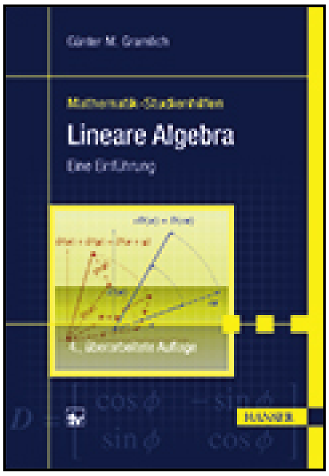
HANSER



Leseprobe

Günter M. Gramlich

Lineare Algebra

Eine Einführung

ISBN (Buch): 978-3-446-44140-8

ISBN (E-Book): 978-3-446-44103-3

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44140-8

sowie im Buchhandel.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Vorlesungen zur *Linearen Algebra* gehören zu den Pflichtveranstaltungen der mathematischen Grundausbildung von allen Studierenden der ingenieurwissenschaftlichen, wirtschaftwissenschaftlichen, naturwissenschaftlichen sowie informations- und kommunikationstechnischen Fachrichtungen an Fachhochschulen, Hochschulen und Universitäten.

Das in einem Band erscheinende Arbeits- und Übungsbuch zur *Linearen Algebra* in der Reihe „Mathematik-Studienhilfen" gibt eine knappe, konzentrierte Darstellung der wesentlichen Begriffe, Ergebnisse und Methoden und stellt das Einüben und Trainieren dieser anhand zahlreicher Beispiele mit vollständigen Lösungen in den Mittelpunkt. Das Buch eignet sich daher insbesondere zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung.

Die zentralen Gleichungen der *Linearen Algebra* sind lineare Gleichungen $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ und Eigenwertgleichungen $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. Es ist faszinierend, wie viel man über diese beiden Gleichungstypen sagen (und lernen) kann. Viele Anwendungen sind diskret und nicht kontinuierlich, digital anstatt analog und linearisierbar anstatt unberechenbar und chaotisch. Dann aber sind Matrizen und Vektoren die geeigneten Objekte und die *Lineare Algebra* die richtige Sprache; an die Stelle von kontinuierlichen Funktionen treten Vektoren.

Unser Buch ist so angelegt, dass es in der vorgegebenen Reihenfolge, sicher aber mit häufigem Zurückblättern, bearbeitet werden kann. Die mathematischen Sätze sind grau unterlegt, durchnummeriert und (fast) jeder Satz mit einem Namen versehen. Eine Definition erkennt man nicht daran, dass davor *Definition* steht, sondern daran, dass der zu definierende Begriff **fett** gedruckt ist. An zahlreichen Beispielen und Aufgaben können Sie die zentralen Begriffe und Methoden der *Linearen Algebra* trainieren. Jedes Kapitel beinhaltet Aufgaben, deren Musterlösungen am Ende des Buches abgedruckt sind. Sie finden zwei Sorten von Aufgaben. Zum einen ganz einfache Kästchenaufgaben oder Richtig- oder Falsch-Aufgaben, diese dienen zur unmittelbaren Selbstkontrolle und zum anderen die eigentlichen Aufgaben. Bei diesen habe ich mich bemüht, keine unnötigen Tricks einzubauen, sondern Ihnen Erfolgserlebnisse zu ermöglichen. Das Sachwortverzeichnis ist recht ausführlich angelegt, um das Auffinden von Definitionen und Erläuterungen beim Zurückblättern oder bei der späteren Arbeit mit dem Buch zu erleichtern. Beweise habe ich geführt, wenn sie zum Verständnis der betrachteten Zusammenhänge beitragen. Oft werden mathematische Sätze jedoch nur formuliert und ihre Bedeutung wird an Beispielen aufgezeigt. Sind Sie an Beweisen interessiert, die ich nicht geführt habe, so verweise ich Sie auf die angegebene Literatur.

Ich habe mich bemüht, Bezeichnungen konsistent über das ganze Buch hinweg zu verwenden. Punkte, Mengen und lineare Abbildungen werden mit großen lateinischen Buchstaben A, B, C, L, M, usw. bezeichnet. Besonders wichtige Mengen, wie zum Beispiel die reellen Zahlen werden ebenfalls mit großen lateinischen Buchstaben geschrieben, darüber hinaus sind sie aber noch besonders gedruckt, zum Beispiel $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen. Reelle Zahlen sind kleine lateinische a, b, c, ... oder griechische Buchstaben α, β, γ, usw. Vektoren und Matrizen sind **fett** und *kursiv* geschrieben; Vektoren sind kleine ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ usw.) und Matrizen sind große lateinische Buchstaben ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ usw.). Beispiele sind mit dem ausgefüllten Quadratzeichen ■ und Beweise mit dem nicht ausgefüllten Quadratzeichen □ abgeschlossen.

Das vorliegende Buch habe ich vollständig in LaTeX mit der Hauptklasse scrbook des KOMA-Script Pakets erstellt. Das Literaturverzeichnis wurde mit `biblatex` und der Index mit *MakeIndex* erstellt. Alle Bilder wurden mithilfe von PSTricks erstellt. Ohne diese schönen Tools wäre dies alles viel schwieriger oder gar unmöglich gewesen.

Für jede Anregung, nützlichen Hinweis oder Verbesserungsvorschlag bin ich dankbar. Sie können mich über Post oder E-Mail `gramlich@hs-ulm.de` erreichen.

Ich danke allen Kollegen, Studenten und Interessierten, die durch Hinweise auf Druck- oder Denkfehler, oder einfach durch ihr fachliches oder didaktisches Interesse an diesem Buch und seinem Inhalt, zur Verbesserung des Textes beigetragen haben. Dank an Frau FRITZSCH und an Frau WULST für Hinweise zur Gestaltung dieses Büchleins.

In dieser überarbeiteten Auflage habe ich an zahlreichen Stellen Änderungen, Glättungen, Verbesserungen, Erweiterungen und Neubearbeitungen vorgenommen. So hat diese vierte Auflage ein Kapitel mehr, nun also acht, weil ich das vierte Kapitel in zwei kleinere Kapitel unterteilt habe. Darüber hinaus habe ich mehrere Abschnitte in den Kapiteln 1 und 2 überarbeitet. Weiterhin habe ich neue Beispiele und Aufgaben mit Lösungen eingearbeitet.

Ulm, im Juni 2014 Günter M. Gramlich

1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

The simplest model in applied mathematics is a system of linear equations.
It is also by far the most important.
GILBERT STRANG

In vielen realen, aber auch innermathematischen Problemen treten *lineare Gleichungssysteme* auf; ihre Behandlung ist eines der wichtigsten Themen der *Linearen Algebra*. In der *Elektrotechnik* etwa führt die Anwendung der KIRCHHOFFschen Knotenregel für Schaltkreise auf lineare Gleichungssysteme, Bilanzaufgaben in *Technik* und *Ökonomie* werden mit linearen Systemen modelliert. Innerhalb der Mathematik werden Lösungen nichtlinearer Gleichungssysteme und Optimierungsaufgaben mit linearen Systemen gesucht (Quasi-NEWTON-Verfahren). *Interpolationen* und *Approximationen* von Kurven und Flächen mittels Spline- und anderer Funktionen führen auf lineare Systeme. Die *Integration* von Anfangswertaufgaben bei Systemen gewöhnlicher *Differenzialgleichungen*, die Diskretisierung von *Randwertaufgaben* bei gewöhnlichen und partiellen *Differenzialgleichungen* mittels *Differenzenverfahren* oder *finiter Elemente* oder das Lösen von *Anfangs- und Randwertaufgaben bei partiellen Differenzialgleichungen* führt über lineare Gleichungssysteme zur Lösung.

Matrizen dienen der Erfassung, Darstellung und Bearbeitung von Daten. Zur sachgerechten Behandlung mathematischer Probleme der *Technik* und *Wirtschaft*, etwa zu Netzwerkberechnungen in der *Elektrotechnik* oder zur Berechnung von Fachwerken in der *Statik*, zur Lösung von *Transportproblemen* oder anderen *Optimierungsaufgaben*, zur qualitativen und quantitativen Diskussion *mechanischer dynamischer Systeme* bedient man sich der Matrizenrechnung.

1.1 Lineare Gleichungssysteme

Die Gleichung $2x-5=3$ ist eine *lineare Gleichung*, weil die Variable x linear in ihr vorkommt. Löst man die Gleichung $2x-5=3$ nach der Unbekannten x auf, so erhält man die (eindeutige) Lösung $x=4$.

Allgemein ist eine **lineare Gleichung in einer Variablen** x von der Form

$$ax = b,$$

wobei a, b reelle Konstanten sind. Für $a \neq 0$ ist $x = b/a$ die Lösung. Eine **lineare Gleichung in** n **Variablen** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat die Gestalt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

wobei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und b gegebene reelle Konstanten sind. Die reellen Zahlen a_i nennt man die **Koeffizienten** der Gleichung und $b \in \mathbb{R}$ ist die **rechte Seite** der Gleichung (Zur Schreibweise sei bemerkt, dass wir für die Variablen x_1, x_2, x_3 einer Gleichung auch x, y oder z schreiben. Kommen mehr als drei Unbekannte vor, so schreiben wir x mit Index, also x_1, x_2 usw.).

Eine **Lösung** der linearen Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ ist eine endliche Folge (n-Tupel) von n Zahlen $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_n$ mit der Eigenschaft, dass die Gleichung durch die Substitution $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$, …, $x_n = \bar{x}_n$ erfüllt wird. Die Gesamtheit aller Lösungen heißt **allgemeine Lösung** (**Lösungsmenge**) der Gleichung.

Beispiel 1.1 (Allgemeine Lösung) Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen Gleichung

$$4x - 2y = 1.$$

Lösung: Um Lösungen dieser Gleichung zu finden, können wir für x einen beliebigen Wert aus $\mathbb{R}$ wählen und nach y auflösen; alternativ können wir auch irgendeinen Wert für y wählen und nach x auflösen. Der erste Ansatz liefert für $x = t$, wobei $t \in \mathbb{R}$ beliebig ist, $y = 2t - 1/2$. Die derart bestimmte **parameterabhängige Lösung**

$$x = t, \quad y = 2t - 1/2$$

ist die **allgemeine Lösung**, jede spezielle Wahl des reellen Parameters t ergibt eine **spezielle Lösung** (**Teillösung**). Einzelne Lösungen erhalten wir durch Einsetzen entsprechender Zahlen für t. Beispielsweise liefert $t = 3$ die Lösung $x = 3$, $y = 11/2$. Schlagen wir die zweite Lösungsstrategie ein, so erhalten wir für $s \in \mathbb{R}$

$$x = 1/2s + 1/4, \quad y = s.$$

Obwohl sich diese Formeln von den ersten unterscheiden, beschreiben sie dieselbe allgemeine Lösung. Zum Beispiel liefert hier $s = 11/2$ genau die Lösung $x = 3$, $y = 11/2$, die wir oben für $t = 3$ erhalten haben. ■

Üblicherweise treten lineare Gleichungen mit mehreren Variablen nicht einzeln auf. Kommen endlich viele Gleichungen mit den Variablen x_1, x_2, …, x_n vor, so spricht man von einem **linearen Gleichungssystem**. Die m linearen Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

ergeben ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen; es ist $m, n \in \mathbb{N}$. Die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

bilden ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, das heißt, es ist $m = 2$ und $n = 2$.

Eine **Lösung** des linearen Gleichungssystems ist eine endliche Folge von n Zahlen (n-Tupel) $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_n$ mit der Eigenschaft, dass jede Gleichung erfüllt ist, wenn man $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$, …, $x_n = \bar{x}_n$ in das Gleichungssystem einsetzt. Besitzt ein lineares System keine Lösung, so sagt man, es ist **unlösbar** (**inkonsistent**); hat es eine Lösung, so ist es **lösbar** (**konsistent**). Sind die rechten Seiten des Gleichungssystems Null, das heißt $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, so heißt das System **homogen**. Beachten Sie, dass ein homogenes Gleichungssystem stets die Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ hat; man nennt sie die **triviale Lösung**.

Zwei Gleichungssysteme sind **äquivalent**, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben. Das lineare System

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -7 \\ 2x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

hat die Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Das lineare System

$$\begin{aligned} 8x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 10x_1 - 2x_2 &= 14 \end{aligned}$$

hat ebenfalls die Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$. Daher sind die beiden Systeme äquivalent.

1.2 Matrizen

Das rechteckige Zahlenschema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ heißt **reelle Matrix mit m Zeilen und n Spalten** oder (m, n)-Matrix. Die reellen Zahlen a_{ij} sind die **Elemente der Matrix** (**Matrixelemente**). Statt a_{ij} schreibt man auch $a(i, j)$ oder $\boldsymbol{A}(i, j)$. Zum Beispiel ist

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 \\ 7 & -3 & \pi \end{bmatrix}$$

eine Matrix mit 2 Zeilen, 3 Spalten und insgesamt $2 \cdot 3 = 6$ Elementen. Es ist $a_{11} = 1$, $a_{12} = \sqrt{2}$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = 7$, $a_{22} = -3$ und $a_{23} = \pi$.

Die Matrixelemente a_{ij} sind in diesem Buch fast immer reelle Zahlen, also $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Gelegentlich ist es jedoch erforderlich, für die Matrixelemente auch Funktionsterme oder andere mathematische Objekte zuzulassen. Eine Matrix muss nicht mithilfe des undefinierten Begriffes des „rechteckigen Schemas“ eingeführt werden. Man kann sie vielmehr wie folgt auf bekannte Objekte zurückführen: Eine reelle Matrix $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ ist eine Abbildung von $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ nach $\mathbb{R}$. Jedem Paar (i, j) mit $i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, n$ wird die reelle Zahl a_{ij} zugeordnet.

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten können wir als Matrix in der Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

schreiben, wenn wir uns merken, dass die Matrixelemente in der j-ten Spalte mit der Variablen x_j zu multiplizieren sind, zwischen zwei Spalten ein Pluszeichen $+$ und zwischen der vorletzten und letzten Spalte ein Gleichheitszeichen $=$ steht. Wir nennen diese Matrix die **erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems**. Erweitert deshalb, weil die rechte Seite des Gleichungssystems mit in die Matrix aufgenommen wird. Ist dies nicht der Fall, so spricht man nur von der **Koeffizientenmatrix** des linearen Systems. Zum Beispiel hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right].$$

Mithilfe von Matrizen können wir lineare Gleichungssysteme übersichtlich und kompakt schreiben und behandeln.

1.3 Elementare Umformungen und Zeilenstufenformen

Wir entwickeln nun ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Die grundlegende Idee dieses Verfahrens besteht darin, das gegebene System in ein äquivalentes System zu bringen, das einfacher gelöst werden kann. Systeme, die einfach zu lösen sind, sind zum Beispiel Systeme in „Diagonalform“, „Dreiecksform“ oder „Orthogonalform“.

Unter einer **elementaren Gleichungsumformung** versteht man eine der folgenden drei grundlegenden Operationen:

- Vertauschen von zwei Gleichungen,
- Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Konstanten,
- Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Die elementaren Gleichungsumformungen gestatten uns den folgenden Satz.

6 Der Euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^n$

In einem Vektorraum V sind Länge, Winkel und Orthogonalität von Vektoren (zunächst) nicht definiert. Dies gilt insbesondere auch für den Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Wir betrachten in diesem Kapitel nur den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und definieren auf diesem eine zusätzliche Struktur, nämlich das *natürliche Skalarprodukt*. Dadurch ist es möglich, die Länge eines Vektors, den Winkel zwischen zwei Vektoren und den Begriff Orthogonalität für Vektoren in $\mathbb{R}^n$ zu erklären. Damit können wir vielfach vereinfachend rechnen, weil wir zum Beispiel orthogonale und orthonormale Basisvektoren zur Verfügung haben.

Es sind $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ und $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Das **natürliche (gewöhnliche, übliche, kanonische) Skalarprodukt $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ im** $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Für $n = 2$ und $n = 3$ kennen wir dies schon aus Kapitel 2. Das natürliche Skalarprodukt wird auch **Standardskalarprodukt** genannt (Das Wort *natürlich* lassen wir im Folgenden auch weg).

Beispiel 6.1 Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{u} = (-1, 2, 3, 7)$ und $\boldsymbol{v} = (5, 4, -7, 0)$ im Vektorraum $\mathbb{R}^4$.

Lösung: Nach Definition ist

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (-1)(5) + (2)(4) + (3)(-7) + (7)(0) = -18. \quad \blacksquare$$

Im folgenden Satz sind die vier wichtigsten Rechenregeln des Skalarproduktes zusammengefasst, siehe Satz 2.10.

Satz 6.1 (Rechenregeln des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^n$) Es sind $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und c ein Skalar. Dann gilt:

(a) *Kommutativität, Symmetrie:* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$.

(b) *Distributivität:* $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$.

(c) *Assoziativität:* $c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (c\boldsymbol{v})$.

(d) *Positive Definitheit:* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ für $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ für $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$.

Schreiben wir die Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ aus $\mathbb{R}^n$ als Spaltenmatrizen und lassen (wie üblich) die Klammern der $(1,1)$-Matrizen (Skalare) weg, so ist nach der Definition der Matrizenmultiplikation

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v},$$

womit wir bewiesen haben, dass für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ im $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}.$$

In Worten: Das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ kann als Matrizenmultiplikation aufgefasst werden; Zeilenmatrix mal Spaltenmatrix.

Ein **Euklidischer Vektorraum** ist ein reeller Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt definiert ist. Es gibt viele EUKLIDische Vektorräume (siehe zum Beispiel [9]), der $\mathbb{R}^n$ mit dem natürlichen Skalarprodukt ist der wichtigste. Wir betrachten nur den EUKLIDischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem natürlichen Skalarpordukt. Auch wenn sich die Vektoren für $n \geqslant 4$ nicht mehr zeichnen lassen, so können wir dann dennoch von Länge und Orthogonalität sprechen, nachdem wir die entsprechenden Konzepte von $n = 2, 3$ auf beliebiges $n \in \mathbb{N}$ übertragen haben.

Wir definieren die **Euklidische Länge** (**Euklidische Norm**, **Betrag**) eines Vektors $\boldsymbol{v}$ im $\mathbb{R}^n$ durch

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Beispiel 6.2 Berechnen Sie die Länge des Vektors $\boldsymbol{v} = (1, 2, 0, -1)$.

Lösung: Es ist

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \approx 2.45$$

die Länge von $\boldsymbol{v}$. ■

Zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ im EUKLIDischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal** (**senkrecht**), wenn $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ ist. Man schreibt dann $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Beispiel 6.3 Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\boldsymbol{u} = (-2, 3, 1, 4)$ und $\boldsymbol{v} = (1, 2, 0, -1)$ im Raum $\mathbb{R}^4$ orthogonal sind (senkrecht aufeinander stehen).

Lösung: Es ist

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (-2, 3, 1, 4) \cdot (1, 2, 0, -1) = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0,$$

also sind die beiden Vektoren orthogonal; es ist also $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. ■

Sind $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ zwei zueinander orthogonale Vektoren im $\mathbb{R}^n$, so gilt wegen

$$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}|^2 + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + |\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2$$

der Satz des PYTHAGORAS auch im $\mathbb{R}^n$.

Satz 6.2 (Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^n$) Zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ aus $\mathbb{R}^n$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt

$$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2.$$

Zwei orthogonale Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ im Raum $\mathbb{R}^n$ heißen **orthonormal**, wenn sie beide die Länge 1 haben.

Orthonormale Vektoren stehen also senkrecht aufeinander und sind Einheitsvektoren. Im Raum $\mathbb{R}^n$ sind die natürlichen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ orthonormale Vektoren.

Gegeben ist ein Vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$. Dieser soll orthogonal auf die eindimensionale lineare Hülle $Lin(\boldsymbol{a})$ projiziert werden ($\boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$). Dieses Problem haben wir bereits in Kapitel 2 für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gelöst, siehe Satz 2.11 und Bild 2.17. Wie lautet der orthogonale Projektionsvektor $Proj_{Lin(\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{u})$? Der gesuchte Vektor muss ein Vielfaches von $\boldsymbol{a}$ sein, also ist $Proj_{Lin(\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{u}) = k\boldsymbol{a}$ für eine reelle Zahl k. Nun sind die Vektoren $\boldsymbol{u} - Proj_{Lin(\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - k\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}$ orthogonal, also gilt $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{a}) = 0$ und mit den Rechenregeln aus Satz 6.1 $k = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})/(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})$. Somit ist

$$Proj_{Lin(\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$$

der **orthogonale Projektionsvektor** von $\boldsymbol{u}$ auf $Lin(\boldsymbol{a})$ oder auf $\boldsymbol{a}$ in $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 6.4 Berechnen Sie im Raum $\mathbb{R}^4$ den orthogonalen Projektionsvektor von $\boldsymbol{u} = (2, 3, -3, 1)$ auf $Lin(\boldsymbol{e}_1)$ mit $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ und auf $Lin(\boldsymbol{e}_2)$ mit $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$.

Lösung: Es ist

$$Proj_{Lin(\boldsymbol{e}_1)}(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_1 = \frac{2}{1}(1, 0, 0, 0) = (2, 0, 0, 0).$$

Analog ist $Proj_{Lin(\boldsymbol{e}_2)}(\boldsymbol{u}) = (0, 3, 0, 0)$. ■

6.1 Orthogonal- und Orthonormalbasen

Gewöhnlich kann man zur Lösung eines Problems der Vektorrechnung irgendeine Basis des zugrunde liegenden Vektorraumes wählen, die der Aufgabe angemessen erscheint. Basen, deren Vektoren zueinander orthogonal (oder sogar orthonormal) sind, erleichtern die Rechnungen oft erheblich. Außerdem tragen orthonormale Basen zur Stabilisierung bei numerischen Algorithmen bei.

Eine Menge von Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ heißt **orthogonale Menge** (**Orthogonalsystem**), wenn ihre Elemente paarweise orthogonal sind (Die Menge darf nicht leer sein und der Nullvektor darf nicht dazu gehören). Haben sie außerdem die Länge 1, so heißt die Menge **orthonormal** (**Orthonormalsystem**).

Beispiel 6.5 Zeigen Sie, dass die Menge der Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = (0,1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,0,-1,0)$ und $\boldsymbol{v}_4 = (0,0,0,1)$ im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ orthogonal ist.

Lösung: Vektoren sind orthogonal, wenn das Skalarprodukt Null ist:

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_4 = 0. \quad \blacksquare$$

Für jeden vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\boldsymbol{v}$ gilt

$$\left|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\right||\boldsymbol{v}| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\boldsymbol{v}| = 1,$$

also hat der Vektor $\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ die Länge (Norm) 1. Wir haben so den Vektor $\boldsymbol{v}$ *normalisiert (normiert)*, indem wir ihn mit dem Kehrwert seiner Länge multipliziert haben. Auf diese Art erhalten wir aus einer orthogonalen Menge eine orthonormale Menge.

Beispiel 6.6 Normalisieren Sie die vier Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = (0,1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,0,-1,0)$, $\boldsymbol{v}_4 = (0,0,0,1)$ aus Beispiel 6.5.

Lösung: Für die Vektoren gilt: $|\boldsymbol{v}_1| = 1$, $|\boldsymbol{v}_2| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{v}_3| = \sqrt{2}$, $|\boldsymbol{v}_4| = 1$. Also ergeben sich die normalisierten Vektoren zu

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_1|}\boldsymbol{v}_1 = (0,1,0,0), \quad \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_2|}\boldsymbol{v}_2 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2},0)$$

und

$$\boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_3|}\boldsymbol{v}_3 = (1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2},0), \quad \boldsymbol{q}_4 = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_4|}\boldsymbol{v}_4 = (0,0,0,-1)$$

Die Menge $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_4\}$ ist eine orthonormale Menge in $\mathbb{R}^4$. $\blacksquare$

Eine Basis aus $\mathbb{R}^n$, die aus orthonormalen Vektoren besteht, heißt **Orthonormalbasis** (**orthonormale Basis**). Sind die Basisvektoren nur orthogonal, so spricht man von einer **Orthogonalbasis** (**orthogonalen Basis**).

Beispiel 6.7 Bilden die Vektoren $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,0)$ und $\boldsymbol{e}_4 = (0,0,0,1)$ eine orthonormale Basis?

Lösung: Ja! Die Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$, stehen paarweise senkrecht aufeinander und haben alle die Länge 1. ■

Allgemein bilden die Vektoren $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$ usw. $\boldsymbol{e}_n = (0,0,\ldots,1)$ eine Orthonormalbasis im Vektorraum $\mathbb{R}^n$. In Worten: Die natürliche Basis des Raumes $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis.

Satz 6.3 Eine Menge von orthogonalen Vektoren in $\mathbb{R}^n$ ist stets auch linear unabhängig.

Beweis: Wir nehmen an, $U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ ist eine orthogonale Menge in $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass aus der Gleichung

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{o}$$

$c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$ folgt. Zunächst gilt für jeden Vektor $\boldsymbol{u}_i \in U$: $(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{u}_r)\cdot\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{u}_i = 0$ oder $c_1\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_i+c_2\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_i+\cdots+c_r\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{u}_i = 0$. Da U eine orthogonale Menge ist, gilt $\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_i = 0$ für $i \neq j$, also bleibt von allen Summanden nur noch einer übrig. Also ist $c_i\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_i = 0$. Nach Voraussetzung ist $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{o}$ und damit $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \neq 0$, woraus wir $c_i = 0$ für alle $i = 1,2,\ldots,r$ erhalten. Somit ist die orthogonale Menge U linear unabhängig. □

Die Koordinaten eines Vektors in einer Orthonormalbasis

Liegt eine orthonormale Basis in $\mathbb{R}^n$ vor, so lässt sich jeder Vektor besonders einfach als Linearkombination dieser orthonormalen Basisvektoren darstellen.

Satz 6.4 (FOURIER-Entwicklung) Es ist $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jeden Vektor $\boldsymbol{v}$ aus $\mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{q}_n$$

wobei die Koeffizienten c_i der Linearkombination auf folgende Weise leicht berechnet werden können: $c_i = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_i$ für $i = 1,2,\ldots,n$.

Sachwortverzeichnis

Alle **fett** gedruckten Seitenzahlen sind Referenzen auf die Definition des jeweiligen Begriffs. Demgegenüber geben normal gedruckte Seitenzahlen die Seiten der Verwendung des jeweiligen Begriffs wieder.