Exkurs GTR: TI Casio

- Funktionsterm eingeben und zeichnen

TI: [Y=] Funktion eingeben [GRAPH]

Casio: [MENU] [GRAPH] [EXE] Funktion eingeben [EXE] [DRAW]

Darstellung: Unter [WINDOW] x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max} für Ausschnitt vernünftig einstellen **oder** Wertetabelle [TABLE] aufrufen, um Info über vernünftige Werte zu bekommen (siehe Wertetabelle) **oder**

TI: [ZOOM] [Fit]

Casio: [ZOOM] [AUTO] ; GTR zeichnet Funktion automatisiert ins Fenster.

Vorsicht: Ergeben sich für Lösungen Werte, die außerhalb des definierten [WINDOW] liegen, wird der GTR diese nicht angeben und stattdessen eine Fehlermeldung anzeigen.

In beiden Modellen werden die Funktionen gezeichnet, deren = bei Y= schwarz unterlegt ist.

Möchte man Funktionsterme im GTR zeitweise inaktiv stellen, kann dies durch die schwarze Unterlegung gesteuert werden:

TI: mit Cursor auf = , dann [ENTER]

Casio: auf Funktionsterm, dann [SEL] mit [F1]

- Wertetabelle aufrufen

TI: Wertetabelle findet man unter [TABLE] , also [2nd] [GRAPH]

Einstellungen der Wertetabelle unter [TBLSET] , also [2nd] [WINDOW]

Casio: [MENU] [TABLE] [EXE] [TABL]

Einstellungen der Wertetabelle unter [SET]

- Y-Wert zu bekanntem x-Wert berechnen

TI: [CALC] , also [2nd] [TRACE] [Value] Eingabe des x-Wertes für gewünschte Stelle

Casio: [G-Solv] , also [SHIFT] [F5] [→] [Y-CAL] Eingabe des x-Wertes für gewünschte Stelle

- Nullstellen einer Funktion berechnen

TI: CALC , also 2nd TRACE ZERO ; dann Werte eingeben, die links und rechts der gesuchten Nullstelle liegen, je mit ENTER bestätigen.

Casio: G-Solv , also SHIFT F5 ROOT

- Schnittpunkte zweier Schaubilder

TI: CALC also 2nd TRACE Intersect ENTER ; Cursor zum Schnittpunkt 3-mal ENTER

Casio: G-Solv also SHIFT F5 ISCT ; mit großer Cursor-Taste kommt man sofort zu allen Schnittpunkten.

- Lösen von Gleichungen

wird immer anhand einer Nullstellenberechnung durchgeführt, da man jede Gleichung so umformen kann, dass man „Term = 0“ erhält. Diesen Term als Funktion y= eingeben und dessen Nullstellen berechnen (siehe oben).

- Ableitungswerte – Steigungen – momentane Änderungsraten

TI: CALC , also 2nd TRACE dy/dx ENTER ; ohne Aufforderung x-Wert eingeben

Casio: MENU RUN-MAT EXE OPTN CALC d/dx VARS GRPH Y 1 , x-Stelle) EXE

- Ableitungsfunktionen zeichnen

TI: Y= Funktion unter Y_1 = eingeben; Eingabe unter Y_2 = nDeriv VARS Y-VARS ENTER Auswahl von Y_1 ENTER , X , X)

Casio: GRAPH Funktion unter Y_1 = eingeben; Eingabe unter Y_2 = OPTN CALC d/dx Y 1 , X) EXE DRAW

Auch hier kann man sich über den Befehl TABLE die Wertetabelle für die Ableitungsfunktion anzeigen lassen.

- Extrempunkte – Maximum – Minimum

TI: Y= Funktion unter Y= eingeben CALC Minimum oder Maximum auswählen ENTER

Casio: GRAPH Funktion unter Y= eingeben G-Solv MAX MIN

- Wendepunkte

werden über den Extremwert der 1.Ableitung berechnet, da es keinen GTR-Befehl für WP gibt.

TI: unter Y_1= Eingabe der Funktion, dann unter Y_2 Ableitungsfunktion zeichnen lassen (siehe oben), CALC Minimum oder Maximum ENTER

Casio: GRAPH unter Y_1= Eingabe der Funktion, dann unter Y_2 Ableitungsfunktion zeichnen lassen (siehe oben), G-Solv MAX oder MIN

- Spezielle Fragestellung bei Wachstumsaufgaben

Der wachsende Bestand einer Population wird durch f(t) modelliert.

In welchem 2-Jahres-Zeitraum (2 h, 2 min. etc.) ändert sich der Bestand der Population um 50 Individuen?

Die Frage führt zur Gleichung: $f(t+2) - f(t) = 50$

TI: $Y_1 = f(t)$ Eingabe, $Y_2 = Y_1(t+2) - Y_1$, $Y_3 = 50$, Y_2 und Y_3 zeichnen lassen, CALC INTERSECT berechnet Schnittpunkt der Schaubilder.

Casio: GRAPH $Y_1 = f(t)$ Eingabe, $Y_2 = Y_1(t+2) - Y_1$, $Y_3 = 50$, Y_2 und Y_3 zeichnen lassen, G-Solv ISCT berechnet Schnittpunkt der Schaubilder.

- Tangentenaufgaben

1. Bestimmung der Tangentengleichung an bekanntem Berührpunkt

TI: Y= Funktion eingeben, mit GRAPH zeichnen DRAW mit 2nd PRGM aufrufen Tangent Eingabe des x-Wertes an der Tangente berührt

Casio: MENU GRAPH Funktion eingeben Sketch Tang Eingabe des x-Wertes an der Tangente berührt EXE EXE

Hinweis: Damit der GTR die Tangentengleichung angeben kann, muss unter SET UP der Unterpunkt „Derivative“ auf ON stehen.

2. Bestimmung der Tangentengl. an unbekanntem Berührpunkt durch kurvenfernen Punkt

Unbekannter Berührpunkt $B(u \mid f(u))$ und bekannter kurvenferner Punkt z.B. $P(1 \mid 2)$

werden in die allgemeine Tangentengleichung eingesetzt:

Mit B: $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

Mit P noch: $2 = f'(u) \cdot (1-u) + f(u)$

Diese Gleichung gleich 0 setzen: $0 = f'(u) \cdot (1-u) + f(u) - 2$

Eingabe: $y_1 = f(x)$ $y_2 = f'(x)$ $y_3 = y_2 \cdot (1-x) + y_1 - 2$

Schaubild von y_3 zeichnen lassen und Nullstellen bestimmen (siehe Kapitel oben).

Die Ergebnisse sind die gesuchten Berührstellen der Tangenten.

Angabe der Tangentengleichungen wie unter **1.**

- Berechnung von Integralen

1. Im Rechenfenster

Eingabe der Funktionsgleichung unter Y_1=

TI: $\boxed{\text{MATH}}$ fnInt $\boxed{\text{VARS}}$ $\boxed{\text{Y-VARS}}$ Y_1 auswählen $\boxed{,}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{,}$

untere Grenze, obere Grenze) $\boxed{\text{ENTER}}$

Casio: $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{F4}}$ $\boxed{\text{VARS}}$ $\boxed{\text{GRPH}}$ $\boxed{\text{Y}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ untere Grenze, obere Grenze) $\boxed{\text{EXE}}$

2. Fläche zwischen Graph und x-Achse im Schaubild

Eingabe der Funktionsgleichung unter Y_1=, Schaubild zeichnen

TI: $\boxed{\text{CALC}}$ $\int f(x)dx$ $\boxed{\text{ENTER}}$ untere Grenze $\boxed{\text{Enter}}$ obere Grenze $\boxed{\text{Enter}}$

Casio: $\boxed{\text{G-Solv}}$ $\boxed{\text{F6}}$ $\int dx$ untere Grenze $\boxed{\text{EXE}}$ obere Grenze $\boxed{\text{EXE}}$

Kreuzt das Schaubild die x-Achse, also von positiven y-Werten zu negativen y-Werten, muss abschnittsweise von Nullstelle zu Nullstelle integriert werden, wenn die Gesamtfläche gefragt ist.

3. Fläche, die durch 2 Schaubilder von f(x) und g(x) begrenzt wird

Eingabe der Funktionsgleichungen unter $y_1 = f(x)$ und $y_2 = g(x)$, Schaubilder zeichnen

Schnittpunkte berechnen (siehe oben)

$y_3 = y_1 - y_2$, wenn Graph von $f(x)$ im Intervall zwischen den Schnittpunkten über dem Graph von $g(x)$ verläuft.

Flächenberechnung mit y_3 zwischen den Nullstellen des Graphen (x-Werte der ermittelten Schnittpunkte) wie unter **2.**

4. Zeichnen einer Integralfunktion mit unbekannter oberer Grenze

Unter Y_1= wurde der Funktionsterm eingegeben

TI: Y_2= $\boxed{\text{MATH}}$ fnInt $\boxed{\text{VARS}}$ $\boxed{\text{Y-VARS}}$ Y_1 auswählen $\boxed{,}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{,}$ untere Grenze, X) $\boxed{\text{ENTER}}$

Casio: Y_2= $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{F3}}$ $\boxed{\text{VARS}}$ $\boxed{\text{GRPH}}$ $\boxed{\text{Y}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ untere Grenze, X) $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{DRAW}}$

Entsprechendes gilt, wenn die untere Grenze unbekannt ist.

Hinweis: Für den Rechenprozess benötigt der GTR deutlich mehr Zeit, als man es gewohnt ist.

- Lösen von linearen Gleichungssystemen (LGS mit 3 Unbekannten als 3x4 Matrix)

TI: $\boxed{\text{MATRX}}$ $\boxed{\text{EDIT}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ Matrix A: 3x4 definieren, Eingabe der Zahlen

$\boxed{\text{MATRX}}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\text{rref}}$ $\boxed{\text{MATRX}}$ $\boxed{\text{NAMES}}$ A auswählen $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

Casio: $\boxed{\text{MENU}}$ $\boxed{\text{RUN-MAT}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{MAT}}$(F1), Matrix A: 3x4 definieren,

$\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EDIT}}$, jede Zahleneingabe mit $\boxed{\text{EXE}}$ bestätigen, $\boxed{\text{EXIT}}$ $\boxed{\text{EXIT}}$ $\boxed{\text{OPTN}}$,

$\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{\text{Rref}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X},\Theta,\text{T}}$ $\boxed{\text{EXE}}$

Die letzte Spalte gibt dann die Lösungen für die 3 gesuchten Unbekannten an.

Oder: $\boxed{\text{MENU}}$ $\boxed{\text{EQUA}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ „Simultaneous" mit $\boxed{\text{F1}}$ auswählen, „Number of Unknowns" 3

$\boxed{\text{F2}}$ wählen, jede Zahlen-Eingabe mit $\boxed{\text{EXE}}$ bestätigen $\boxed{\text{SOLV}}$

Weitere Hinweise und Rechenoperationen zum GTR findet man in den Aufgaben direkt.

GTR Rechenoperationen zur Stochastik werden in diesem Kapitel besprochen.

1. Elemente der Kurvendiskussion – Ableitung, Steigung

(Nullstellen, HP, TP, WP, Symmetrie, Monotonie)

Abi
2010 1.1a,2a,b, 2010 2d,3a, 2011 1a,b, 2012 1a,
2013 1.1a,1.2, 2014 1.1a,c,2.2, 2015 1a, 2016 1.1a

Wie man an den Abijahrgängen erkennen kann, werden vor allem im Teil a) eines Wahlteils unter anderem Elemente aus der Kurvendiskussion und der Differenzialrechnung gefragt.
Im a) Teil hat man meistens mindestens 3 verschiedene leichte Fragestellungen, die rechnerisch auf dem Niveau des Pflichtteils liegen. Dafür gibt es relativ viele Verrechnungspunkte.
In weiteren Teilaufgaben nimmt der Schwierigkeitsgrad und Rechenaufwand bei gleicher Punktezahl deutlich zu.

1. Exemplarische Beispielaufgabe Abi BW 2008 1.1a

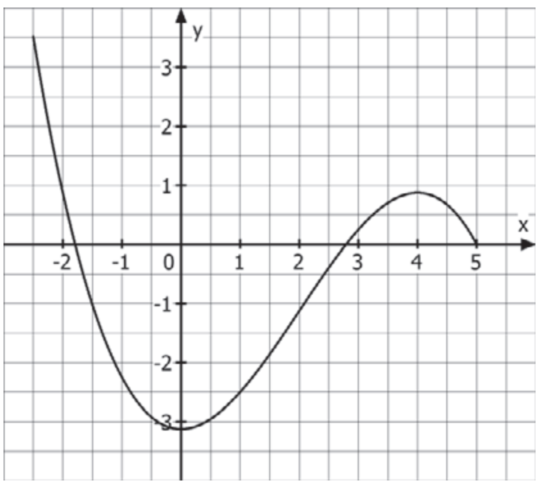
Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt.
Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3{,}125 \qquad \text{im Bereich } -2{,}5 \le x \le 5,$$

dabei weist die positive x-Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m).

Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes.
Berechnen Sie die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist.
Quer zum Tal befindet sich in West-Ost-Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie 312,5 m hoch.
Berechnen Sie die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante.

Lösungsweg
Skizze:



Die östliche Talseite ist an der Stelle des Wendepunktes am steilsten. Der Wendepunkt markiert den Punkt zwischen Tiefpunkt und Hochpunkt mit der größten Steigung:

$$f'(x) = -0,375x^2 + 1,5x$$
$$f''(x) = -0,75x + 1,5$$

Mit der notwendigen Bedingung für Wendepunkte $f''(x) = 0$: $-0,75x + 1,5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$
Da nach der Stelle gefragt wird, ist die Angabe des x-Wertes völlig ausreichend.

Oder mit GTR: Eingabe von $y_1 = f(x)$, unter y_2 Eingabe der Ableitungsfunktion.
Die Extremstellen von y_2 geben die Stellen der Wendepunkte von $f(x)$ an.

Die Steigung an der Stelle x = 2: $f'(2) = 1,5$.

Die gesuchte Stelle an der westlichen Talseite muss also auch über die Steigung $m = 1,5$ oder $m = -1,5$ verfügen.
Da man sich westlich im Bereich einer monoton fallenden Funktion befindet, sucht man die Stelle

$f'(x) = -1,5$ mit dem GTR: $x = -0,828$

Der tiefste Punkt des Tales befindet sich bei $T\left(0 \mid -3,125\right)$ (GTR).
Von dort 312,5 m hoch gemessen befindet sich die Oberkante der Staumauer.
Mit der Vorgabe 1 LE entspricht 100 m, entspricht die x-Achse genau der Oberkante der Staumauer.
Die Breite errechnet man also über den Abstand der Nullstellen der Funktion $f(x)$:

$f(x) = 0$ mit dem GTR: $x_1 = -1,79$ und $x_2 = 2,79$.
Abstand d der Nullstellen: $d = 2,79 - (-1,79) = 4,58$.

Die Breite der Oberkante der Staumauer beträgt **458 m**.

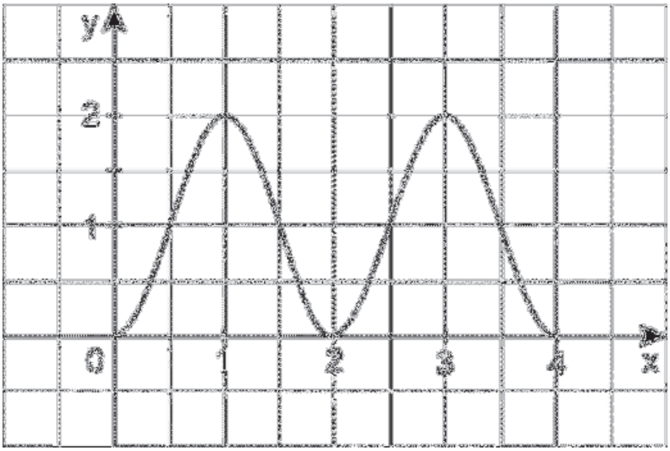
2. Exemplarische Beispielaufgabe Abi BW 2009 2.1a

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2 \cdot \left(sin\left(\frac{\pi}{2} x \right) \right)^2$.

Ihr Schaubild ist K.

Skizzieren Sie K im Intervall $\left[0;4\right]$.
Geben Sie die Periode von f an.
Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von K auf ganz $\mathbb{R}$ an.
Für welche Werte von x nimmt f im Intervall $\left[0;2\right]$ den Wert 1 an?

Lösungsweg
Skizze:



Die Periode p ist sofort aus dem Schaubild ablesbar zu: **p = 2**.

Aus dem Schaubild entnimmt man außerdem für alle Hoch- und Tiefpunkte:

Hochpunkte: x-Werte sind „ungeradzahlig“ und y = 2: $HP\left(2k+1 \mid 2\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

Tiefpunkte: x-Werte sind „geradzahlig“ und y = 0: $TP\left(2k \mid 0\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

Der Funktionswert 1 wird bei $x_1 = 0,5$ und $x_2 = 1,5$ angenommen.

Weitere Aufgaben, Skripte und Tipps zum Thema finden Sie unter:
http://www.mathe-aufgaben.com/aufgaben/aufgaben-oberstufe und
http://www.mathe-aufgaben.com/skripte/abitur/bw-allgemein-bildende-gymnasien.html

2. Wachstum allgemein beschränkt beliebig

– Differenzialgleichung, Änderungsrate, Mittelwert

Abi

2004 3.1c, 2005 1.1,3, 2006 3, 2007 1,3, 2008 3, 2009 3, 2011 2.1,3,
2012 3, 2013 2.1, 2014 2.1, 2015 2.1, 2016 2.1

Das Thema abnehmendes oder zunehmendes Wachstum wird häufig mithilfe einer Euler-Funktion $f(t)=e^t$ beschrieben.

In den letzten Jahren gibt es eine zunehmende Tendenz keine Bestandsfunktion vorneweg zu stellen, sondern die gegebene Funktion $f(t)$ als Änderungsrate eines zugehörigen Bestandes zu bezeichnen. Um dann den Gesamtbestand zu erhalten, muss die gegebene Funktion integriert werden, das heißt, die Stammfunktion $F(t)$ beschreibt zusammen mit dem Anfangsbestand, welcher die Integrationskonstante c festlegt, den Gesamtbestand.

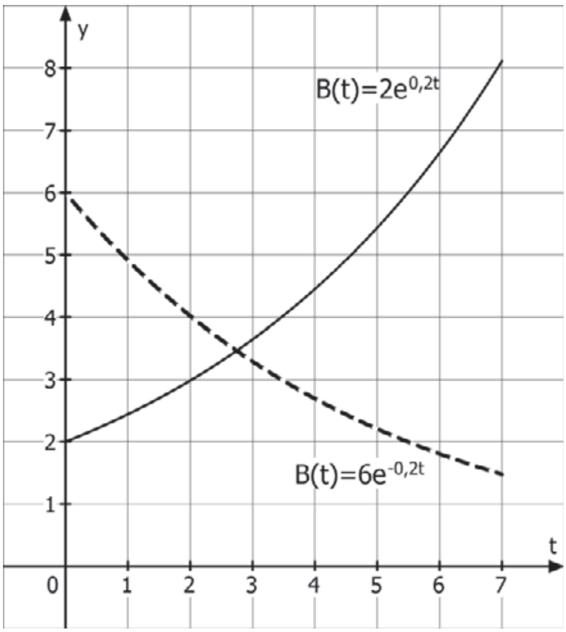
In den Funktionen, die ein Wachstum beschreiben, wird für die Variable meistens t anstelle x verwendet, da der Bestand oder die Änderungsrate eines Bestandes von der Zeit t (time) abhängt.

Die Abiaufgaben zum Thema Wachstum lassen sich in 4 Funktionsmodelle unterteilen:

1. Modell des exponentiellen Wachstums

Der Bestand $B(t)$ lässt sich mit $B(t)=B(0)\cdot e^{kt}$ beschreiben, dabei kann $B(t)$ fallend oder steigend sein.

Skizze:



Dabei ist $B(0)$ der Ausgangsbestand zum Zeitpunkt t = 0 und k wird als Wachstumsfaktor bezeichnet, der meist sehr klein ist, da er die große Basis e ausgleichen muss.

1. Ableitung: $B'(t) = B(0) \cdot k \cdot e^{kt} = k \cdot B(0) \cdot e^{kt}$

Ersetzt man $B(0) \cdot e^{kt}$ wieder durch B(t), ergibt sich $B'(t) = k \cdot B(t)$

$B'(t) = k \cdot B(t)$ bezeichnet man als Differenzialgleichung von $B(t)$.

In einer Differenzialgleichung wird die Abhängigkeit der Änderungsrate $B'(t)$ vom Bestand $B(t)$ zum Ausdruck gebracht, ohne zu wissen, welcher Term $B(t)$ beschreibt.

Auflösung von $B'(t) = k \cdot B(t)$ nach k: $k = \frac{B'(t)}{B(t)}$.

Das bedeutet, dass sich die Änderungsrate zum Bestand proportional verhält.

Differenzialgleichung und 1. Ableitung meinen beide die Änderungsrate $B'(t)$ einer Bestandsfunktion $B(t)$.

Nur in der Differenzialgleichung ist der Term für $B(t)$ noch nicht bekannt. Da sich die e-Funktion

beim Integrieren und beim Ableiten nicht ändert, ist $B(t)$ zur Beschreibung einer Differenzialgleichung geeignet.

Deshalb heißt hier $B(t)$ **Lösungsfunktion** der Differenzialgleichung $B'(t) = k \cdot B(t)$.

Das Modell des exponentiellen Wachstums ist für zukünftige Abiaufgaben unwahrscheinlich.

Ein beschränktes Wachstum gibt da wesentlich mehr her.