2 Terme und Gleichungen

2.1 Grundlagen

Wir unterscheiden grundsätzlich die vier folgenden Grundrechenarten mit ihren jeweiligen Komponenten. Macht euch mit den Begrifflichkeiten vertraut, da diese im weiteren Verlauf immer wieder auftauchen und erwähnt werden.

Grundrechen-arten

Grundrechenart	**Komponenten**
Addition „+“	$\underbrace{2}_{\textbf{Summand}} + \underbrace{4}_{\textbf{Summand}} = \underbrace{6}_{\textbf{Summe}}$
Subtraktion „−“	$\underbrace{7}_{\textbf{Minuend}} - \underbrace{3}_{\textbf{Subtrahend}} = \underbrace{4}_{\textbf{Differenz}}$
Multiplikation „·“	$\underbrace{2}_{\textbf{Faktor}} \cdot \underbrace{3}_{\textbf{Faktor}} = \underbrace{6}_{\textbf{Produkt}}$
Division „:“ oder „÷“	$\underbrace{4}_{\textbf{Dividend}} : \underbrace{2}_{\textbf{Divisor}} = \underbrace{2}_{\textbf{Quotient}}$

Nachfolgend findet ihr eine Übersicht über die wichtigsten und euch bekannten Zahlenmengen.

Zahlenmengen

- Natürliche Zahlen[1]

  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ → Natürliche Zahlen sind ganze, positive Zahlen

- Ganze Zahlen

  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ → Ganze Zahlen sind sowohl ganze positive als auch ganze negative Zahlen mit der Null

- Rationale Zahlen

  $\mathbb{Q} = \{\dots, -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{3}, \dots, 0, \dots, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots\}$ → Rationale Zahlen sind Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen; ganze Zahlen lassen sich auch als Bruch darstellen

- Reelle Zahlen

  $\mathbb{R} = \{\dots, \pi, \dots, \sqrt{2}, \dots\}$ → Reelle Zahlen sind alle Zahlen

[1] Es kann auch sein, dass die 0 nicht enthalten ist. Das ist nicht einheitlich. Fragt euren Lehrer!

2.2 Rechengesetze

Grundsätzlich gilt immer **Punkt- vor Strichrechnung** und **Potenzieren vor Punktrechnung**. Außerdem werden Ausdrücke in Klammern immer zuerst berechnet.

Rechengesetze

Des Weiteren gelten die folgenden Rechengesetze:

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz; gilt nur für die Addition und die Multiplikation, nicht für die Subtraktion und Division)

Allgemein:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Beispiel:

$$7 + 2 = 2 + 7$$
$$2 \cdot 7 = 7 \cdot 2$$

Assoziativgesetz (Vereinigungsgesetz; gilt ebenfalls nur für die Addition und die Multiplikation, nicht für die Subtraktion und Division)

Allgemein:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Beispiel:

$$(7 + 2) + 3 = 7 + (2 + 3)$$
$$(7 \cdot 2) \cdot 3 = 7 \cdot (2 \cdot 3)$$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Allgemein:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

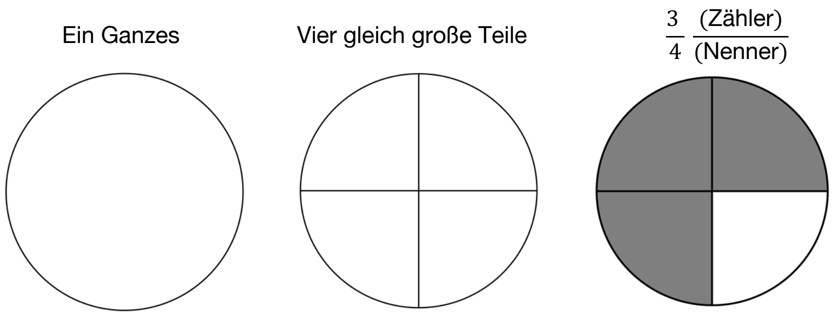
Beispiel:

$$(2 + 3) \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7$$

2.3 Bruchrechnung

Einführung

Der Nenner (unten) gibt an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wird. Der Zähler (oben) gibt an, wie viele Teile davon genommen werden.
Beispiel: $\frac{3}{4}$ $\left[\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}\right]$



Addieren, erweitern und kürzen

Beim Rechnen mit Brüchen gelten die folgenden Regeln:

- <u>Erweitern</u>: Ein Bruch wird erweitert, indem man sowohl den Zähler (oben) als auch den Nenner (unten) mit der gleichen Zahl multipliziert. Die Zahl über dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 2 erweitert wird:

$$\frac{3}{7} \xrightarrow{2} \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$$

- Kürzen: Ein Bruch wird gekürzt, indem man sowohl den Zähler (oben) als auch den Nenner (unten) durch die gleiche Zahl teilt. Die Zahl unter dem Pfeil gibt an, dass der Bruch mit 9 gekürzt wird:

$$\frac{9}{27} \xrightarrow[9]{} \frac{9 \div 9}{27 \div 9} = \frac{1}{3}$$

- Gemischte Zahl ↔ Unechter Bruch: Eine gemischte Zahl (Ganze Zahl und Bruch z.B. $2\frac{1}{4}$) kann man nach dem folgenden Schema in einen unechten Bruch (Zähler > Nenner) umwandeln:

Unechter Bruch

$$2\frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

- Addition: Zwei Brüche werden addiert, indem man den Nenner (unten) gleichnamig macht und anschließend die beiden Zähler (oben) addiert. Das kgV von 7 und 5 ist 35.

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{15}{35} + \frac{28}{35} = \frac{15 + 28}{35} = \frac{43}{35}$$

- Subtraktion: Zwei Brüche werden subtrahiert, indem man den Nenner (unten) gleichnamig macht und anschließend die beiden Zähler (oben) voneinander subtrahiert:

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{7} = \frac{28}{35} - \frac{15}{35} = \frac{28 - 15}{35} = \frac{13}{35}$$

- Multiplikation: Zwei Brüche werden multipliziert, indem man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner multipliziert:

Multiplikation und Division

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

Man sollte, falls möglich, die Brüche vor der Multiplikation *über Kreuz* kürzen:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{27} = \frac{\cancel{3}\,1 \cdot \cancel{14}\,2}{\cancel{7}\,1 \cdot \cancel{27}\,9} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

- Division: Zwei Brüche werden dividiert, indem man bei dem Bruch, durch den geteilt wird, den Zähler und den Nenner vertauscht (Kehrwert bildet) und danach die beiden Brüche miteinander multipliziert:

$$\frac{3}{7} \div \frac{27}{14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{27} = \frac{\cancel{3}\,1 \cdot \cancel{14}\,2}{\cancel{7}\,1 \cdot \cancel{27}\,9} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

Hinweis: Bitte das Ergebnis bei allen vier Grundrechenarten immer vollständig kürzen!

2.4 Terme

Was ist ein Term? Ein Term kann eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder ein Quotient sein, z.B. $x + 7$ oder $2x - 4$. Terme dürfen nach bestimmten Regeln vereinfacht und zusammengefasst werden.

Was ist ein Term?

Wir gucken uns den folgenden Term an: $2x + 4 + 3x - 2 + 5y$.

Grundsätzlich dürfen gleichartige Glieder zusammengefasst werden. Damit ihr die gleichartigen Glieder erkennt, wollen wir den Term ordnen und schreiben:

$$2x + 3x + 4 - 2 + 5y$$

Wir fassen zusammen und erhalten: $5x + 2 + 5y$.

Ausmultiplizieren

Term ausmultiplizieren

Eine Summe wird mit einem Faktor multipliziert, indem man jeden einzelnen Summanden innerhalb der Klammer mit dem Faktor außerhalb der Klammer multipliziert, z.B.:

$$4 \cdot (2a + 3b) = 4 \cdot 2a + 4 \cdot 3b = 8a + 12b$$

Es spielt dabei keine Rolle, ob der Faktor links oder rechts von der Klammer steht: $4 \cdot (2a + 3b) = (2a + 3b) \cdot 4$.

Zwei Summen (oder Differenzen) werden miteinander multipliziert, indem man den ersten Summanden der ersten Klammer mit dem ersten Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Anschließend wird der erste Summand der ersten Klammer mit dem zweiten Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Danach wird der zweite Summand der ersten Klammer mit dem ersten Summanden der zweiten Klammer multipliziert. Zum Schluss wird der zweite Summand der ersten Klammer mit dem zweiten Summanden der zweiten Klammer multipliziert, z.B.:

$$(4a + 2) \cdot (2a + b) = 4a \cdot 2a + 4a \cdot b + 2 \cdot 2a + 2 \cdot b = 8a^2 + 4ab + 4a + 2b$$

Zwei Summen (oder Differenzen) und ein weiterer Faktor werden miteinander multipliziert, indem man zuerst die beiden Summen (oder Differenzen) miteinander multipliziert und anschließend den gesamten Term mit dem Faktor multipliziert, z.B.:

$$2 \cdot (a + 2) \cdot (a + 4) = 2 \cdot (a^2 + 6a + 8) = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot 6a + 2 \cdot 8 = 2a^2 + 12a + 16$$

Faktorisieren

Faktorisieren

Beim Faktorisieren (Ausklammern) wird ein Term, welcher eine Summe bzw. eine Differenz ist, in ein Produkt umgewandelt.

Wir gucken uns den folgenden Term an: $x + 2ax$.

Sowohl im ersten als auch im zweiten Summanden steckt als gemeinsamer Teil ein x. Dieses gemeinsame x wird vor die Klammer gezogen und in der Klammer verbleiben die beiden Summanden, reduziert um ein x: $x \cdot (1 + 2a)$.

Zur Kontrolle multiplizieren wir den Term nochmal aus:

$$x \cdot (1 + 2a) = x \cdot 1 + x \cdot 2a = x + 2ax$$

2.5 Gleichungen lösen

2.5.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen werden immer nach dem gleichen Schema gelöst. Das Ziel ist die Isolation der Variablen x auf einer der beiden Seiten der Gleichung. Zu diesem Zweck wollen wir uns verschiedene Gleichungen angucken und diese lösen:

Lösen durch Umstellen

$$x + 7 = 5$$

Wir bringen die 7 von der linken auf die rechte Seite, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung 7 subtrahieren:

$$\begin{aligned} x + 7 &= 5 \qquad | -7 \\ \Leftrightarrow \quad x + 7 - 7 &= 5 - 7 \end{aligned}$$

Nachdem wir alles zusammengefasst haben, erhalten wir: $x = -2$.

Weiteres Beispiel:

$$2x + 3 = 5x - 12$$

Wir müssen uns überlegen, auf welcher Seite der Gleichung wir unsere x und auf welcher Seite wir unsere Zahlen sammeln wollen. Es spielt grundsätzlich keine Rolle, ob das x am Ende auf der linken oder auf der rechten Seite der Gleichung steht. Wir entscheiden uns dafür, dass wir die x auf der linken Seite sammeln und bringen jetzt die $5x$ mit $-5x$ auf die linke Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5x - 12 \qquad | -5x \\ \Leftrightarrow \quad 2x + 3 - 5x &= 5x - 12 - 5x \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen und erhalten: $-3x + 3 = -12$.

Als nächstes bringen wir die 3 mit -3 auf die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} -3x + 3 &= -12 \qquad | -3 \\ \Leftrightarrow \quad -3x + 3 - 3 &= -12 - 3 \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen und erhalten: $-3x = -15$.

Zum Schluss wollen wir noch die -3 vor unserem x beseitigen. Wir teilen also auf beiden Seiten der Gleichung durch -3:

$$\begin{aligned} -3x &= -15 \quad | \div (-3) \\ \Leftrightarrow \quad x &= 5 \end{aligned}$$

Weiteres Beispiel:

Selbstverständlich kann es auch vorkommen, dass unsere Gleichung zu Beginn Klammern enthält, welche wir vorher auflösen müssen:

$$2x - (3x + 5) = 2 \cdot (x + 3)$$

Ein Minus vor der Klammer bewirkt, dass sich die Vorzeichen in der Klammer umkehren und die Klammer anschließend verschwindet. Auf der rechten Seite unserer Gleichung wird die Klammer ausmultipliziert. Insgesamt erhalten wir also:

$$2x - 3x - 5 = 2x + 6$$

Wir fassen zusammen und erhalten: $-x - 5 = 2x + 6$.

Merkt euch: $-x = -1 \cdot x$

Wir bringen jetzt unsere $2x$ auf die linke Seite der Gleichung, indem wir $-2x$ rechnen und erhalten:

$$\begin{aligned} -x - 5 &= 2x + 6 \quad | -2x \\ -3x - 5 &= 6 \end{aligned}$$

Anschließend bringen wir die -5 auf die rechte Seite der Gleichung, indem wir $+5$ rechnen:

$$\begin{aligned} -3x - 5 &= 6 \quad | +5 \\ \Leftrightarrow \quad -3x &= 11 \end{aligned}$$

Abschließend teilen wir auf beiden Seiten der Gleichung durch -3:

$$\begin{aligned} -3x &= 11 \quad | \div (-3) \\ \Leftrightarrow \quad x &= -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

2.5.2 Bruchgleichungen

Bruchgleichung lösen

Beim Lösen von Bruchgleichungen geht ihr am besten nach dem folgenden Schema vor. Zuerst werden die Nenner auf beiden Seiten der Gleichung eliminiert, indem ihr mit genau diesen beiden Nennern multipliziert. Anschließend verfahrt ihr genauso wie beim Lösen von linearen Gleichungen. Dazu gucken wir uns die folgende Gleichung an:

$$\begin{aligned}
& \frac{2x+2}{3} = \frac{x-3}{2} && | \cdot 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(2x+2)\cdot 2}{3} = \frac{(x-3)\cdot 2}{2} && | \text{ Ausmultiplizieren bzw. Kürzen} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{4x+4}{3} = \frac{(x-3)\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} && \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{4x+4}{3} = x - 3 && | \cdot 3 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(4x+4)\cdot 3}{3} = (x-3)\cdot 3 && | \text{ Ausmultiplizieren bzw. Kürzen} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(4x+4)\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 3x - 9 && \\
\Leftrightarrow \quad & 4x + 4 = 3x - 9 && | -3x \\
\Leftrightarrow \quad & x + 4 = -9 && | -4 \\
\Leftrightarrow \quad & x = -13 &&
\end{aligned}$$

Der folgende Trick kann beim Lösen von Bruchgleichungen besonders hilfreich sein. Sollte euer x im Nenner stehen, so dürft ihr auf beiden Seiten der Gleichung den Kehrwert bilden und könnt anschließend wieder mit dem jeweiligen Nenner multiplizieren:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x} &=& \frac{32}{7} && |\ \text{Kehrwert}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x}{2} &=& \frac{7}{32} && |\cdot 2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x\cdot 2}{2} &=& \frac{7\cdot 2}{32} && |\ \text{Ausmultiplizieren bzw. Kürzen}\\
\Leftrightarrow\ &x &=& \frac{14}{32}=\frac{7}{16}=0{,}4375
\end{aligned}$$

2.5.3 Ungleichungen

Das Thema Ungleichungen wird häufig nicht in der Schule behandelt. Wir wollen uns dieses Thema jedoch kurz angucken und die wichtigsten Regeln festhalten. Grundsätzlich dürfen Ungleichungen nach denselben Regeln wie Gleichungen gelöst werden.

Ungleichung lösen

Es gibt eine Ausnahme. Sobald ihr die Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl teilt, muss das Ungleichzeichen seine Richtung ändern. Beispiel:

$$\begin{aligned}
&-3x+7 &<& -6x-5 && |+3x\\
\Leftrightarrow\ &7 &<& -3x-5 && |+5
\end{aligned}$$

Bis jetzt sind wir genauso verfahren, als würde es sich um eine lineare Gleichung handeln. Aber jetzt kommt die vorhin erwähnte Ausnahme. Wir teilen unsere Ungleichung durch -3 und müssen daher unser Ungleichzeichen umdrehen:

„Schnabel“ dreht sich

$$\begin{aligned}
&12 &<& -3x && |\div(-3)\\
\Leftrightarrow\ &-4 &>& x
\end{aligned}$$

Beachte: $-4 > x$ ist das gleiche wie $x < -4$.

2.5.4 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen können euch in unterschiedlichen Formen begegnen. Wir schauen uns hier unterschiedliche Formen an und zeigen euch, wie diese berechnet werden können. Damit es etwas übersichtlicher wird, setzen wir die Terme immer gleich Null.

Was heißt quadratisch?

- **Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$** werden auf die folgende Art und Weise berechnet:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ &2x^2-8 &=& 0 && |+8\\
\Leftrightarrow\ &2x^2 &=& 8 && |\div 2\\
\Leftrightarrow\ &x^2 &=& 4 && |\sqrt{}\\
&x_1=2 &\wedge& x_2=-2
\end{aligned}$$

Merkt euch, dass wir beim Wurzelziehen immer zwei Lösungen erhalten. Eine ist positiv und die andere ist negativ. Alternative Schreibweisen für die Lösung: $x = 2 \vee x = -2$ ($\vee$ bedeutet *oder*; $\wedge$ bedeutet *und*) oder $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$.

Lösen durch Ausklammern

- **Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$** werden auf die folgende Art und Weise berechnet:

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2x = 0$$

Zuerst müsst ihr einen gemeinsamen Faktor ausklammern. Das ist in den meisten Fällen immer ein x:

$$x \cdot (2x + 2) = 0$$

Jetzt gilt der folgende Satz: Ein Produkt ist immer genau dann gleich 0, wenn mindestens ein Faktor gleich 0 ist. Das bedeutet, dass das Ergebnis einer Multiplikation nur dann gleich 0 sein kann, wenn wir auch mit 0 multiplizieren. Denn nur 0 multipliziert mit irgendwas oder irgendwas multipliziert mit 0 ergibt auch 0. Wir dürfen also unsere beiden Faktoren unabhängig voneinander gleich 0 setzen:

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x + 2 = 0$$

Auf diesem Wege erhalten wir direkt auch schon unsere erste Lösung, nämlich $x = 0$. Um unsere zweite Lösung zu bestimmen, lösen wir den Term, welcher in der Klammer steht, separat auf:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \quad &| -2 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= -2 \quad &| \div 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= -1 \end{aligned}$$

Unsere beiden Lösungen lauten also: $x = 0 \vee x = -1$.

pq-Formel

- **Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$** können mit der *pq*-Formel gelöst werden. Diese lautet:

> ***pq*-Formel**
>
> $$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel: Berechne die Lösung der Gleichung $0 = 2x^2 - 4x - 6$.

In diesem Fall ist es besonders wichtig, dass ihr die Gleichung vorher normiert. Ihr müsst lediglich die gesamte Gleichung durch den Faktor teilen, welcher vor dem x^2 auftaucht (hier 2):

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 6 &= 0 \quad | \div 2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt können wir unsere beiden Werte sowohl für p als auch für q bestimmen. Das p findet ihr immer direkt vor dem einfachen x, also $p = -2$. Das q ist immer die konstante Zahl in unserer Gleichung, also $q = -3$. Merkt euch, dass die Vorzeichen eine wichtige Rolle spielen und ihr diese auf jeden Fall berücksichtigen müsst. Jetzt setzen wir unsere beiden Werte in die *pq*-Formel ein:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-2)}{2}\right)^2 - (-3)} = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3} \\ &= 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet: $x_1 = 1 + 2 = 3 \ \wedge \ x_2 = 1 - 2 = -1$.

Bei solchen Gleichungen bestimmt der Term unter der Wurzel, wie viele Lösungen ihr erhaltet. Der Term unter der Wurzel heißt Diskriminante D.

Diskriminante

> Es gelten die folgenden Regeln:
>
> - $D > 0 \Rightarrow$ 2 Lösungen
> - $D = 0 \Rightarrow$ 1 Lösung
> - $D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung

Merke: Wir können keine Wurzel aus negativen Zahlen ziehen!

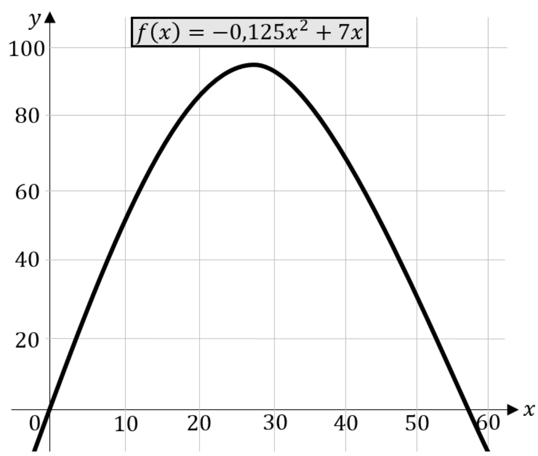
2.6 Anwendungsbeispiel

In der Regel begegnen uns quadratische Gleichungen als quadratische Funktionen. Die Flugbahn eines Golfballs kann annähernd durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$f(x) = -0{,}125x^2 + 7x$$

a) Zeige, dass der Golfball 56 m weit fliegt.

Zuerst wollen wir uns den Graphen der Funktion im Koordinatensystem angucken:



Wir können sehen, dass sich der Abschlagpunkt im Punkt (0|0) befindet. Der Golfball landet irgendwo zwischen der 50 m- und der 60 m-Markierung. Sowohl der Abschlagpunkt als auch der Landepunkt des Golfballs werden durch die Nullstellen unserer Funktion repräsentiert.

Um die Frage zu beantworten, bzw. um zu bestätigen, dass Golfball auf der 56 m-Markierung landet, müssen wir die Nullstellen unserer Funktion bestimmen.

Wir setzen also den Funktionsterm gleich 0 und erhalten:

$$-0{,}125x^2 + 7x = 0$$

Im nächsten Schritt klammern wir ein x aus und benutzen den Satz vom Nullprodukt:

$$\begin{aligned}
& x \cdot (-0{,}125x + 7) = 0 \\
\Rightarrow \quad & x = 0 \quad \vee \qquad -0{,}125x + 7 = 0 \qquad | -7 \\
& \qquad \Leftrightarrow \quad -0{,}125x = -7 \qquad | \div (-0{,}125) \\
& \qquad \Leftrightarrow \quad x = 56\ [\mathrm{m}] \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Welche maximale Höhe erreicht der Golfball?

Bei der Berechnung der maximalen Höhe muss der Scheitelpunkt der Parabel bestimmt werden, denn bei dem Scheitelpunkt handelt es sich entweder um den höchsten oder um den tiefsten Punkt der Parabel. Wir wenden also die quadratische Ergänzung an und bestimmen den Scheitelpunkt:

$$f(x) = -0{,}125x^2 + 7x$$

Zuerst klammern wir den Faktor $-0{,}125$ aus und erhalten:

$$f(x) = -0{,}125 \cdot (x^2 - 56x)$$

Im nächsten Schritt ergänzen wir quadratisch:

$$f(x) = -0{,}125 \cdot (x^2 - 56x + 28^2 - 28^2)$$

Auf die ersten drei Summanden in der Klammer wenden wir die zweite binomische Formel an:

$$f(x) = -0{,}125 \cdot \left[(x - 28)^2 - 784\right]$$

Zum Schluss multiplizieren wir noch -784 mit $-0{,}125$:

$$f(x) = -0{,}125 \cdot (x - 28)^2 + 98$$

Die Koordinaten unseres Scheitelpunkts lauten $S(28|98)$. Der Golfball erreicht eine maximale Höhe von 98 m. Es gibt zu dieser Fragestellung noch einen weiteren, kürzeren Lösungsweg. Grundsätzlich dürfen wir davon ausgehen, vorausgesetzt wir kennen die Nullstellen der Parabel, dass sich die x-Koordinate des Scheitelpunkts genau in der Mitte befindet. Unsere beiden Nullstellen waren $x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = 56$. Also muss der Scheitelpunkt genau in der Mitte bei $x = 28$ liegen. Diesen Wert können wir dann einfach in unsere Ausgangsfunktion einsetzen, um die y-Koordinate und damit auch die Höhe zu bestimmen:

$$f(28) = -0{,}125 \cdot 28^2 + 7 \cdot 28 = 98$$

Wir sehen, dass wir auf diesem Wege auf den exakt gleichen Wert kommen.

2.7 Aufgaben

1. Berechne im Kopf und notiere das Ergebnis:

a) $88 + 43$
c) $26 + 55 + 41$
e) $576 - 43 + 66$
b) $42 - (5.391 - 5.349)$
d) $444 - 324$
f) $\left[67 - (24 + 33)\right] - 5$

2. Ergänze ein passendes Rechenzeichen und die fehlende Zahl:

a) 56 ________________ = 86
d) 58 ________________ + 16 = 24
b) 5.768 ________________ = 487
e) 26 + 755 ________________ = 645
c) 32 ________________ + 5 = 67
f) 63 − (43 ________________) = 12

3. Berechne:

a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$
c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$
e) $\frac{7}{3} + \frac{1}{4}$
g) $\frac{1}{8} + \frac{3}{4}$
b) $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}$
d) $\frac{5}{4} + \frac{1}{2}$
f) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$
h) $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{2}{21}$

4. Kürze über Kreuz und Berechne dann:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$
b) $\frac{13}{2} \cdot \frac{2}{13}$
c) $\frac{21}{5} \cdot \frac{15}{7}$
d) $\frac{78}{63} \cdot \frac{14}{13}$

5. Berechne:

a) $\frac{3}{2} : \frac{2}{5}$
b) $\frac{1}{4} : \frac{4}{5}$
c) $\frac{3}{2} : \frac{5}{2}$
d) $\frac{48}{9} : \frac{12}{3}$

6. Löse die folgenden Gleichungen:

a) $5 + x = 12$
d) $8 + x - 2 = 10$
g) $3x \cdot 2 = 24$
j) $\frac{4x}{3} = 8$
b) $13 - x = 7$
e) $2x = 8$
h) $8x - 3 + 5 = 34$
k) $\frac{4x}{3} \cdot \frac{3}{4} = 78$
c) $5 - 3 + x = 7$
f) $3x - 2 = 7$
i) $\frac{x}{4} = 2$
l) $\frac{5x}{2x} \cdot \frac{3x}{2} = 15$

7. Berechne die Unbekannten:

a) $0 = -3x^2$
b) $0 = 5x^2$
c) $0 = 3x^2 - 6$
d) $0 = 4 - x^2$
e) $0 = -2x^2 + 3x$
f) $0 = -4t^2 - 2t$
g) $0 = x^2 + 5x - 2{,}75$
h) $0 = u^2 - 3u + \frac{5}{4}$
i) $0 = 3x^2 - 9x + 3{,}75$