zahl* (pp. 282f.), *Zahl* (pp. 284f.)). Er spricht aufgrund der selbstgemachten Erfahrung auch von einem „Kampfe“, den der Philosoph „mit der Sprache“ zu führen habe (*Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften*, p. 289). Als besonders kritisch sieht er an dieser Stelle seine grundlegende frühere Annahme an, daß jedem Begriff ein Gegenstand als sein Umfang entsprechen soll. Den grundlegenden Unterschied zwischen (gesättigten) Gegenständen und (ungesättigten) Funktionen hält er jedoch bis zuletzt für wesentlich (so z.B. in *Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre* (pp. 191 ff.), wo er eine von Schoenflies vorgeschlagene Auflösung der Russellschen Antinomie bespricht). –

2. Die Fregesche Theorie der Arithmetik. Schon im Vorwort seiner *Begriffsschrift* (1879) fragt Frege, ob man sich zur Begründung der arithmetischen Urteile auf Erfahrungstatsachen stützen müsse. Er stellt sich die Aufgabe, zu versuchen, wie weit man in der Arithmetik allein durch logische Schlüsse gelangen könne. Erneut greift er dieses Problem auf in dem Buch *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). Dort stellt er zunächst fest, daß eine Zahlangabe eine Aussage über einen Begriff sei. Sodann definiert er:

Einem Begriff (dessen Argumente Gegenstände sind) kommt die Zahl 0 zu, wenn kein Gegenstand unter diesen Begriff fällt, d.h., wenn jeder Gegenstand diesen Begriff zum Wahrheitswert des Falschen ergänzt.

Einem Begriff kommt die Zahl $(n+1)$ zu, wenn es einen Gegenstand a gibt, der unter diesen Begriff fällt, und wenn dem neuen Begriff, unter den ein Gegenstand genau dann fällt, wenn er bereits unter den ursprünglichen Begriff fällt aber verschieden ist von a , die Zahl n zukommt.

Durch die angegebenen Definitionen ist für jede konkret vorgegebene natürliche Zahl n erklärt, was es heißt, daß einem Begriff die Zahl n zukommt. Es ist damit aber noch keine Definition dafür gegeben, was unter einer natürlichen Zahl zu verstehen sei, und auch nicht dafür, was es heißt, Anzahl eines Begriffs zu sein. Um hierzu zu gelangen, analysiert Frege eine Methode, mit der man die Richtung in der Geometrie einführen kann, und geht analog dazu wie folgt vor. Er nennt zwei Begriffe gleichzahlig, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung gibt zwischen den Gegenständen, die unter den ersten, und den Gegenständen, die unter den zweiten Begriff fallen. Sodann bildet er, ausgehend von einem vorgegebenen Begriff F , einen abgeleiteten Begriff „gleichzahlig zu F “. Diesem Begriff G kann eindeutig ein Gegenstand zugeordnet werden, nämlich sein Umfang. Dieser Gegenstand heißt die *Anzahl von F*. Ganz allgemein heißt ein Gegenstand n eine *Anzahl*, wenn er in der angegebenen Weise gewonnen werden kann, d.h., wenn es einen Begriff F gibt von der Art, daß n die Anzahl von F ist. Bei der angegebenen Definition sind die unendlichen Anzahlen nicht ausgeschlossen. Die natürlichen Zahlen sind die *endlichen* Anzahlen. Es bleibt die Aufgabe, diese unter den Anzahlen auszuzeichnen. Hierzu dienen die vier folgenden Definitionen:

GOTTLOB FREGE

Nachgelassene Schriften

Logik.¹⁾

[zwischen 1879 und 1891]

A. Einleitung.

Wesen, Gegenstand.

Unterschied von Psychologie, Verwandtschaft mit der Ethik.
Methodisches.

B. Beurteilbarer Inhalt.

Verneinung. duplex negatio.

Verbindungen beurteilbarer Inhalte zu einem neuen. und, weder noch, und nicht usw.
Schlüsse.

C. Zerfallen eines Urteils. Begriff, Gegenstand.

Allgemeinheit. Bedingung, Folge. Oder. Unterordnung der Begriffe. Existentialurteil (Es gibt). Entfernung von Hilfsgegenständen. Partikuläre Schlüsse. Beziehungsbegiffe. Paare.

D. Definition der Begriffe.

Durch Merkmale. Verwickeltere.

E. Definition der Gegenstände.

Mittelbare durch Begriffe. Unmittelbare. Wiedererkennungsurteil.
Ungehöriges Existentialurteil.

[A. Einleitung.]

[2] Wahrheit. Urteilen. Behaupten.

Wahrheit unabhängig von unserer Anerkennung.

Berechtigende – nichtberechtigende Gründe unserer Anerkennung.

Letztere nach psychologischen Gesetzen, haben keine Beziehung zur Wahrheit.

[2f.] Wetteraberglaube ist erfahrungsmässig. Angabe solcher Gründe ist kein Beweis.

[3] Die rechtfertigenden Gründe liegen oft in anderen Wahrheiten.

¹⁾ Offenbar handelt es sich bei diesem Stück um das Fragment eines logischen Lehrbuches (cf. Freges Anm. p. 6). Von den Ankündigungen des Inhaltsverzeichnisses sind nur ein Teil A. *Einleitung* und der Anfang von B. *Beurteilbarer Inhalt* ausgeführt. Teil A hat Frege selbst stichwort- und thesenartig zusammengefaßt; die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf Seiten dieses Bandes.

In der Anm. auf p. 6 wird auf die BS (1879) verwiesen. In Abschnitt B des Inhaltsverzeichnisses verwendet Frege den Ausdruck „beurteilbarer Inhalt“. Diese Bezeichnung hat er spätestens in der ersten Hälfte des Jahres 1891 aufgegeben, wie sich aus

Schliessen. Gesetze des Schliessens aufzustellen, ist Aufgabe der Logik. Die Gegenstände der Logik sind unsinnliche wie die der Psychologie. Dennoch scharfe Grenze bezeichnet durch „wahr“. Die Logik betrachtet ihre Gegenstände sofern sie wahr sind. Was wahr ist, ist wahr unabhängig von dem, der es als wahr anerkennt, also nicht Erzeugnis einer inneren Tätigkeit.

- [4] Vergleich mit der Ethik.
 - [5] Bemerkung über Kunstausdrücke der Logik.
Abweisung psychologischer Unterscheidungen.
 - [6] Absonderung des Psychologischen, indem man es bewusst unterscheidet.
Warnung vor Verwechslung der Gesichtspunkte und Verschiebung der Fragestellung. Gefahr liegt in der Sprache. Übersetzung möglich?
ja, was den logischen Kern betrifft. Wert der Erlernung von Sprachen für die logische Ausbildung.
 - [6f.] Auch algebraische Formelsprache: Zerlegung des zusammengesetzten Logischen. Zurückführung der logischen Gesetze aufeinander.
-

Das Ziel des wissenschaftlichen Strebens ist *Wahrheit*. Indem wir etwas innerlich *als wahr anerkennen, urteilen* wir, und indem wir das Urteil äussern, behaupten wir.

Was wahr ist, ist wahr unabhängig von unserer Anerkennung. Wir können irren. Die Gründe unseres Urteilens können zur Anerkennung der Wahrheit berechtigen; sie können uns aber auch nur zum Urteilen veranlassen oder bestimmen, ohne eine Rechtfertigung zu enthalten. Obwohl jedes unserer Urteile ursächlich bedingt ist, so sind doch nicht alle diese Ursachen rechtfertigende Gründe. Indem eine empirische Richtung in der Philosophie diesen Unterschied nicht genügend beachtet, gelangt sie dazu, wegen der empirischen Veranlassungen unseres Denkens, alle unsere Erkenntnisse für empirische auszugeben. Die zum Urteilen nur veranlassenden Ursachen tun dies nach psychologischen Gesetzen; sie können ebenso wohl zum Irrtum wie zur Wahrheit führen; sie haben überhaupt keine innere Beziehung zur Wahrheit; sie verhalten sich zum Gegensatze von wahr und falsch gleichgültig. Die Logik scheidet sie von ihrem Gebiet aus. Der Landmann, dessen Wohl und Wehe mit dem Wetter eng verknüpft ist, sucht nach einer Möglichkeit der Vorausberechnung. Was Wunder, dass er die Gestalten des Mondes in Zusammenhang mit den Veränderungen des Wetters zu bringen sucht und sich fragt, ob nicht ein Umschlag des Wetters mit dem Eintritt des Vollmonds zu erwarten sei. Scheint sich dies zu bestätigen – und dies ist leicht möglich, da

einem Brief vom 24. 5. 1891 an *Husserl* ergibt. Daher ist das vorliegende Manuskript zwischen 1879 und 1891 zu datieren.

Frege hat später noch mehrfach zu einer *Logik* angesetzt: cf. auch die Fragmente pp. 137 ff., 201 ff. und die Ausführungen pp. XX ff.

das Wetter meistens nicht plötzlich ein anderes wird, und da es überhaupt nicht leicht zu sagen ist, ob das Wetter sich verändert hat – so glaubt er fortan an einen Zusammenhang des Wetters mit dem Monde, und dieser Glaube befestigt sich, indem alle günstigen Fälle mehr Eindruck machen und fester im Gedächtnis haften als die ungünstigen; er weiss das nun, wie er meint, aus Erfahrung. Es ist das die Erfahrung jener empirischen Richtung unter den Philosophen. Ähnlich geht es bei jedem Aberglauben zu. Man kann seine psychologischen Ursachen meist erkennen. Offenbar ist eine solche Erzählung, wie es zugegangen ist, dass Menschen etwas für wahr angenommen haben, kein Beweis, und es kann auch in der Wissenschaft die Geschichte der Entdeckung eines mathematischen oder Naturgesetzes die rechtfertigende Begründung nicht ersetzen. Diese wird immer ungeschichtlich sein; d.h. es wird dabei nicht darauf ankommen, wer sie zuerst gegeben hat, wodurch veranlasst er den glücklichen Gedankengang eingeschlagen hat, und wann und wo dies geschehen ist u.dgl.

Die Gründe nun, welche die Anerkennung einer Wahrheit rechtfertigen, liegen oft in anderen schon anerkannten Wahrheiten. Wenn aber überhaupt Wahrheiten von uns erkannt werden, so kann dies nicht die einzige Art der Rechtfertigung sein. Es muss Urteile geben, deren Rechtfertigung auf etwas anderem beruht, wenn sie überhaupt einer solchen bedürfen.

Und hier liegt die Aufgabe der Erkenntnistheorie. Die Logik hat es nur mit solchen Gründen des Urteilens zu tun, welche Wahrheiten sind. Urteilen, indem man sich anderer Wahrheiten als Rechtfertigungsgründen bewusst ist, heisst *schliessen*. Es gibt Gesetze über diese Art der Rechtfertigung, und diese Gesetze des richtigen Schliessens aufzustellen, ist das Ziel der Logik.

Die Gegenstände der Logik sind somit unsinnliche und sind in dieser Hinsicht ähnlich denen der Psychologie und stehen denen der Naturwissenschaft gegenüber. Auch die Triebe, die Vorstellungen usw. sind weder sichtbar noch tastbar. Dennoch besteht eine scharfe Grenze zwischen diesen Wissenschaften, und sie ist bezeichnet durch das Wort „wahr“. Die Psychologie hat nur wie jede andere Wissenschaft mit der Wahrheit zu tun, insofern ihr Ziel die Eröberung von Wahrheiten ist; aber sie betrachtet nicht die Eigenschaft „wahr“ an ihren Gegenständen wie die Physik die Eigenschaften „schwer“, „warm“ usw. an ihren Gegenständen ins Auge fasst. Dies tut die Logik. Es wäre wohl nicht unrichtig zu sagen, dass die logischen Gesetze nichts anderes sind als eine Entwicklung des Inhaltes des Wortes „wahr“. Wer die Bedeutung dieses Wortes nicht in ihrer Eigenart erfasst hat, kann auch über die Aufgabe der Logik nicht ins Klare kommen.

Für die Psychologie ist es gleichgültig, ob die Erzeugnisse seelischer Vorgänge, mit denen sie sich beschäftigt, wahr genannt werden können. Was wahr ist, das ist wahr unabhängig von dem, der es als wahr anerkennt. Was wahr ist, ist also nicht Erzeugnis eines seelischen Vorgangs oder einer inneren Tätigkeit; denn das Erzeugnis des Einen ist nicht das des Anderen, so ähnlich es ihm auch sein möge, ebenso wenig wie der Hunger des Einen der des Anderen, und ebenso wenig wie das Auge des Einen trotz aller Ähnlichkeit das des

Andern ist. Wir nehmen die Vorgänge in der Seele eines Anderen nicht unmittelbar wahr, sondern nur die Wirkungen, die sie in der Körperwelt haben. Wir können also selbst die Ähnlichkeit streng genommen nur oberflächlich beurteilen, da wir die von verschiedenen Menschen erlebten inneren Zustände nicht in *einem* Bewusstsein vereinigen und so vergleichen können. Wenn der Inhalt des Satzes $2 + 3 = 5$ für alle Menschen, die ihn als wahr anerkennen, genau und im strengsten Sinne derselbe ist, so ist damit gesagt, dass er nicht ein Erzeugnis der Seele Dieses ist und ein Erzeugnis der Seele Jenes, sondern dass er von Diesem erfasst und als wahr erkannt werde und ebenso von Jenem. Wenn nun auch dies Erfassen nicht ohne Vermischung mit Subjektivem geschehen mag, so wollen wir doch das „wahr“ nicht mit auf diese Zutaten beziehen.

Die Logik hat eine nähere Verwandtschaft mit der Ethik. Für diese hat die Eigenschaft „gut“ eine ähnliche Bedeutung wie für jene die Eigenschaft „wahr“. Obwohl unsere Handlungen und Strebungen alle ursächlich bedingt und psychologisch zu erklären sind, verdienen doch nicht alle gut genannt zu werden. Auch hier kann man von Rechtfertigung sprechen, und auch hier ist diese in der blossen Erzählung des Herganges nicht enthalten noch in dem Nachweise, dass es so und nicht anders hat kommen müssen. Es heisst zwar: Alles verstehen ist alles verzeihen; aber verzeihen kann man nur, was man für nicht gut hält.

Man wird zu solchen schiefen Auffassungen leicht dadurch verleitet, dass man als Aufgabe der Logik die Erforschung der Denkgesetze angibt, indem man unter diesem Ausdruck etwas den Naturgesetzen Entsprechendes versteht, also Gesetze, nach denen das wirkliche Denken vor sich geht, und durch welche man sich einen einzelnen Denkvorgang in einem bestimmten Menschen ebenso erklären könnte, wie man sich etwa die Bewegung eines Planeten durch das Gravitationsgesetz erklärt. Die Gesetze des wirklichen Schliessens sind nicht durchweg Gesetze des richtigen Schliessens; denn dann wären Fehlschlüsse unmöglich.

In unserer Zeit, da die Entwicklungslehre ihren Siegeszug durch die Wissenschaften hält und die geschichtliche Auffassung aller Dinge die ihr zukommenden Grenzen zu überschreiten droht, muss man sich auf Fragen befreundlicher Art gefasst machen. Wenn sich der Mensch wie alle Lebewesen entwickelt und weiter entwickelt hat, haben dann die Gesetze seines Denkens immer Geltung gehabt und werden sie immer Geltung behalten? Wird ein Schluss, der jetzt richtig ist, nach Jahrtausenden noch richtig sein und ist er vor Jahrtausenden schon richtig gewesen? Offenbar liegt hier eine Vermengung der Gesetze des wirklichen Denkens und der des richtigen Schliessens vor. Sehen wir uns die Sache etwas genauer an. Gesetze in dem Sinne, wie wir von Naturgesetzen, psychologischen, mathematischen oder logischen Gesetzen sprechen, können sich genau genommen überhaupt nicht ändern. Denn ein solches Gesetz, vollständig ausgesprochen, muss alle seine Bedingungen enthalten und nun unabhängig von Ort und Zeitpunkt gelten. Das Trägheitsgesetz z.B. macht Anspruch auf unbeschränkte Geltung dem Raume

und der Zeit nach. Wenn es etwa in der Gegend des Sirius keine Geltung zu haben schiene, so wäre zu vermuten, dass es noch nicht vollständig ausgesprochen wäre, indem eine Bedingung vergessen wäre, welche hier erfüllt, in der Gegend des Sirius aber nicht erfüllt wäre. Eine eigentliche Bedingung enthält immer etwas Unbestimmtes und kann daher, je nachdem dies so oder anders bestimmt wird, zu einem wahren oder falschen Satze werden. Ebenso: wenn nach einiger Zeit das Trägheitsgesetz nicht mehr zu gelten schiene, so wäre das ein Anzeichen dafür, dass noch eine Bedingung hinzuzufügen wäre, welche früher erfüllt, später nicht mehr erfüllt wäre. Ebenso müsste man die Sache bei der angeblichen Veränderung der Denkgesetze auffassen; sie könnte nur scheinbar sein und wäre ein Anzeichen für die Unvollständigkeit unserer Kenntnisse von ihnen. Will man dabei nun unter Denkgesetzen die logischen verstehen, so sieht man leicht das Ungereimte einer Bedingung, die sich etwa auf den Phosphorgehalt unseres Gehirns oder auf sonst etwas Veränderliches am Menschen bezöge. Es könnte sich dann leicht ereignen, dass bei einigen Menschen eine solche Veränderung schon vor sich gegangen wäre, bei anderen nicht, und dass infolgedessen für einige Menschen aus gewissen Wahrheiten das Entgegengesetzte folgte als für andere. Dies ist durchaus dem Wesen eines logischen Gesetzes, weil dem Sinne des Wortes „wahr“, widersprechend, welcher die Bezugnahme auf den Erkennenden verbietet.

Wenn man dagegen unter Denkgesetzen psychologische Gesetze versteht, so ist die Möglichkeit nicht von vornherein abzuweisen, dass sie etwas mit Zeit und Raum Wechselndes enthalten, dass demnach das Denken jetzt anders vorgeht als vor 3000 Jahren.

Wie jede Wissenschaft hat auch die Logik ihre Kunstausdrücke, Wörter, welche z.T. auch in der nichtwissenschaftlichen Sprache, aber nicht ganz in demselben Sinne gebraucht werden. Es kommt bei der Feststellung der Bedeutung auch gar nicht darauf an, den Sprachgebrauch genau zu treffen oder der Ableitung¹⁾ gerecht zu werden, sondern das Wort möglichst geeignet für den Ausdruck der Gesetze zu machen. Umso geeigneter aber ist ein Ganzes von Kunstausdrücken, je kürzer es die gesamte Gesetzmässigkeit genau zum Ausdruck bringen kann.

Aus der Aufgabe der Logik kann gefolgert werden, dass alles abzuweisen ist, was nicht nötig ist, um die Gesetze des richtigen Schliessens aufzustellen. Insbesondere sind in der Logik alle Unterscheidungen zu verwerfen, die nur von psychologischen Gesichtspunkten aus gemacht werden und für das Schliessen gleichgültig sind. So unterscheidet man in der reinen Mechanik die Stoffe nicht nach ihren chemischen Eigenschaften, sondern spricht nur von „Masse“ und physischem Körper, damit man nicht statt des einen Trägheitsgesetzes etwa für jeden chemisch verschiedenen Stoff ein besonderes aufstellen müsste. Man unterscheide also nur da, wo es für den Zweck von Nutzen ist. Die sogenannte psychologische Vertiefung ist nichts als psycho-

¹ Hier ist „Ableitung“ im etymologischen Sinne gemeint.

logische Verfälschung der Logik. Im naturwüchsigen Denken haben wir Psychologisches und Logisches miteinander verwachsen. Es ist nun gerade die Aufgabe, das Logische rein herauszusondern. Dabei kommt es nicht darauf an, im wirklichen Denken das Psychologische ganz zu verbannen, was unmöglich sein würde, sondern nur sich der logischen Berechtigung dabei bewusst zu werden. Die geforderte Trennung des Logischen von dem Psychologischen besteht demnach nur in der bewussten Unterscheidung. Deshalb kann nicht dringend genug vor einer Verwechslung der Gesichtspunkte und einer Verschiebung der Fragestellung gewarnt werden, eine Gefahr, die umso näher liegt, als wir in irgendeiner Sprache zu denken pflegen, und weil die Grammatik, welche für das Sprechen eine ähnliche Bedeutung hat wie die Logik für das Denken, Psychologisches und Logisches miteinander vermischt. Sonst müssten alle Sprachen dieselbe Grammatik haben. Kann man in verschiedenen Sprachen denselben Gedanken ausdrücken? Unzweifelhaft, soweit es sich um den logischen Kern handelt; denn sonst wäre eine Gemeinsamkeit des Geisteslebens der Menschheit ausgeschlossen. Wenn man aber die psychologische Schale mit hinzunimmt, so ist eine genaue Übersetzung unmöglich; ja man kann sogar zweifeln, ob diese Umhüllung bei irgend zwei Menschen genau entsprechend sei. Man erkennt hieraus den Wert der Erlernung fremder Sprachen für die logische Ausbildung; denn indem sich die Einkleidung des Gedankens verschieden erweist, sondert sie sich im Bewusstsein von dem Kerne, mit dem sie doch in jeder einzelnen Sprache untrennbar verwachsen erscheint. So wird durch die Verschiedenheit der Sprachen die Schwierigkeit für das Erfassen des Logischen vermindert; aber völlig beseitigt wird sie auch dadurch noch nicht, und unsere Logiken schleppen immer noch manches mit, was den Grammatiken wenigstens der uns näher liegenden Sprachen gemeinsam ist, ohne deshalb eigentlich logisch zu sein. Daher ist auch die Bekanntschaft mit einem Ausdrucksmittel ganz anderer Art von Nutzen, wie z.B. die algebraische Formelsprache*) eins ist.

Aber auch wenn wir das Logische aus einer sprachlichen Form oder Wendung oder Verbindung rein abgesondert haben, ist unsere Aufgabe noch nicht beendet. Das Logische, was wir erhalten, wird sich im allgemeinen als zusammengesetzt erweisen; wir müssen es zerlegen, denn hier wie überall gelangt man zur vollen Einsicht nur durch das Vordringen bis auf das Einfachste. Auch in dieser Hinsicht hangen der Logik von Sprache und Grammatik her noch manche Mängel an. Die logischen Gesetze sind selber Wahrheiten, und es erhebt sich hier wieder die Frage nach der Berechtigung des Urteils. Wenn diese nicht auf Wahrheiten beruht, so braucht sich die Logik nicht weiter darum zu kümmern. Wenn dagegen ein logisches Gesetz durch Schlüsse auf andere zurückführbar ist, so ist es offenbar Aufgabe der Logik, diese Zurück-

* Auch meine Begriffsschrift möchte hier zu nennen sein. Ich würde nicht imstande sein, diese Logik zu schreiben, wenn nicht die Bemühung um eine Begriffsschrift vorausgegangen wäre.

führung auszuführen; denn nur so kann man dahin gelangen, den Bestand an logischen Gesetzen zu übersehen, ohne dasselbe mehrfach zu rechnen¹⁾.

Es ist also, um es kurz zusammenzufassen, das Geschäft des Logikers ein fortwährender Kampf gegen das Psychologische und zum Teil gegen Sprache und Grammatik, insofern sie das Logische nicht rein zum Ausdruck bringen. Nicht die Frage hat er zu beantworten: wie geht das Denken beim Menschen in der Regel vor? welches ist der *natürliche* Verlauf in der menschlichen Seele? Was dem einen natürlich ist, kann sehr leicht einem anderen unnatürlich sein. Darauf weist schon die grosse Verschiedenheit der Grammatiken hin. Keinen Vorwurf braucht der Logiker weniger zu scheuen als den, dass seine Aufstellungen nicht naturgemäß seien, dass das wirkliche Denken anders vor sich gehe. Wenn einem ungeschulten Kopfe die Anfangsgründe der Mathematik in möglichst strenger logischer Form beigebracht werden sollen, so findet er das regelmässig sehr unnatürlich und gerade wegen dieser logischen Strenge. Die Folge ist, dass das Gelehrte gar nicht oder nur mangelhaft aufgefasst wird. Man muss daher von der Strenge zunächst etwas nachlassen und erst allmählich das Bedürfnis dafür zu erwecken suchen. Auch in der Geschichte der Mathematik finden wir, dass die grösste Strenge immer das Letzte ist. Wenn man dergleichen Einwürfe beachten wollte, käme man in Gefahr, sich in endlose Streitigkeiten zu verwickeln über das, was natürlich ist, Streitfragen, die auf dem Gebiete der Logik gar nicht entschieden werden können und also auch gar nicht in die Logik gehören, deren endgültige Beantwortung vielleicht überhaupt unmöglich oder doch erst durch die Beobachtung der Naturvölker und durch die Sprachwissenschaft möglich ist.

[B.] Beurteilbarer Inhalt.²⁾

Indem wir etwas innerlich als wahr anerkennen, urteilen wir. Ein beurteilbarer Inhalt ist demnach z.B. der Inhalt der Gleichung $2 + 3 = 5$. Er ist, wie wir gesehen haben, nicht Ergebnis eines inneren Vorganges oder Erzeugnis einer geistigen Tätigkeit des Menschen, sondern etwas Objektives, das soll heissen, etwas, was für alle Vernunftwesen, für alle, die es zu fassen vermögen, genau dasselbe ist, wie etwa die Sonne etwas Objektives ist. Aber ist sie nicht vielleicht für einige Menschen eine gütige oder verderbliche Gottheit, für andere eine glänzende Scheibe, die von Osten her den Himmel hinaufgeworfen nach Westen wieder herunterrollt, für andere endlich ein ungeheurer kugelähnlicher weissglühender Körper von einer glühenden Gasfülle umgeben? Nein. Dem einen mag sie so, dem anderen anders *erscheinen*; sie *ist*, was sie ist.

¹ Dabei ist grundsätzlich zu bemerken, daß es je nach den zugrunde gelegten „Schlüssen“ verschiedene Darstellungen der Logik geben wird. Cf. dazu auch *BS*, pp. 25f.

² Cf. p. 1, Anm. 1.

Ehe wir urteilen, fragen wir oft. Der Mathematiker spricht einen Satz für sich aus, bevor er ihn beweisen kann. Der Physiker nimmt hypothetisch ein Gesetz an, um es an der Erfahrung zu prüfen. Wir erfassen den Inhalt der Wahrheit, ehe wir ihn als wahr anerkennen, aber nicht bloss diesen, sondern auch den entgegengesetzten; denn bei der Frage schwanken wir zwischen Gegensätzen. Obwohl durch die Sprache*) gewöhnlich nur die eine Seite ausgedrückt wird, so ist die andere doch von selbst immer da; denn es bleibt der Sinn der Frage derselbe, wenn wir hinzufügen: „oder nicht?“, und eben dadurch wird diese Sparsamkeit der Sprache möglich. Was nun so in Frage gestellt werden kann, wollen wir beurteilbaren Inhalt nennen. „Beurteilbarer Inhalt“ ist also der Inhalt jeder Wahrheit, aber auch der entgegengesetzte. Dieser Gegensatz oder Widerstreit ist so zu verstehen, dass wir das eine Glied von selbst als falsch verwerfen, wenn wir das andere als wahr anerkennen und umgekehrt. Die Verwerfung des einen und die Anerkennung des anderen sind dasselbe.

* Es ist hier natürlich nur von der Satzfrage, nicht von der Wortfrage die Rede.