Vorwort

Die Tätigkeiten und Verantwortungsbereiche von Wirtschaftsingenieuren sind geprägt von komplexen technischen und wirtschaftlichen Aufgaben- und Problemstellungen. Das Studium vermittelt dazu fundierte naturwissenschaftlich-technische und betriebswirtschaftliche Kenntnisse und Fähigkeiten. Grundlage und Voraussetzung hierfür ist die Mathematik. Zusätzlich zu den Gebieten und Problemstellungen der Ingenieurmathematik spielen für Wirtschaftsingenieure auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie weitere mathematische Gebiete wie z.B. die lineare Optimierung eine wichtige Rolle. Weder Lehrbücher der Ingenieurmathematik noch Lehrbücher der Wirtschaftsmathematik behandeln alle diese Gebiete. Es besteht der Bedarf an einem Mathematiklehrbuch für Wirtschaftsingenieure, welches alle für das Studium und die Berufspraxis relevanten Gebiete der Mathematik mit technischen und wirtschaftlichen Anwendungsbeispielen behandelt.

Mit diesem Buch soll ein solches Lehrbuch bereitgestellt werden. Es ist als Lehr- und Übungsbuch konzipiert, mit dem man sich vorlesungsbegleitend oder im Selbststudium die von Wirtschaftsingenieuren benötigte Mathematik erarbeiten kann. Dabei spielen die Übungsaufgaben mit Musterlösungen sowie eine klare, aufeinander aufbauende Struktur eine wichtige Rolle. Durch diese klare Struktur und durch übersichtliche Hervorhebungen der wichtigsten Ergebnisse und Formeln eignet sich das Buch aber auch als Nachschlagewerk für die Praxis. Hauptzielgruppe dieses Buches sind Studenten des Studienganges Wirtschaftsingenieurwesen an Fachhochschulen. Da die Ingenieurmathematik einen Teil des Inhalts bildet, eignet es sich aber auch für reine Ingenieurstudiengänge an Fachhochschulen. Entsprechend dieser Zielgruppe ist eine strenge, durchgängige und vollständige Beweisführung nicht das oberste Ziel dieses Buches, weshalb auf eine Aneinanderreihung von Sätzen und Beweisen verzichtet wird. Auch aus didaktischen Gründen wird viel Wert auf die Darstellung des Anwendungsbezuges gelegt. Anwendungsbeispiele werden nicht nur als Abschluss, sondern oft am Anfang eines Gebietes vorgestellt, um dann induktiv in das Thema einzudringen und Aussagen herzuleiten. Sätze erscheinen dann als Ergebnisse dieser Ausführungen und nicht einfach hingeschrieben, um anschließend bewiesen zu werden. Entsprechend der Zielsetzung des Buches kann und soll nicht alles bewiesen werden. Manche Herleitungen werden nur skizziert, anderes wird nicht in voller Allgemeinheit hergeleitet, manches bleibt unbewiesen. Trotzdem kann und soll jedoch nicht auf Herleitungen und Beweise verzichtet werden. Mathematik als Werkzeugkasten, aus dem man lediglich Werkzeuge (Formeln) herausnimmt und anwendet, reicht als Grundlage für das Studium und die Berufspraxis nicht aus. Vielmehr muss man in der Lage sein, die Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten der Werkzeuge zu verstehen und ggf. selbst Werkzeuge zu entwickeln, d.h. Ergebnisse herzuleiten.

Es war eine Herausforderung, die Fülle der für Wirtschaftsingenieure relevanten mathematischen Gebiete in einem einbändigen Werk zu behandeln. Ein sinnvoller und geeigneter Weg im Spannungsfeld von mathematischer Präzision und Verständlichkeit, Abstraktion und Anschaulichkeit, Ausführlichkeit und prägnanter Darstellung, Theorie und Anwendungsbezug musste gefunden werden. Da in der Praxis mathematische Problemstellungen oft den Einsatz von Computern erfordern, widmet sich ein eigenes Kapitel der Lösung mathematischer Probleme mit dem Computer. Am Beispiel des Mathematik-Softwaresystems Maple® wird gezeigt, wie die in diesem Buch behandelten mathematischen Probleme mit Hilfe eines solchen Systems gelöst werden können. Das System Maple® war (in Verbindung mit der Grafiksoftware Corel®) auch unerlässliches Werkzeug für die Erstellung der Bilder.

In der dritten Auflage wurden Druckfehler korrigiert. Für entsprechende Hinweise bedanke ich mich, ebenso im Voraus für weitere Anregungen und Verbesserungsvorschläge. Für die Arbeit mit diesem Buch wünsche ich allen Lesern viel Freude an der Mathematik!

Weiden, im Juli 2017 Christopher Dietmaier

Inhaltsverzeichnis

Ist $f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r}_0$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt:

$f(\vec{r})$ hat an der Stelle $\vec{r}_0$ ein lokales Extremum $\Rightarrow \operatorname{grad} f(\vec{r}_0)=\vec{0}$

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{grad} f(\vec{r}_0)=\vec{0}\\ \text{und}\\ \det H_f(\vec{r}_0)>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Extremum} \qquad (10.24)$$

Für ein isoliertes Extremum an der Stelle $\vec{r}_0$ gilt:

$$f_{xx}(\vec{r}_0)>0 \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Minimum} \qquad (10.25)$$

$$f_{xx}(\vec{r}_0)<0 \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Maximum} \qquad (10.26)$$

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{grad} f(\vec{r}_0)=\vec{0}\\ \text{und}\\ \det H_f(\vec{r}_0)<0\end{array}\right\}\Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ kein lokales Extremum} \qquad (10.27)$$

Bemerkungen:

1. Hat $f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r}_0$ ein isoliertes Extremum, dann sind die Vorzeichen von $f_{xx}(\vec{r}_0)$ und $f_{yy}(\vec{r}_0)$ gleich. Deshalb genügt es, das Vorzeichen von $f_{xx}(\vec{r}_0)$ zu überprüfen.
2. Ist $\operatorname{grad} f(\vec{r}_0)=\vec{0}$ und hat die Funktion $f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r}_0$ kein lokales Extremum, dann spricht man von einem ***Sattelpunkt*** an der Stelle $\vec{r}_0$.
3. Ist $\operatorname{grad} f(\vec{r}_0)=\vec{0}$ und $\det H_f(\vec{r}_0)=0$, so ist keine allgemeine Aussage über die Existenz eines Extremums an der Stelle $\vec{r}_0$ möglich.

Beispiel 10.13 $f(x,y)=x^2+y^2+10$

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(2x,2y)=\vec{0} \text{ für } (x,y)=(0,0)=(x_0,y_0).$$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=H_f(x_0,y_0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\det H_f(x_0,y_0)=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0\\ f_{xx}(x_0,y_0)=2>0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{isoliertes Minimum an der Stelle } (x_0,y_0)=(0,0)$$

Der Graph der Funktion ist in den Bildern 10.16 bis 10.20 dargestellt.

Beispiel 10.14 $f(x,y)=x^2-y^2$

grad $f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(2x,-2y)=(0,0)$ für $(x,y)=(0,0)=(x_0,y_0)$.

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=H_f(x_0,y_0)$ $\quad \det H_f(x_0,y_0)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4<0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(x_0,y_0)=(0,0)$

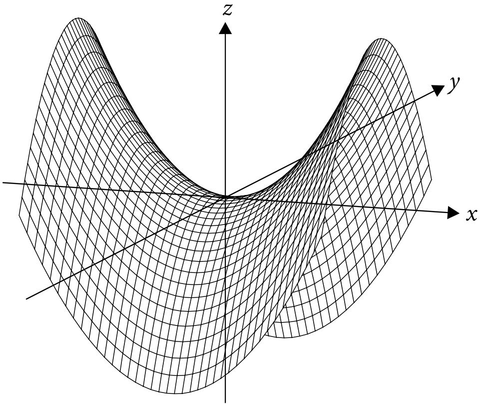

Bild 10.21

Beispiel 10.15 $f(x,y)=2x^3-3x^2-2y^3+3y^2$

grad $f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(6x^2-6x,-6y^2+6y)$

$6x^2-6x=6x(x-1)=0$ für $x=0$ oder $x=1$

$-6y^2+6y=-6y(y-1)=0$ für $y=0$ oder $y=1$

$\Rightarrow$ grad $f(x,y)=(0,0)$ an den vier Stellen $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x-6 & 0\\ 0 & -12y+6\end{pmatrix}$

$\det H_f(0,0)=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=-36<0\Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(0,0)$

$\left.\begin{array}{l}\det H_f(0,1)=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=36>0\\ f_{xx}(0,1)=-6<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ isoliertes Maximum an der Stelle $(0,1)$

$\left.\begin{array}{l}\det H_f(1,0)=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=36>0\\ f_{xx}(1,0)=6<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ isoliertes Minimum an der Stelle $(1,0)$

$\det H_f(1,1)=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=-36<0\Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(1,1)$

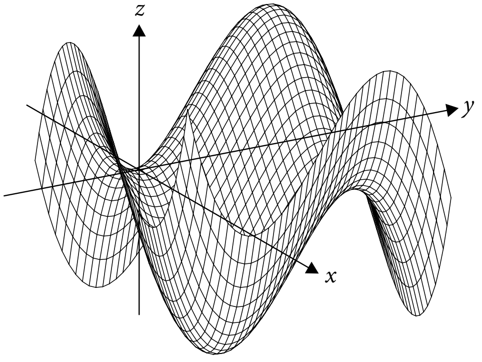

Bild 10.22

Für den Fall $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0{,}0)$ und $\det H_f(x_0, y_0) = 0$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Die nächsten drei Beispiele sollen dies demonstrieren.

Beispiel 10.16 $f(x, y) = x^4 + y^4$

$\operatorname{grad} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (4x^3, 4y^3) = (0{,}0)$ für $(x, y) = (0{,}0) = (x_0, y_0)$.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

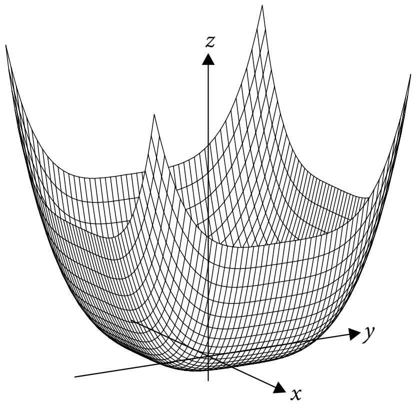

Bild 10.23

Die Funktion hat an der Stelle $(x_0, y_0) = (0{,}0)$ ein isoliertes Minimum.

Beispiel 10.17 $f(x, y) = x^4 - y^4$

$\operatorname{grad} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (4x^3, -4y^3) = (0{,}0)$ für $(x, y) = (0{,}0) = (x_0, y_0)$.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \quad H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

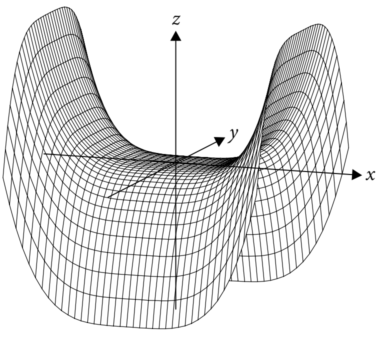

Bild 10.24

Die Funktion hat an der Stelle $(x_0, y_0) = (0{,}0)$ einen Sattelpunkt.

Beispiel 10.18 $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 - 1)) = (0{,}0)$

für $(x,y) = (0{,}0)$ und für alle (x,y) mit $x^2 + y^2 = 1$ (Kreis mit Radius $R = 1$).

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(x^2 + y^2 - 1) + 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2 + y^2 - 1) + 8y^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H_f(0{,}0) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0 \\ f_{xx}(0{,}1) = -4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{isoliertes Maximum an der Stelle } (0{,}0)$$

Für alle Punkte (x,y) auf dem Einheitskreis mit $x^2 + y^2 = 1$ gilt

$$\det H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 8y^2 \end{vmatrix} = 0$$

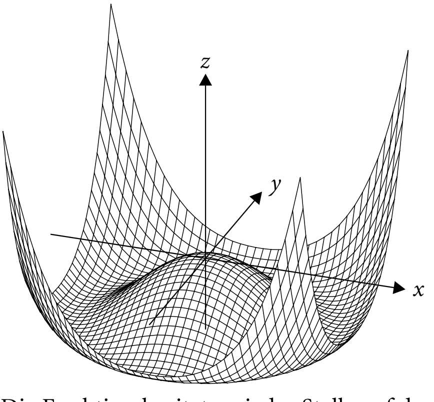

Bild 10.25

Die Funktion besitzt an jeder Stelle auf dem Einheitskreis ein nichtisoliertes Minimum: Jeder Punkt auf dem Einheitskreis besitzt eine Umgebung, in der es keine kleineren Funktionswerte gibt. Jede Umgebung eines Punktes auf dem Einheitskreis enthält aber Stellen mit gleich kleinen Funktionswerten.

Anwendungsbeispiel 10.19 Behälter mit minimaler Oberfläche

Wir wollen die Problemstellung des Einführungsbeispiels 10.1 lösen. Nach den Ausführungen zu Beginn des Abschnittes 10.4 müssen wir dazu ein Minimum der Funktion

$$f(x,y)=xy+\frac{2V}{y}+\frac{2V}{x}$$

suchen. Wir erhalten

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(y-2Vx^{-2},x-2Vy^{-2}) \quad H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 4Vx^{-3} & 1 \\ 1 & 4Vy^{-3} \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen $y-2Vx^{-2}=0$ und $x-2Vy^{-2}=0$ sind erfüllt für

$$(x,y)=(x_0,y_0)=(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$$

Für die Hesse-Matrix an der Stelle (x_0,y_0) gilt

$$H_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} 4Vx_0^{-3} & 1 \\ 1 & 4Vy_0^{-3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$$

Daraus folgt, dass die Funktion $f(x,y)$ und damit die Oberfläche minimal ist für

$$(x,y)=(x_0,y_0)=(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$$

Um Kriterien für Funktionen von mehr als zwei Variablen formulieren zu können, benötigen wir folgende Begriffe (auf die Erläuterung dieser Begriffe verzichten wir):

Wir nennen eine *symmetrische* Matrix

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

positiv definit, wenn für alle k mit $1\le k\le n$ gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}>0$$

Wir nennen sie ***negativ definit***, wenn $-A$ positiv definit ist. Wir nennen sie ***indefinit***, wenn sie weder positiv definit, noch negativ definit ist und wenn $\det A\neq 0$ ist. Die Kriterien für Extrema von Funktionen von mehreren Variablen lassen sich damit folgendermaßen formulieren.

Ist $f(\vec{x})$ an der Stelle $\vec{x}_0$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt:

$f(\vec{x})$ hat an der Stelle $\vec{x}_0$ ein lokales Extremum $\Rightarrow \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)=\vec{0}$

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)=\vec{0}\\ \text{und}\\ H_f(\vec{x}_0)\ \text{pos.definit}\end{array}\right\}\Rightarrow f(\vec{x}) \text{ hat an der Stelle } \vec{x}_0 \text{ ein isoliertes Minimum} \quad (10.28)$$

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)=\vec{0}\\ \text{und}\\ H_f(\vec{x}_0)\ \text{neg.definit}\end{array}\right\}\Rightarrow f(\vec{x}) \text{ hat an der Stelle } \vec{x}_0 \text{ ein isoliertes Maximum} \quad (10.29)$$

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)=\vec{0}\\ \text{und}\\ H_f(\vec{x}_0)\ \text{indefinit}\end{array}\right\}\Rightarrow f(\vec{x}) \text{ hat an der Stelle } \vec{x}_0 \text{ kein lokales Extremum} \quad (10.30)$$

Bemerkung: Ist $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)=\vec{0}$ und $\det H_f(\vec{x}_0)=0$, so ist keine allgemeine Aussage über die Existenz eines Extremums an der Stelle $\vec{x}_0$ möglich.

Beispiel 10.20 $f(x,y,z)=2x^3-3x^2+y^2+z^2$

$\operatorname{grad} f(x,y,z)=(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z))=(6x^2-6x,2y,2z)$

$6x^2-6x=6x(x-1)=0$ für $x=0$ oder $x=1$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y,z)=(0,0,0)$ an den Stellen $(0,0,0)$ und $(1,0,0)$.

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}12x-6 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad H_f(0,0,0)=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad H_f(1,0,0)=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$\det(-6)=-6<0\Rightarrow H_f(0,0,0)$ ist nicht positiv definit.

$$-H_f(0,0,0)=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-12<0\Rightarrow -H_f(0,0,0)$ ist nicht positiv definit.

$\Rightarrow H_f(0,0,0)$ ist nicht negativ definit.

$\det H_f(0,0,0)=-24\neq 0\Rightarrow H_f(0,0,0)$ ist indefinit.

$\Rightarrow f(x,y,z)$ hat an der Stelle $(0,0,0)$ kein lokales Extremum.

$$\det(6)=6>0 \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=12>0 \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=24>0$$

$\Rightarrow H_f(1,0,0)$ ist positiv definit.

$\Rightarrow f(x,y,z)$ hat an der Stelle $(1,0,0)$ ein isoliertes lokales Minimum.

Anwendungsbeispiel 10.21 Gewinnmaximierung

Die Gewinnfunktion beim Absatz von n Gütern mit den Absatzmengen $x_1,\ldots,x_n$, den (mengenunabhängigen) Preisen $p_1,\ldots,p_n$ und der Kostenfunktion $K(x_1,\ldots,x_n)$ lautet

$$G(x_1,\ldots,x_n)=p_1x_1+\ldots+p_nx_n-K(x_1,\ldots,x_n)$$

Das Gewinnmaximum erhält man aus dem Gleichungssystem

$$\operatorname{grad} G(x_1,\ldots,x_n)=(0,\ldots,0)=\vec{0}$$

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p_1-K_{x_1}(x_1,\ldots,x_n)&=0\\ p_2-K_{x_2}(x_1,\ldots,x_n)&=0\\ &\vdots\\ p_n-K_{x_1}(x_1,\ldots,x_n)&=0 \end{aligned}$$

Hängen die Absatzmengen von den Preisen und die Preise von den Absatzmengen ab, so sind die Mengen und die Preise Funktionen von mehreren Variablen:

$$\begin{aligned} &x_1(p_1,\ldots,p_n),\ldots,x_n(p_1,\ldots,p_n)\\ &p_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,p_n(x_1,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

In diesem Fall erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} p_1(x_1,\ldots,x_n)+\frac{\partial p_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1}x_1+\ldots+\frac{\partial p_n(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1}x_n-\frac{\partial K(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1}&=0\\ p_2(x_1,\ldots,x_n)+\frac{\partial p_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_2}x_1+\ldots+\frac{\partial p_n(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_2}x_n-\frac{\partial K(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_2}&=0\\ &\vdots\\ p_n(x_1,\ldots,x_n)+\frac{\partial p_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}x_1+\ldots+\frac{\partial p_n(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}x_n-\frac{\partial K(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}&=0 \end{aligned}$$

10.4.2 Extrema mit Nebenbedingungen

Die Problemstellung im Einführungsbeispiel 10.1 ist ein Beispiel für die Suche nach einem Extremum unter Nebenbedingungen. Gesucht ist ein Minimum der Funktion

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$$

unter der Nebenbedingung

$$xyz = V$$

Die Untersuchung solcher Problemstellungen soll zunächst für Funktionen von zwei Variablen erfolgen. Sucht man ein Extremum einer Funktion $f(x,y)$ von zwei Variablen, so bedeutet eine Nebenbedingung eine Einschränkung der Definitionsmenge. Es werden nicht mehr alle Punkte $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet, sondern nur diejenigen, welche die Nebenbedingung erfüllen. Es wird hier nur ein spezieller Typ von Nebenbedingungen betrachtet. Der eingeschränkte Definitionsbereich soll eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ darstellen, welche in impliziter Darstellung durch die Gleichung $g(x,y) = 0$ beschrieben wird. Gesucht ist also ein Extremum einer Funktion

$$f(x,y)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = 0$$

Beispiel 10.22

Gesucht sind Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$
unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x + y - 1 = 0$

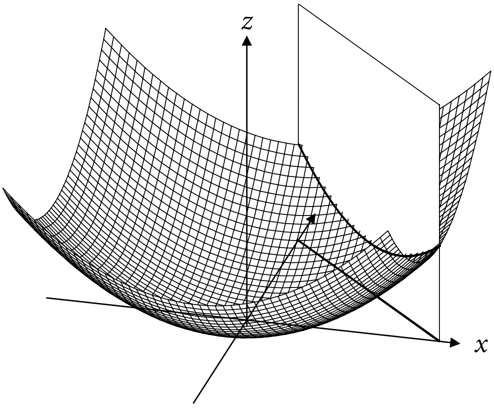

Bild 10.26

Lässt sich die Gleichung $g(x,y)=0$ nach y auflösen, so erhält man eine Gleichung $y=h(x)$, welche die Kurve in expliziter Darstellung beschreibt. Setzt man in $f(x,y)$ für y den Ausdruck $h(x)$ ein, so erhält man eine Funktion von einer Variablen x, die auf ein Extremum hin zu untersuchen ist. Es lässt sich jedoch nicht jede Nebenbedingung der Form $g(x,y)=0$ in expliziter Form darstellen. In einer Parameterdarstellung der Kurve wird diese beschrieben durch zwei Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Setzt man in $f(x,y)$ für x und y die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ ein, so erhält man wieder eine Funktion von einer Variablen t, die auf ein Extremum hin zu untersuchen ist. Wie aber findet man Extrema, wenn weder eine explizite noch eine Parameterdarstellung der Kurve bekannt ist? Es soll nun angenommen werden, dass die differenzierbaren Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ die Kurve in Parameterdarstellung beschreiben (auch wenn diese Funktionen nicht bekannt sind). Auf der Kurve gilt $g(x(t),y(t))=0$ und damit auch $\dot{g}(x(t),y(t))=0$ (Ableitungen nach dem Parameter t werden mit einem Punkt gekennzeichnet). Ist die Funktion $f(x(t),y(t))$ nach t differenzierbar, so erhält man einen Parameterwert t_0 mit der Eigenschaft, dass die Funktion $f(x(t),y(t))$ an der Stelle $t=t_0$ ein Extremum besitzt, aus der Gleichung $\dot{f}(x(t),y(t))=0$. An einem Punkt der Kurve, an dem die Funktion ein Extremum besitzt, gelten also nach (6.12) und (10.15) die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\dot{g}(x(t),y(t))=\operatorname{grad} g(x(t),y(t))\cdot(\dot{x}(t),\dot{y}(t))=0\\
&\dot{f}(x(t),y(t))=\operatorname{grad} f(x(t),y(t))\cdot(\dot{x}(t),\dot{y}(t))=0
\end{aligned}$$

Ist $(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$ solch ein Punkt, dann gilt also

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} g(x_0,y_0)\cdot(\dot{x}(t_0),\dot{y}(t_0))=g_x(x_0,y_0)\dot{x}(t_0)+g_y(x_0,y_0)\dot{y}(t_0)=0\\
&\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot(\dot{x}(t_0),\dot{y}(t_0))=f_x(x_0,y_0)\dot{x}(t_0)+f_y(x_0,y_0)\dot{y}(t_0)=0
\end{aligned}$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0)\\ f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}(t_0)\\ \dot{y}(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Nichttriviale Lösungen gibt es nur, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null ist.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0)\\ f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0)\end{vmatrix}=0\\
&\Rightarrow g_x(x_0,y_0)f_y(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)g_y(x_0,y_0)
\end{aligned}\tag{10.31}$$

Sind $g_x(x_0,y_0), g_y(x_0,y_0)\neq 0$, so folgt aus (10.31)

$$\frac{f_x(x_0,y_0)}{g_x(x_0,y_0)}=\frac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)} \tag{10.32}$$

Bezeichnet man die Quotienten in (10.32) mit $-\lambda_0$, so folgt aus (10.31) bzw. (10.32)

$$f_x(x_0,y_0)=-\lambda_0 g_x(x_0,y_0)$$
$$f_y(x_0,y_0)=-\lambda_0 g_y(x_0,y_0)$$

Die drei Gleichungen

$$f_x(x_0,y_0)+\lambda_0 g_x(x_0,y_0)=0$$
$$f_y(x_0,y_0)+\lambda_0 g_y(x_0,y_0)=0$$
$$g(x_0,y_0)=0$$

die bei einem Extremum gelten müssen, lassen sich zusammenfassen zu

$$\operatorname{grad} F(x_0,y_0,\lambda_0)=(F_x(x_0,y_0,\lambda_0),F_y(x_0,y_0,\lambda_0),F_\lambda(x_0,y_0,\lambda_0))=\vec{0}$$

mit der Lagrange-Funktion

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y).$$

Eine Stelle (x_0,y_0), an der ein Extremum vorliegt, erhält man also aus einer Lösung (x_0,y_0,λ_0) des Gleichungssystems

$$\operatorname{grad} F(x,y,\lambda)=\vec{0}.$$

Beispiel 10.23

Gesucht sind Extrema der Funktion $f(x,y)=x^2+y^2$
unter der Nebenbedingung $g(x,y)=x+y-1=0$

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$$

$$F_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0$$
$$F_y(x,y,\lambda)=2y+\lambda=0$$
$$F_\lambda(x,y,\lambda)=x+y-1=0$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt $x=y=\frac{1}{2}$.

Das Extremum befindet sich an der Stelle $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Der Graph der Funktion $f(x,y)$ und die Kurve $g(x,y)=0$ sind in Bild 10.26 dargestellt.

Die geschilderte Methode lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Lagrangesche Multiplikatorenmethode für Funktionen von zwei Variablen

Die Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ seien stetig partiell differenzierbar. Die Funktion $f(x,y)$ mit der durch die Nebenbedingung $g(x,y)=0$ eingeschränkten Definitionsmenge habe an der Stelle (x_0,y_0) ein Extremum. Ist $\operatorname{grad} g(x_0,y_0)\neq\vec{0}$, dann gelten die Gleichungen

$$f_x(x_0,y_0)+\lambda_0 g_x(x_0,y_0)=0$$
$$f_y(x_0,y_0)+\lambda_0 g_y(x_0,y_0)=0$$
$$g(x_0,y_0)=0$$

d.h. x_0,y_0 erhält man aus einer Lösung (x_0,y_0,λ_0) des Gleichungssystems

$$\operatorname{grad} F(x,y,\lambda)=(F_x(x,y,\lambda),F_y(x,y,\lambda),F_\lambda(x,y,\lambda))=\vec{0} \tag{10.33}$$

mit der ***Lagrange-Funktion***

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) \tag{10.34}$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen von n Variablen lautet:

Lagrangesche Multiplikatorenmethode für Funktionen von *n* Variablen

$f(\vec{x})$ und $g_1(\vec{x}),\ldots,g_m(\vec{x})$ ($m<n$) seien stetig partiell differenzierbare Funktionen von n Variablen. Die Funktion $f(\vec{x})$ mit der durch die Nebenbedingungen $g_i(\vec{x})=0$ ($i=1,\ldots,m$) eingeschränkten Definitionsmenge habe an der Stelle $\vec{x}_0$ ein Extremum. Besitzt die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_m(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

für $\vec{x}=\vec{x}_0$ eine m-reihige Untermatrix, deren Determinante ungleich Null ist, dann ergibt sich $\vec{x}_0$ aus einer Lösung des Gleichungssystems

$$\operatorname{grad} F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=\vec{0} \tag{10.35}$$

mit der ***Lagrange-Funktion***

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=f(\vec{x})+\lambda_1 g_1(\vec{x})+\ldots+\lambda_m g_m(\vec{x}) \tag{10.36}$$

Bemerkung: (10.33) bis (10.36) sind notwendige, aber keine hinreichenden Kriterien. Es lassen sich auch hinreichende Kriterien und Kriterien für Maxima und Minima formulieren. Diese sind jedoch sehr kompliziert und werden deshalb nicht angegeben. Die Entscheidung, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt, erfolgt hier durch Vergleich mit Funktionswerten an anderen Stellen, welche die Nebenbedingungen erfüllen.

Beispiel 10.24

Gesucht sind Extrema der Funktion $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z)=x+y-1=0$ und $g_2(x,y,z)=x+z+4=0$.

Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}g_1(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y}g_1(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z}g_1(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x}g_2(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial y}g_2(x,y,z) & \frac{\partial}{\partial z}g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt für alle (x,y,z) eine zweireihige Untermatrix, deren Determinante ungleich Null ist.

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y-1)+\lambda_2(x+z+4)$$

$$\operatorname{grad} F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\lambda_1+\lambda_2=0 & \\ 2y+\lambda_1=0 & \Rightarrow \lambda_1=-2y \\ 2z+\lambda_2=0 & \Rightarrow \lambda_2=-2z \\ x+y-1=0 & \\ x+z+4=0 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x & -y & -z & = & 0 \\ x & +y & & = & 1 \\ x & & +z & = & -4 \end{cases} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow x=-1,\ y=2,\ z=-3$$

Eine andere Stelle, welche die Nebenbedingungen erfüllt, ist $(x,y,z)=(0,1,-4)$

$f(-1,2,-3)=14<f(0,1,-4)=17 \Rightarrow$ Die Stelle $(x,y,z)=(-1,2,-3)$ ist ein Minimum.

Anwendungsbeispiel 10.25 Behälter mit minimaler Oberfläche

Wir wollen die Problemstellung des Einführungsbeispiels 10.1 lösen. Dazu suchen wir ein Extremum der Funktion

$$f(x,y,z)=xy+2xz+2yz$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z)=xyz-V=0$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x}g(x,y,z),\frac{\partial}{\partial y}g(x,y,z),\frac{\partial}{\partial z}g(x,y,z)\right)=(yz,xz,xy)\neq\vec{0}$ für alle (x,y,z), welche die Nebenbedingung erfüllen.

$$F(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-V)$$

$$F_x(x,y,z,\lambda)=y+2z+\lambda yz=0\Rightarrow xy+2xz+\lambda xyz=0 \qquad \text{(I)}$$
$$F_y(x,y,z,\lambda)=x+2z+\lambda xz=0\Rightarrow xy+2yz+\lambda xyz=0 \qquad \text{(II)}$$
$$F_z(x,y,z,\lambda)=2x+2y+\lambda xy=0\Rightarrow 2xz+2yz+\lambda xyz=0 \qquad \text{(III)}$$
$$F_\lambda(x,y,z,\lambda)=xyz-V=0\Rightarrow xyz=V \qquad \text{(IV)}$$

$$\text{(I),(II)}\Rightarrow 2xz=2yz\Rightarrow x=y$$

$$\text{(I),(III)}\Rightarrow xy+2xz=4xz\Rightarrow xy=2xz\Rightarrow z=\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}x$$

$$\text{(IV)}\Rightarrow xyz=\frac{1}{2}x^3=V\Rightarrow x=\sqrt[3]{2V}=y\,,\ z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$$

$$f(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V},\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V})=\sqrt[3]{108}\sqrt[3]{V}^2\approx 4{,}76\sqrt[3]{V}^2<f(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})=5\sqrt[3]{V}^2$$

Die Oberfläche ist minimal für $(x,y,z)=(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V},\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V})$

Anwendungsbeispiel 10.26 Kostenminimierung

Die Kostenfunktion $K(r_1,\ldots,r_n)$ für die Produktion mit *n* Inputfaktoren und dem Output (Produktionsfunktion) $x(r_1,\ldots,r_n)$ ist eine Funktion der Mengen $r_1,\ldots,r_n$ der *n* verschiedenen Inputfaktoren. Soll ein vorgegebener Output $x(r_1,\ldots,r_n)=c$ mit minimalen Kosten produziert werden, so ist ein Minimum der Funktion $K(r_1,\ldots,r_n)$ gesucht unter der Nebenbedingung $g(r_1,\ldots,r_n)=x(r_1,\ldots,r_n)-c=0$. Das Minimum erhält man aus der Lösung des Gleichungssystems

$$\operatorname{grad} F(r_1,\ldots,r_n,\lambda)=\vec{0}$$

mit der Lagrange-Funktion

$$F(r_1,\ldots,r_n,\lambda)=K(r_1,\ldots,r_n)+\lambda g(r_1,\ldots,r_n)=K(r_1,\ldots,r_n)+\lambda(x(r_1,\ldots,r_n)-c)$$

10.5 Aufgaben

Aufgabe 10.1

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Stellen, an denen die Funktionen lokale Extrema besitzen und bestimmen Sie die Art der Extrema. Bestimmen Sie, ob es sich bei einem Extremum um ein Maximum oder Minimum handelt und ob das Extremum isoliert ist.

a) $f(x,y)=2x^3+4xy-2y^3+5$

b) $f(x,y)=\ln(xy)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$

c) $f(x,y)=x^4-2x^2-2y^3+3y^2$

d) $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$

e) $f(x,y)=x^3-3xy^2$

f) $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$

g) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+2z+x$

h) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)$

Aufgabe 10.2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Stellen, an denen die Funktionen Extrema unter den angegebenen Nebenbedingungen besitzen und bestimmen Sie die Art der Extrema (Maximum oder Minimum).

a) $f(x,y)=xy$ $\qquad g(x,y)=x^2+y^2-1=0$

b) $f(x,y)=xy^2$ $\qquad g(x,y)=x^2+y^2-1=0$

c) $f(x,y)=3x^3+3y^3-x-y$ $\qquad g(x,y)=x+y-2=0$

d) $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)$ $\qquad g(x,y)=x+y-2=0$

e) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad g(x,y)=x+y-1=0$

f) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$ $\qquad g(x,y,z)=x+y+z-3=0$

g) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$ $\qquad g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$

h) $f(x,y,z)=-3x+y+5z$ $\qquad g_1(x,y,z)=x+y+z=0$
$\qquad g_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$

11 Integralrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen

11.1 Bereichsintegrale

Einführungsbeispiel 11.1 Ladung auf einer Oberfläche

Befindet sich eine Punktladung Q im Abstand h über einer leitenden (unendlich ausgedehnten) Ebene (x-y-Ebene), so stellt sich auf der Ebene eine Ladungsverteilung ein, die durch folgende Flächenladungsdichte beschrieben wird:

$$\sigma(x,y) = -\frac{hQ}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+h^2)^3}}$$

Die Frage nach der Ladung Q_A auf einer Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$ führt zu dem Bereichsintegral

$$Q_A = \iint_A \sigma(x,y)\,dF \ .$$

11.1.1 Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen

Um ein Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen zu erläutern und zu klären, wie es berechnet werden kann, betrachten wir das Einführungsbeispiel 11.1. Auf der in Bild 11.1 gezeigten Fläche A sei eine Ladung verteilt. Die Verteilung werde beschrieben durch eine Ladungsverteilungsfunktion $\sigma(x,y)$. Nimmt man an, dass die Funktion $\sigma(x,y)$ in A stetig oder sogar differenzierbar ist und in einer kleinen Teilfläche ΔA mit Flächeninhalt ΔF nicht sehr stark variiert, so ist die Ladung ΔQ auf der Teilfläche ΔA näherungsweise $\sigma(x,y)\Delta F$, wobei (x,y) eine Stelle auf der Fläche ΔA ist. Die Fläche A wird nun in n kleine Teilflächen ΔA_i mit den Flächeninhalten ΔF_i und den Ladungen $\Delta Q_i \approx \sigma(x_i, y_i)\Delta F_i$ zerlegt, wobei (x_i, y_i) eine Stelle auf der Fläche ΔA_i ist (s. Bild 11.2).

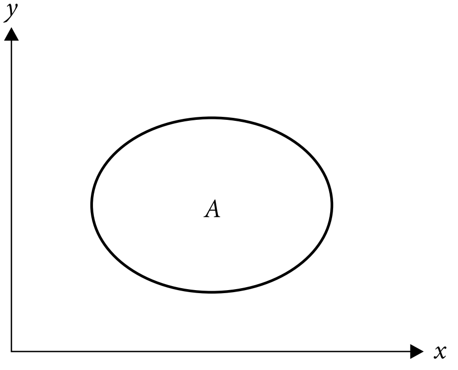

Bild 11.1

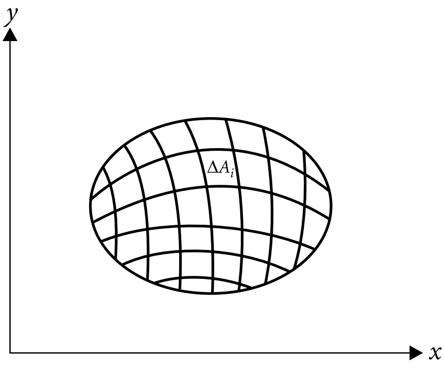

Bild 11.2

Für die Gesamtladung Q_A gilt

$$Q_A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i, y_i)\Delta F_i$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen“ Zerlegung, d.h. für $n \to \infty$ und $\Delta F_i \to 0$ erhält man die Ladung Q_A exakt.

$$Q_A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta F_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i, y_i)\Delta F_i = \iint_A \sigma(x, y)dF \tag{11.1}$$

Dieser Grenzwert heißt ***Bereichs-, Gebiets- oder Flächenintegral*** der Funktion $\sigma(x, y)$ über den Bereich (Fläche) A und wird durch ein Zweifachintegral dargestellt.

Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen

$A \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Bereich im $\mathbb{R}^2$ mit endlichem Flächeninhalt $F \neq 0$. Die Funktion $f(x, y)$ sei in A beschränkt und stetig. Z_n sei eine Zerlegung des Bereiches A in n Teilbereiche ΔA_i mit den Flächeninhalten ΔF_i und beliebigen Stellen $(x_i, y_i) \in \Delta A_i$. Gilt für alle Folgen (Z_n) von Zerlegungen mit $n \to \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta F_i = 0$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta F_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta F_i = I \tag{11.2}$$

dann heißt I das ***Bereichsintegral*** der Funktion $f(x, y)$ über den Bereich A.

Schreibweise: $I = \iint_A f(x, y)dF$

Für Bereichsintegrale von Funktionen von zwei Variablen gelten folgende Aussagen:

$a,b \in \mathbb{R}$ seien reelle Zahlen und $A, B \subset \mathbb{R}^2$ zwei Bereiche mit endlichen Flächeninhalten $F_A, F_B \neq 0$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Dann gilt:

$$F_A = \iint_A dF \tag{11.3}$$

$$\iint_A (af(x,y) + bg(x,y))dF = a\iint_A f(x,y)dF + b\iint_A g(x,y)dF \tag{11.4}$$

$$\iint_{A \cup B} f(x,y)dF = \iint_A f(x,y)dF + \iint_B f(x,y)dF \tag{11.5}$$

11.1.1.1 Integration in kartesischen Koordinaten

Um zu klären, wie das Bereichsintegral (11.1) berechnet werden kann, betrachten wir einen Bereich A, wie er in Bild 11.3 zu sehen ist. Für diesen Bereich A gilt

$$A = \{(x,y) \mid x_1 \le x \le x_2 \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\} \tag{11.6}$$

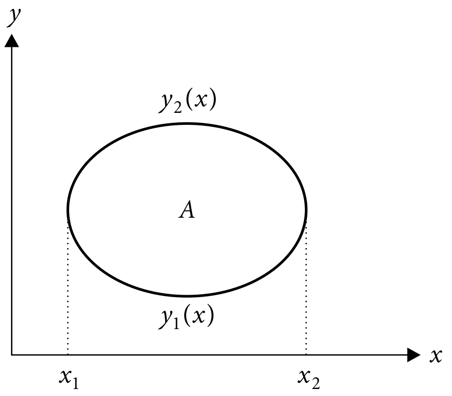

Bild 11.3

Wir zerlegen die Fläche A in streifenförmige Teilflächen ΔA_j der Breite Δx_j an den Stellen x_j und zerlegen jeden Streifen in Teilflächen ΔA_{jk} mit der Höhe Δy_k an den Stellen (x_j, y_k), wie in Bild 11.4 gezeigt. Außer der obersten und untersten Teilfläche sind alle diese Teilflächen Rechtecke mit den Seitenlängen $\Delta x_j, \Delta y_k$ und den Flächeninhalten $\Delta F_{jk} = \Delta x_j \Delta y_k$. Für die Ladung ΔQ_{jk} auf der Teilfläche ΔA_{jk} gilt

$$\Delta Q_{jk} \approx \sigma(x_j, y_k)\Delta x_j \Delta y_k$$

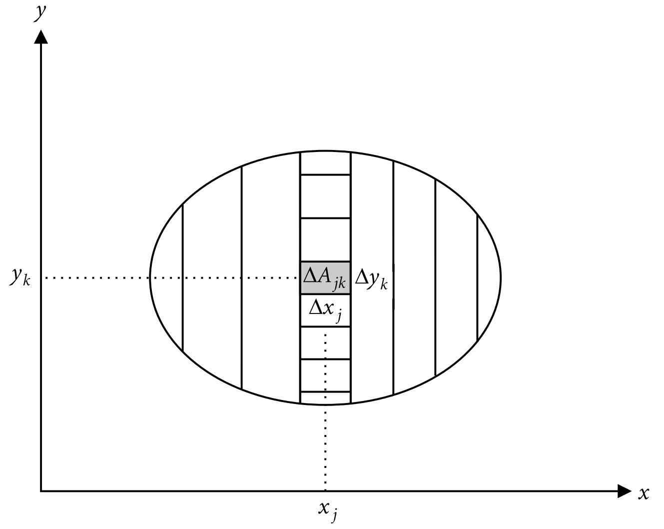

Bild 11.4

Für die Ladung ΔQ_j auf dem Streifen ΔA_j gilt

$$\Delta Q_j \approx \sum_k \sigma(x_j, y_k)\Delta x_j \Delta y_k = \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k)\Delta y_k\right)\Delta x_j$$

Für die Ladung Q_A auf der Fläche A gilt

$$Q_A \approx \sum_j \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k)\Delta y_k\right)\Delta x_j$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen" Zerlegung $\Delta y_k \to 0$ erhält man

$$\sum_j \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k)\Delta y_k\right)\Delta x_j \to \sum_j \left(\int_{y_1(x_j)}^{y_2(x_j)} \sigma(x_j, y)dy\right)\Delta x_j \, .$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen" Zerlegung $\Delta x_j \to 0$ erhält man

$$\sum_j \left(\int_{y_1(x_j)}^{y_2(x_j)} \sigma(x_j, y)dy\right)\Delta x_j \to \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x, y)dy\right)dx \, .$$

Damit ist die Berechnung dieses Flächenintegrals zurückgeführt auf zwei aufeinander folgende Integrationen. Die Integrationsgrenzen bei dem Integral mit der Integrationsvariablen *y* hängen von *x* ab und sind damit Funktionen von *x*. Die in Bild 11.3

gezeigte Fläche A könnte man statt in der Form (11.6) auch folgendermaßen beschreiben (s. Bild 11.5):

$$A = \{(x, y) \mid y_1 \le y \le y_2 \wedge x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

Für das Bereichsintegral über die Fläche A gilt damit:

$$\iint_A \sigma(x, y)dF = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \sigma(x, y)dx \right) dy$$

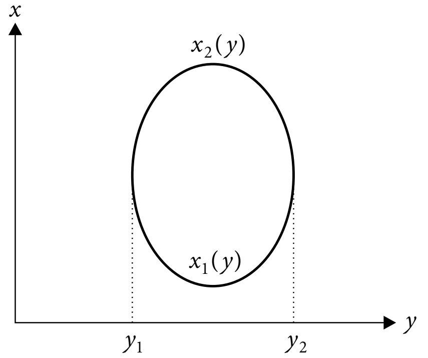

Bild 11.5

Die Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Bereichsintegrale im $\mathbb{R}^2$ in kartesischen Koordinaten

$f(x, y)$ sei eine in $A \in \mathbb{R}^2$ stetige Funktion. Ist A gegeben durch

$$A = \{(x, y) \mid x_1 \le x \le x_2 \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\} \qquad (11.7)$$

mit zwei stetigen Funktionen $y_1(x), y_2(x)$, dann gilt

$$\iint_A f(x, y)dF = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx \qquad (11.8)$$

Ist A gegeben durch

$$A = \{(x, y) \mid y_1 \le y \le y_2 \wedge x_1(y) \le x \le x_2(y)\} \qquad (11.9)$$

mit zwei stetigen Funktionen $x_1(y), x_2(y)$, dann gilt

$$\iint_A f(x, y)dF = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \right) dy \qquad (11.10)$$

Mengen A mit der Eigenschaft (11.7) oder (11.9) heißen ***Normalbereiche***.

Beispiel 11.2 Flächenmoment eines Viertelkreises

A sei ein Viertelkreis mit Radius R und Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$A=\{(x,y)\,|\,0\le x\le R\wedge 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\}$$

Für das Flächenmoment $I_x=\iint\limits_A y^2dF$ erhält man

$$I_x=\iint\limits_A y^2dF=\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}y^2dy\right)dx=\int_0^R\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{1}{3}\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}^{\,3}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x}{4}\sqrt{R^2-x^2}^{\,3}+\frac{3}{8}R^2x\sqrt{R^2-x^2}+\frac{3}{8}R^4\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^R$$

$$=\frac{1}{8}R^4\arcsin(1)=\frac{\pi}{16}R^4$$

Beispiel 11.3 Flächeninhalt eines Halbkreises

A sei ein Halbkreis mit Radius R und Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$A=\{(x,y)\,|\,-R\le x\le R\wedge 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\}$$

$$F=\iint\limits_A dF=\int_{-R}^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\right)dx=\int_{-R}^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^R$$

$$=\frac{R^2}{2}\arcsin(1)-\frac{R^2}{2}\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}R^2$$

Beispiel 11.4 Geometrischer Schwerpunkt eines Halbkreises

$$A=\{(x,y)\,|\,-R\le x\le R\wedge 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\}$$

Die y-Komponente y_S des geometrischen Schwerpunktes ist

$$y_S=\frac{1}{F}\iint\limits_A ydF=\frac{1}{F}\int_{-R}^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy\right)dx=\frac{1}{F}\int_{-R}^R\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{1}{2F}\int_{-R}^R(R^2-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2F}\cdot\frac{4}{3}R^3=\frac{4}{3\pi}R$$

Für rechteckige Normalbereiche mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind die Integrationsgrenzen Konstanten.

16 Lineare Optimierung

Einführungsbeispiel 16.1 Optimales Produktionsprogramm

Ein mittelständisches Unternehmen produziert zwei Artikel (Artikel A_1 und Artikel A_2). Der Artikel A_1 benötigt je Mengeneinheit eine Herstellungszeit von 0,5 Stunden auf Maschine M_1, zwei Stunden auf Maschine M_2 und 1,5 Stunden auf Maschine M_3. Der Artikel A_2 benötigt je Mengeneinheit eine Herstellungszeit von zwei Stunden auf Maschine M_1, drei Stunden auf Maschine M_2 und 0,5 Stunden auf Maschine M_3. Die Maschine M_1 steht täglich 12 Stunden, die Maschine M_2 23 Stunden und die Maschine M_3 12 Stunden zur Verfügung. Mit einer Mengeneinheit von Artikel A_1 erzielt man einen Gewinn von 2000 €, mit einer Mengeneinheit von Artikel A_2 einen Gewinn von 4000 €. Es werden täglich x_1 Mengeneinheiten von Artikel A_1 und x_2 Mengeneinheiten von Artikel A_2 produziert. Es stellt sich die Frage, wie x_1 und x_2 gewählt werden müssen, damit der Gewinn maximal wird.

16.1 Grafische Lösung und Simplex-Algorithmus

In vielen Fällen führt die Suche nach der optimalen Lösung einer Problemstellung auf die Suche nach dem Maximum oder Minimum einer bestimmten Größe, z.B. zur

- Maximierung des Gewinns
- Minimierung von Kosten

Die Größe, die maximiert oder minimiert werden soll, hängt i.d.R. von mehreren anderen Größen ab, die variiert werden können, um ein Optimum (Maximum oder Minimum) zu erhalten. Die mathematische Aufgabenstellung ist die Bestimmung des Extremums einer Funktion von mehreren Variablen. Die Größen, die variiert werden können (Variablen), dürfen i.d.R. jedoch nicht beliebig variiert werden, sondern müssen bestimmten Nebenbedingungen genügen. Sind die Nebenbedingungen und die zu maximierende bzw. minimierende Funktion linear in den Variablen, so spricht man von ***linearer Optimierung***. Für lineare Optimierung wird im Folgenden häufig die Kurzschreibweise ***LO*** verwendet. Beim Einführungsbeispiel 16.1 ist dies der Fall.

Die Suche nach dem optimalen Produktionsprogramm ist ein typisches Beispiel für lineare Optimierung. Anhand dieses Beispiels soll die Problemstellung und Lösung dargestellt werden.

Die Angaben im Einführungsbeispiel 16.1 führen zu folgenden Größen und Beziehungen:

Gewinn an einem Tag:	$G = x_1 2000\,€ + x_2 4000\,€$
	$= (x_1 + 2x_2) 2000\,€$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_1:	$t_1 = x_1 0{,}5\text{h} + x_2 2\text{h} \le 12\text{h}$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_2:	$t_2 = x_1 2\text{h} + x_2 3\text{h} \le 23\text{h}$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_3:	$t_3 = x_1 1{,}5\text{h} + x_2 0{,}5\text{h} \le 12\text{h}$

Die mathematische Problemstellung lautet (Um ganze Zahlen zu erhalten, wurden zwei Ungleichungen mit der Zahl 2 multipliziert.):

Gesucht ist das Maximum der Funktion $Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 23 \\ 3x_1 + x_2 &\le 24 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Dieses Problem hat die Form eines LO-Problems in der Standard- oder Grundform.

Grundform eines LO-Problems

Maximiere die Funktion

$$Z(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \tag{16.1}$$

unter den m Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n &\le b_1 \\ a_{21} x_1 + \ldots + a_{2n} x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n &\le b_m \end{aligned} \tag{16.2}$$

$$x_1, \ldots, x_n \ge 0 \tag{16.3}$$

Die Funktion $Z(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ heißt ***Zielfunktion***.
Die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ werden ***Strukturvariablen*** genannt.
Die Zahlen $b_1, \ldots, b_m$ heißen ***Restriktionswerte*** oder ***Primalwerte***.
Die Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ nennt man ***Zielfunktionskoeffizienten*** oder ***Dualwerte***.
Die Zahlen a_{ij} heißen ***technische Koeffizienten***.

16.1.1 Grafische Lösung

Hat man nur zwei Variablen, so kann man die Lösung eines LO-Problems grafisch ermitteln. Dies soll anhand des Einführungsbeispiels 16.1 geschehen.

Gesucht ist das Maximum der Funktion $Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 23$$
$$3x_1 + x_2 \leq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Die Nebenbedingungen können folgendermaßen formuliert werden:

$$x_2 \leq -\frac{1}{4}x_1 + 6$$
$$x_2 \leq -\frac{2}{3}x_1 + \frac{23}{3}$$
$$x_2 \leq -3x_1 + 24$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Die Menge der Punkte (x_1, x_2) in einem kartesischen Koordinatensystem, für welche diese fünf Nebenbedingungen erfüllt sind, wird eingegrenzt durch die fünf Geraden

$$g_1 : x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + 6$$
$$g_2 : x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{23}{3}$$
$$g_3 : x_2 = -3x_1 + 24$$
$$g_4 : x_1 = 0$$
$$g_5 : x_2 = 0$$

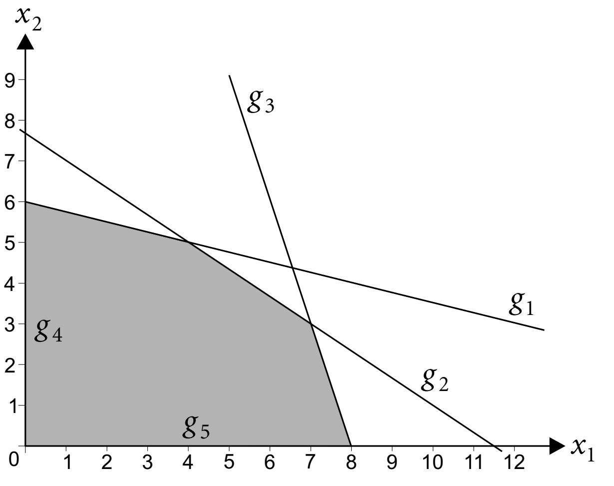

Bild 16.1

Diese in Bild 16.1 grau schattiert dargestellte Menge wird ***zulässiger Bereich*** genannt. Gesucht ist der Punkt im zulässigen Bereich, für den $Z = x_1 + 2x_2$ maximal wird. Für einen festen Wert von Z liegen die Punkte mit $Z = x_1 + 2x_2$ auf einer Geraden mit

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{Z}{2}$$

Die Steigung dieser Geraden ist $-\frac{1}{2}$. Sie schneidet die x_2-Achse bei dem x_2-Wert

$$x_2 = \frac{Z}{2}$$

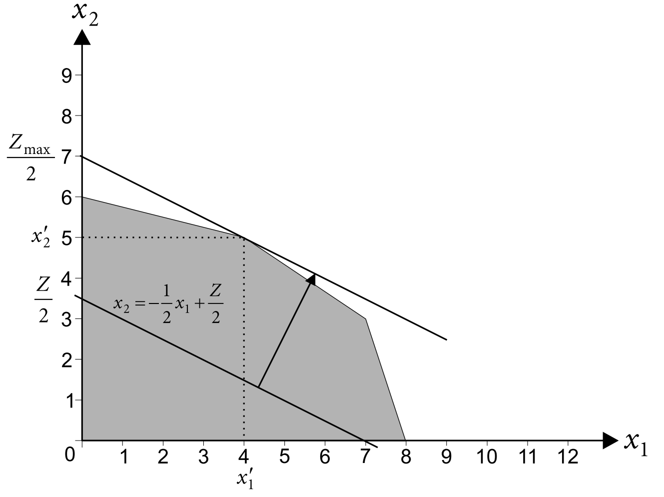

Bild 16.2

Durch Parallelverschiebung dieser Geraden (Beibehaltung der Steigung) nach oben vergrößern wir den Wert von Z. Dies tun wir so lange, bis gerade noch ein Punkt auf der Geraden im zulässigen Bereich liegt. Für diesen Punkt (x_1', x_2') beträgt der Wert der Zielfunktion

$$Z = x_1' + 2x_2' = Z_{\max}$$

Für jeden größeren Wert $Z > Z_{\max}$ liegen alle Punkte auf der Geraden

$$Z = x_1 + 2x_2$$

außerhalb des zulässigen Bereiches. Der Wert $Z_{\max}$ ist das gesuchte Maximum, die Werte x_1' und x_2' sind die gesuchten Werte von x und y, für welche die Zielfunktion maximal wird. In unserem Beispiel erhält man folgende Werte: $x_1' = 4$, $x_2' = 5$, $Z_{\max} = 14$.

16.1.2 Der Simplex-Algorithmus

Die Grundform eines LO-Problems lautet:

Maximiere die Funktion $Z(x_1,\ldots,x_n)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n$ (16.4)

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n &\le b_1\\
a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n &\le b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n &\le b_m
\end{aligned}
\tag{16.5}
$$

$$x_1,\ldots,x_n \ge 0 \tag{16.6}$$

Ein Punkt bzw. Element $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass die Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ alle Nebenbedingungen (16.5) und (16.6) erfüllen, heißt ***zulässige Lösung*** des LO-Problems. Die Menge aller zulässigen Lösungen heißt ***zulässiger Bereich***. Bei zwei Variablen ist der zulässige Bereich ein Bereich im $\mathbb{R}^2$, der von Geraden eingegrenzt wird. Die Eckpunkte des zulässigen Bereiches sind Schnittpunkte zweier Geraden. Bei drei Variablen ist der zulässige Bereich ein Bereich im $\mathbb{R}^3$, der von Ebenen eingegrenzt wird. Die Eckpunkte des zulässigen Bereiches sind Schnittpunkte dreier Ebenen. Eine zulässige Lösung mit der Eigenschaft, dass es keine andere zulässige Lösung mit einem größeren Wert der Zielfunktion gibt, heißt die ***optimale Lösung*** des LO-Problems. Da die Ungleichung

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n \le b_i$$

äquivalent ist zu

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n = b_i - y_i \text{ mit } y_i \ge 0$$

bzw. zu

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n + y_i = b_i \text{ mit } y_i \ge 0\,,$$

kann ein LO-Problem in der Grundform auch folgendermaßen formuliert werden:

Maximiere die Funktion $Z(x_1,\ldots,x_n)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n$ (16.7)

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n+y_1 &= b_1\\
a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n+y_2 &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n+y_m &= b_m
\end{aligned}
\tag{16.8}
$$

$$x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m \ge 0 \tag{16.9}$$

Die Variablen $y_1,\ldots,y_m$ heißen ***Schlupfvariablen*** oder ***Leerlaufvariablen***. In dieser Formulierung lautet das LO-Problem des Einführungsbeispiels 16.1:

Maximiere die Funktion $\quad Z(x_1,x_2)=x_1+2x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1+4x_2+y_1=24$$
$$2x_1+3x_2+y_2=23$$
$$3x_1+x_2+y_3=24$$
$$x_1,x_2,y_1,y_2,y_3\geq 0$$

Auf jeder Geraden, die den zulässigen Bereich eingrenzt, ist eine Variable Null. An jedem Eckpunkt des zulässigen Bereiches (Schnittpunkt zweier Geraden) sind zwei Variablen Null.

Gerade	Variable, die Null ist
$x_1+4x_2=24$	y_1
$2x_1+3x_2=23$	y_2
$3x_1+x_2=24$	y_3
$x_1=0$	x_1
$x_2=0$	x_2

Eckpunkt	Variablen, die Null sind
$P_1=(0,0)$	x_1,x_2
$P_2=(0,6)$	x_1,y_1
$P_3=(4,5)$	y_1,y_2
$P_4=(7,3)$	y_2,y_3
$P_5=(8,0)$	y_3,x_2

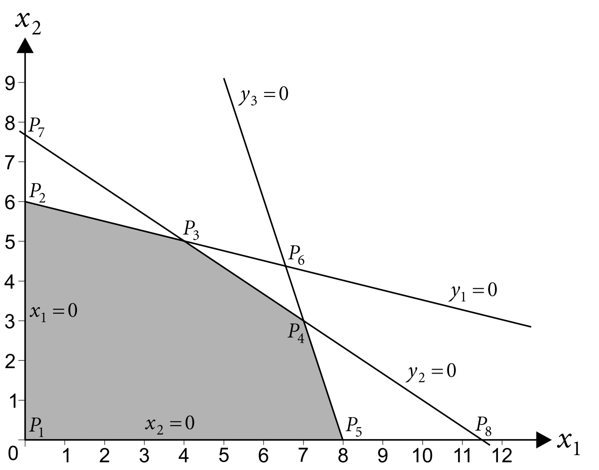

Bild 16.3

Nicht jeder Schnittpunkt ist Eckpunkt des zulässigen Bereiches. Die Punkte P_6,P_7,P_8 in Bild 16.3 gehören z.B. nicht zum zulässigen Bereich. Von den insgesamt zehn Schnittpunkten liegen fünf nicht im zulässigen Bereich. Diese Punkte sind dadurch gekennzeichnet, dass mindestens eine der drei Variablen, die nicht Null sind, einen negativen Wert hat.

Sachwortverzeichnis